

## ИНДУКЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОВОДЯЩИХ БЫСТРОДВИЖУЩИХСЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ С ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМОЙ

*Р. Р. Рафигов, А. В. Гуревич\*, К. П. Зыбин*

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма  
Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 июня 1998 г.

Рассмотрено магнитогидродинамическое обтекание тонкого проводящего тела сверхзвуковым потоком плазмы. Исследована специфика индукционного взаимодействия тела с плазмой и процесс генерации плазменных волн в случае, когда тело вращается. Изучена структура возмущений магнитного поля и распределение токов в плазме, возникающие как следствие индукционного взаимодействия. Получены выражения для сил, действующих на пластинку, и моментов этих сил. В рамках простейшей модели были учтены также кинетические эффекты, связанные с конечностью токов абсорбции и эмиссии, переноса заряда с пластинки в плазму и наоборот. Найдено распределение поверхностного потенциала, который может приводить к существенному ускорению частиц в окрестности тела.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В обычной газодинамике торможение движущегося тела осуществляется за счет прямого взаимодействия набегающего потока газа с поверхностью тела. При сверхзвуковом движении тела это взаимодействие приводит к генерации ударной волны.

В сильно разреженной замагниченной плазме картина существенно иная. Прямое взаимодействие частиц с поверхностью тела здесь мало существенно. Зато возникает новый вид взаимодействия, связанный с индукцией электрического поля и токов на поверхности тела. Это взаимодействие приводит к электромагнитному торможению тела и генерации альфвеновской волны и других магнитогидродинамических волн (МГД) в плазме. Такое электромагнитное взаимодействие проводящих тел с замагниченной плазмой получило название индукционного.

Впервые на возможность существования индукционного взаимодействия при обтекании тела в условиях идеальной магнитной гидродинамики было указано в работе Дрелла, Фоли и Рудермана [1]. Детальная теория этого явления разработана Гуревичем, Крыловым и Федоровым [2]. Было показано, что оно может играть существенную роль в космической плазме. Экспериментальные данные, полученные в последнее время, подтверждают важность рассмотрения индукционных эффектов [3–5]. Приложениям теории к различным конкретным проблемам, например взаимодействию Юпитер—Ио и движению сильно вытянутой проводящей нити в ионосфере (тетеринг), посвящен

\*E-mail: alex@td.lpi.ac.ru

целый ряд исследований [6–8]. Подчеркнем, что во всех этих работах рассматривалось лишь поступательное движение обтекаемого тела.

Вместе с тем обтекаемые космической плазмой тела, например планеты, вращаются, и это вращение может существенно сказаться на эффектах индукционного взаимодействия. Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа.

Подчеркнем, что реальный процесс индукционного взаимодействия тела с замагниченной плазмой включает в себя две независимые проблемы: генерацию волн в идеальной магнитной гидродинамике током, протекающим по поверхности тела [2, 9] и структуру переходного слоя, определяющего перетекание тока из плазмы на тело и обратно. Последняя задача связана с возможностью эмиссии и абсорбции заряженных частиц плазмы поверхностью [10]. Она носит в значительной степени кинетический характер и сильно зависит от физической структуры обтекаемого тела — это может быть, например, твердая поверхность или же достаточно плотная приповерхностная столкновительная плазма (как нижние слои ионосферы или нижняя область короны Солнца). В приповерхностном слое эмиссии и абсорбции вследствие индукционного взаимодействия могут возникать значительные продольные (т. е. направленные вдоль магнитного поля) электрические поля, приводящие к ускорению частиц и генерации высокочастотного излучения, а также к другим авроральным процессам.

В настоящей работе будет исследовано влияние вращения обтекаемого плазмой тела как на генерацию МГД волн, так и на структуру приповерхностного слоя.

## 2. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ В ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

### 2.1. Основные уравнения

Рассмотрим обтекание вращающегося тела сверхзвуковым потоком плазмы с замороженным магнитным полем. Для этого исследуем индукционное взаимодействие, вызванное генерацией тока на теле при условии его конечной проводимости.

В самом деле, в системе координат, связанной с движущимся телом, существует индукционное электрическое поле

$$\mathbf{E} = -c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость потока плазмы относительно тела. Возникающий при этом в теле конечной проводимости электрический ток возмущает внешнее поле и скорость плазмы, приводя к генерации МГД волн.

Для описания стационарного обтекания воспользуемся уравнениями идеальной магнитной гидродинамики:

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{B}]. \quad (3)$$

Чтобы исследовать чисто индукционные эффекты, примем, что тело — бесконечно тонкая круглая пластинка  $S$  радиуса  $R$ , расположенная вдоль набегающего потока, с нормалью  $\mathbf{n} = n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ . Предполагается, что  $\mathbf{e}_3$  направлен вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , которое, в свою очередь, не имеет составляющей вдоль поступательной скорости

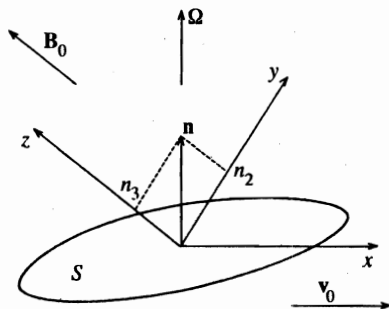


Рис. 1. Пространственное расположение пластинки относительно магнитного поля

пластинки. Орт  $e_1$  направлен вдоль этой скорости, а  $e_2$  образует с ними ортогональную систему координат. При этом в общем случае мы считаем пластинку наклоненной относительно поля, т.е.  $n_2 \neq 0$ . Отсюда следует, что поле  $B_0$  не имеет составляющей вдоль оси  $x$  и что в общем случае ось  $y$  не лежит в плоскости пластинки (см. рис. 1).

Поверхностная проводимость пластинки  $\hat{\Sigma}$  берется в виде

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_p & \Sigma_h \\ -\Sigma_h & \Sigma_p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где  $\Sigma_p$  — педерсеновская, а  $\Sigma_h$  — холловская проводимости.

Структура возмущений исследуется в наиболее естественной системе координат, связанной с центром пластинки и движущейся вместе с ней. В этой системе невозмущенные значения поля, скорости и плотности плазмы есть

$$B_0 = B_0 e_3, \quad v_0 = v_0 e_1, \quad \rho = \rho_0.$$

Возмущения этих величин ищутся в виде

$$B = B_0 + M_A b, \quad v = v_0 + M_A u, \quad \rho = \rho_0 + M \rho, \tag{5}$$

где

$$M = v_0/v_s, \quad v_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad M_A = v_0/v_A.$$

Поправки предполагаются малыми, так что задачу можно исследовать, линеаризуя уравнения МГД (2), (3) относительно этих поправок. В результате линеаризации получаем уравнения

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{M} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{M_A} \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{M_A} \left( \frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial z} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{M}{M_A} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

Граничные условия на пластинке определяются из следующих соображений. Естественно, нормальная компонента скорости плазмы на пластинке должна обращаться в нуль:

$$(\mathbf{un})|_S = 0. \quad (14)$$

Затем, из-за наличия поверхностного тока магнитное поле, параллельное поверхности пластины, претерпевает скачок:

$$\{[\mathbf{nb}]\}_S = \frac{4\pi}{cM_A B_0} \mathbf{I}. \quad (15)$$

Здесь  $\{f\}_S$  означает скачок величины  $f$  при переходе через поверхность пластины,  $\mathbf{I}$  — поверхностный ток. Наконец, непрерывна и тангенциальная компонента электрического поля:

$$E_t = -c^{-1}[\mathbf{vB}]_t = -c^{-1}B_n v_t$$

(последнее равенство верно, поскольку нормальная скорость  $v_n$  обращается в 0). Но нормальная компонента поля  $\mathbf{B}$  также непрерывна, значит, получаем условие непрерывности тангенциальной скорости плазмы при переходе через пластинку. В общем случае произвольного наклона пластинки это означает, что

$$\{u_x\}_S = \{u_y\}_S = \{u_z\}_S = 0. \quad (16)$$

В условиях

$$1 \ll M_A \ll M \quad (17)$$

уравнения расцепляются, давая три типа волн: альфвеновскую, быструю и медленную магнитодинамические волны:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial b_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{1}{M_A} \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{M}{M_A} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Эта система в точности совпадает с системой, рассматривавшейся в [2] и описывающей индукционные эффекты, обусловленные поступательным движением пластинки. В настоящей работе исследуются явления индукционного взаимодействия, обусловленные вращением тела. Как мы увидим, система основных уравнений (18)–(21) при этом сохраняет свой вид. Введение вращения тела определяет лишь изменение граничных условий задачи.

В дальнейшем мы будем предполагать условия (17) выполненными, что позволяет рассмотреть возбуждение разных типов волн по отдельности.

### 2.2. Альфвеновская волна

Для альфвеновской волны имеем уравнения (18) с граничными условиями

$$\{b_x\}_S = 4\pi I_y / c M_A B_0, \quad \{u_x\}_S = 0. \quad (22)$$

Распишем подробно выражение для поверхностного тока. Для этого введем систему координат  $x'y'z'$  с осью  $x'$  по направлению движения, причем ось  $z'$  направлена вдоль нормали к пластинке, а ось  $y'$  лежит в плоскости пластинки и перпендикулярна  $x'$  и  $z'$ . В этой системе поле  $\mathbf{B}_0$  имеет вид  $(0, n_2 B_0, n_3 B_0)$ . Скорость точки на пластинке с координатами  $(x', y', 0)$  есть

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_{x'} + [\Omega \mathbf{r}'].$$

В этой точке генерируется поверхностное индукционное поле

$$\mathbf{E} = -\frac{[\mathbf{v}\mathbf{B}]}{c} = -\frac{B_0 n_3}{c} \left( \begin{array}{c} \Omega x \\ \Omega y - v_0 \end{array} \right). \quad (23)$$

В результате возникает поверхностный ток

$$\mathbf{I} = \hat{\Sigma} \mathbf{E} = -\frac{B_0 n_3}{c} \left( \begin{array}{c} \Sigma_p \Omega x + \Sigma_h \Omega y' - \Sigma_h v_0 \\ \Sigma_p \Omega y' - \Sigma_h \Omega x - \Sigma_p v_0 \end{array} \right). \quad (24)$$

Поскольку  $y' = y/n_3$ , получаем окончательно

$$I_x = -\frac{B_0 n_3}{c} \left( \Sigma_p \Omega x + \Sigma_h \Omega \frac{y}{n_3} - \Sigma_h v_0 \right), \quad (25)$$

$$I_{y'} = -\frac{B_0 n_3}{c} \left( \Sigma_p \Omega \frac{y}{n_3} - \Sigma_h \Omega x - \Sigma_p v_0 \right). \quad (26)$$

Путем несложных преобразований получаем из уравнений (18) вместе с (26) следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} - \frac{1}{M_A^2} \frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2} = 0, \quad (27)$$

$$\{b_x\}_s = f_p(x, y) = \frac{4\pi}{c^2} \Sigma_p v_A n_3 + \frac{\Omega R}{v_0} \frac{4\pi v_A}{c^2} \left( \Sigma_p \frac{y}{R} - n_3 \Sigma_h \frac{x}{R} \right), \quad \left\{ \frac{\partial b_x}{\partial z} \right\}_s = 0. \quad (28)$$

Здесь вращение тела обуславливает наличие второго члена в (28), пропорционального угловой частоте вращения  $\Omega$ .

Можно сразу выписать общее решение уравнения (27) с граничными условиями (28):

$$b_x = \frac{1}{2} \begin{cases} f_p(x^+, y), & n_2 y + n_3 z > 0, \\ -f_p(x^-, y), & n_2 y + n_3 z < 0, \end{cases} \quad (29)$$

где

$$x^\pm = x \mp M_A \frac{n_2 y + n_3 z}{n_3}.$$

Видно, что ненулевое решение существует лишь внутри альфвеновских цилиндров  $F$ , задаваемых условием

$$(x^\pm)^2 + \frac{y^2}{n_3^2} = R^2,$$

и что возмущения сносятся по характеристикам вдоль магнитного поля, чего и следовало ожидать для обычной альфвеновской волны. В полученном решении существенная разница по сравнению со случаем чисто поступательного движения заключается в том, что магнитное поле уже не постоянно внутри цилиндра, а существенно зависит от координаты.

Возмущение скорости  $u_x$  при этом записывается в виде

$$u_x = -\frac{1}{2} \begin{cases} f_p(x^+, y), & n_2 y + n_3 z > 0, \\ f_p(x^-, y), & n_2 y + n_3 z < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Для исследования влияния вращения на картину течения рассмотрим структуру токов в пространстве. Их объемная плотность равна

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left( 0, \frac{\partial b_x}{\partial z}, -\frac{\partial b_x}{\partial y} \right). \quad (31)$$

Подставляя (29) в эту формулу, получаем, что внутри цилиндра существует однородный объемный ток:

$$\mathbf{j}_\pm = \left( 0, -\frac{\Omega \Sigma_h n_3}{2c}, \frac{\Omega}{2c M_A} (n_2 M_A \Sigma_h \pm \Sigma_p) \right). \quad (32)$$

Наличие ненулевого объемного тока внутри альфвеновских цилиндров принципиально отличается от случая невращающейся пластинки, где внутренний ток отсутствовал и весь ток протекал вдоль поверхностей разрыва, проходящих через края пластинки. Наличие внутреннего тока является прямым следствием вращения и возникающей зависимости внутреннего магнитного поля от координат (ср. [2]).

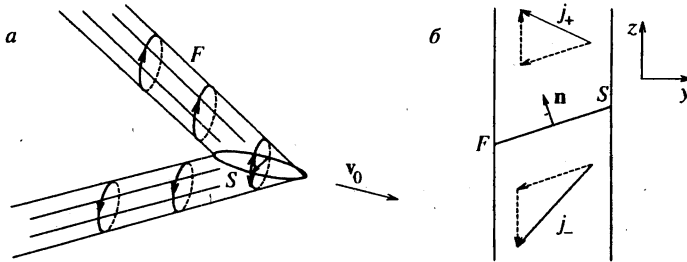


Рис. 2. Картина объемного тока внутри альфвеновских цилиндров: *a* — вид сбоку, *б* — вид спереди; *F* — поверхность альфвеновских цилиндров

Из выражения (32) видно также, что из-за вращения генерация альфвеновских волн происходит не только за счет педерсеновской проводимости  $\Sigma_p$ , но и за счет холловской проводимости  $\Sigma_h$ . Этот результат появляется только при учете вращения, он отсутствует при чисто поступательном движении. Замыкание объемного тока, текущего внутри альфвеновских цилиндров, и поверхностного тока на пластинке происходит через поверхность альфвеновских цилиндров, где течет  $\delta$ -функциональный ток, связанный со скачком магнитного поля на границе (см. рис. 2). Такой сингулярный ток возникает из-за того, что в идеальном случае, рассматриваемом нами, через плазму можно пропускать токи сколь угодно большой плотности. Это предположение идеальной магнитогидродинамики конечно же не выполняется в реальной плазме, где и скорость переносчиков заряда, и их пространственная плотность ограничены. В дальнейшем это обстоятельство будет учтено путем рассмотрения кинетических эффектов, связанных с тем, что перенос тока с пластинки в плазму происходит посредством эмиссии и абсорбции электронов, причем соответствующие токи конечны.

### 2.3. Быстрая магнитозвуковая волна

Для рассмотрения быстрой магнитозвуковой волны используем систему (19), (20) с граничным условием, вытекающим из (25):

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{1}{M_A} \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{1}{M_A} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad \rho = \frac{M_A}{M} b_z, \quad (34)$$

$$\{n_2 b_z - n_3 b_y\}_S = f_B(x, y) = \frac{4\pi}{c^2} \Sigma_h v_A n_3 + \frac{\Omega R}{v_0} \frac{4\pi v_A}{c^2} \left( \Sigma_p n_3 \frac{x}{R} + \Sigma_h \frac{y}{R} \right), \quad \{u_y\}_S = 0. \quad (35)$$

Введем функцию  $\psi(x, y, z)$ , такую, что

$$b_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad b_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = M_A \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (36)$$

Тогда из уравнений (33), (34) получаем двумерное волновое уравнение:

$$M_A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (37)$$

$$\left\{ n_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + n_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}_S = f_B, \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}_S = 0. \quad (38)$$

Его решение представляется в виде

$$\psi = -\frac{1}{2\pi n_3} \int_{S'} f_B(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \frac{\theta \left( x - \xi_1 - M_A \sqrt{(y - \xi_2)^2 + (z + n_2 \xi_2 / n_3)^2} \right)}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 - M_A^2 [(y - \xi_2)^2 + (z + n_2 \xi_2 / n_3)^2]}}, \quad (39)$$

где  $S'$  — проекция  $S$  на плоскость  $xy$ , а  $\theta(z)$  — функция Хевисайда. Видно, что ненулевое решение существует лишь в пределах конуса Маха  $y^2 + z^2 < x^2 / M_A^2$ .

В силу линейности граничных условий мы можем представить решение в виде суммы двух частей,  $\psi^0$  и  $\psi^{rot}$ , обусловленных поступательным и вращательным движением соответственно. Исследуем асимптотическое поведение этих частей. Для невращающегося диска, т.е. при  $\Omega = 0$ , можно получить явное выражение для  $\psi^0$  в приближении  $R \ll x, y, z$  при  $(x, y, z)$ , лежащих достаточно глубоко внутри конуса Маха. В этом случае, разлагая подынтегральное выражение по степеням  $\xi_1/x$ ,  $\xi_2/y$ ,  $\xi_2/z$  и интегрируя, получаем, что

$$\psi^0(x, y, z) = \frac{2v_A \Sigma_h \pi R^2 n_3}{c^2 \sqrt{x^2 - M_A^2 r^2}}, \quad (40)$$

где  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Возмущения магнитного поля имеют тороидальную структуру:

$$b_y^0 = \frac{2v_A \Sigma_h \pi R^2 n_3 M_A^2}{c^2 (x^2 - M_A^2 r^2)^{3/2}} z, \quad (41)$$

$$b_z^0 = -\frac{2v_A \Sigma_h \pi R^2 n_3 M_A^2}{c^2 (x^2 - M_A^2 r^2)^{3/2}} y. \quad (42)$$

Исходя из этих выражений, можно легко проанализировать структуру токов. Действительно,  $\mathbf{b} = \text{rot} \psi \mathbf{e}_1$ , а

$$\mathbf{j} = \frac{c M_A B_0}{4\pi} \text{rot rot}(\psi \mathbf{e}_1) = \frac{c M_A B_0}{4\pi} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right). \quad (43)$$

В результате получаем, что тороидальная компонента тока отсутствует, причем

$$j_x^0 = \frac{v_A \Sigma_h \pi R^4 n_3 M_A^3 B_0}{2\pi c (x^2 - M_A^2 r^2)^{5/2}} (2x^2 + M_A^2 r^2), \quad (44)$$

$$j_r^0 = \frac{v_A \Sigma_h \pi R^4 n_3 M_A^3 B_0}{2\pi c (x^2 - M_A^2 r^2)^{5/2}} 3rx. \quad (45)$$

Уравнение для линий тока  $dx/dr = j_x/j_r$  выглядит как

$$\frac{dx}{dr} = \frac{2x^2 + M_A^2 r^2}{3xr} \quad (46)$$



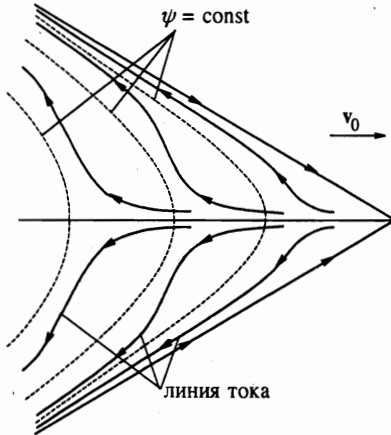


Рис. 3. Токовые поверхности и поверхности постоянного потенциала  $\psi$  в случае отсутствия вращения

и имеет своим решением  $x^2 = C_0 r^{4/3} + M_A^2 r^2$ . Видно, что на больших расстояниях от тела это просто конусы. Для сравнения заметим, что поверхности постоянного  $\psi$  определяются уравнением  $x^2 = M_A^2 r^2 + C_1^2$  (см. рис. 3).

В тех же предположениях  $R \ll x, y, z$  можно найти и асимптотику второго слагаемого в (39), которое описывает эффекты вращения:

$$\psi^{rot} = n_3 \frac{\pi R^3 [v_A \Sigma_p x - v_0 \Sigma_h n_3 M_A (y - n_2 z)]}{2c^2 (x^2 - M_A^2 r^2)^{3/2}} \tag{47}$$

В итоге получаем на больших расстояниях от пластинки

$$\psi(x, y, z) = \frac{2v_A \pi R^2 n_3}{c^2 \sqrt{x^2 - M_A^2 r^2}} \left[ \Sigma_h + \frac{\Omega R}{v_0} \frac{R(\Sigma_p x - \Sigma_h M_A^2 (n_3 y - n_2 z))}{4(x^2 - M_A^2 r^2)} \right] \tag{48}$$

Из приведенного выражения видно, что возмущения, вызванные вращением, убывают с расстоянием быстрее, чем поступательные возмущения, так что структура тока на расстояниях

$$x \gg R \frac{\Sigma_p}{\Sigma_h} \frac{\Omega R}{v_0}, \text{ при } \Sigma_p > \Sigma_h M_A,$$

$$x \gg R M_A \frac{\Omega R}{v_0}, \text{ при } \Sigma_p < \Sigma_h M_A,$$

будет определяться в основном поступательным движением.

Если же  $\Sigma_h = 0$ , то быстрая магнитозвуковая волна, обусловленная поступательным движением, не возникает вовсе, поэтому структура возмущений будет определяться только вращением пластинки. При этом

$$\psi(x, y, z) = \frac{v_A \Sigma_p \pi R^4 \Omega n_3 x}{2c^2 v_0 (x^2 - M_A^2 r^2)^{3/2}} \tag{49}$$

Как и в случае чисто поступательного движения, поле при  $\Sigma_h = 0$  тороидальное:

$$b_y = \frac{v_A \Sigma_p \pi R^4 \Omega n_3 M_A^2 x}{2c v_0 (x^2 - M_A^2 r^2)^{5/2} z}, \quad (50)$$

$$b_z = -\frac{v_A \Sigma_p \pi R^4 \Omega n_3 M_A^2 x}{2c v_0 (x^2 - M_A^2 r^2)^{5/2} y}. \quad (51)$$

Соответственно, тороидальная компонента тока отсутствует, а для остальных компонент тока имеем

$$j_x = \frac{3\pi R^4 n_3 \Omega M_A}{2c(x^2 - M_A^2 r^2)^{7/2}} x \Sigma_p (2x^2 + 3M_A^2 r^2), \quad (52)$$

$$j_r = -\frac{3\pi R^4 n_3 \Omega M_A}{2c(x^2 - M_A^2 r^2)^{7/2}} r \Sigma_p (4x^2 + M_A^2 r^2). \quad (53)$$

Уравнение линий тока

$$\frac{dx}{dr} = \frac{x}{r} \frac{2x^2 + 3M_A^2 r^2}{4x^2 + M_A^2 r^2} \quad (54)$$

дает следующую форму токовых поверхностей:

$$(x^2 - M_A^2 r^2)^5 = C_2 x^2 r^4.$$

Видно, что и в этом случае в пределе больших расстояний эти поверхности подходят к конусу  $x^2 = M_A^2 r^2$ .

Заметим также, что при ненулевой скорости вращения  $\Omega$  структура быстрой магнитозвуковой волны явно зависит не только от холловской проводимости (как это было в случае чисто поступательного движения)  $\Sigma_h$ , но и от педерсеновской  $\Sigma_p$ .

#### 2.4 Медленная магнитозвуковая волна

Поведение медленной магнитозвуковой волны определяется скоростью  $u_y$ , которая входит в граничные условия для уравнений (21):

$$u_z|_S = -\frac{n_2}{n_3} u_y|_S = w(x, y), \quad \{u_z\}_S = 0. \quad (55)$$

Видно, что, как и в случае невращающейся пластинки, медленный звук не возбуждается при  $n_2 = 0$ , когда плоскость пластинки ортогональна магнитному полю.

Из (21) получаем граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0, \quad (56)$$

$$u_z|_S = -\frac{n_2}{n_3} u_y|_S = w(x, y), \quad \{u_z\}_S = 0. \quad (57)$$

Эти уравнения вполне аналогичны альфвеновскому случаю, так что легко получаем

$$u_z = \frac{1}{2} \begin{cases} w(x^+, y), & n_2 y + n_3 z > 0, \\ w(x^-, y), & n_2 y + n_3 z < 0, \end{cases} \quad (58)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{cases} w(x^+, y), & n_2y + n_3z > 0, \\ -w(x^-, y), & n_2y + n_3z < 0, \end{cases} \quad (59)$$

где

$$x^\pm = x \mp M \frac{n_2y + n_3z}{n_3}.$$

Как и в случае альфвеновской волны, здесь все возмущения сосредоточены внутри расходящихся цилиндров, которые теперь наклонены под углом  $\arctg(1/M)$ , а не  $\arctg(1/M_A)$ .

Решение задачи внутри цилиндров полностью определяется значением скорости  $u_y$ , а значит, и величины  $\psi$  на поверхности пластинки. Но у самой поверхности тела, на расстояниях меньших  $R$ , интегрирование (39) для нахождения  $\psi$  заметно осложняется тем, что теперь оно должно проводиться не по всей поверхности пластинки, как это делалось при получении асимптотик (40) и (47), а только по той ее части, где аргумент функции Хевисайда положителен.

### 3. ПЕРЕХОДНЫЙ СЛОЙ У ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

#### 3.1 Основные уравнения

Как хорошо известно, тело в плазме не остается нейтральным из-за процессов абсорбции и эмиссии электронов и рекомбинации ионов. Оно приобретает электрический заряд, приводящий к появлению на поверхности тела безвихревого электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (60)$$

где  $\phi$  — поверхностный потенциал. Переписав уравнение непрерывности для тока на поверхности пластинки, получим

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} = \{j_z\}_S. \quad (61)$$

Ток на поверхности теперь равен

$$I = -\hat{\Sigma} \left( \nabla\phi + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right). \quad (62)$$

Подставив это выражение в (62), получим хорошо известное (см. [12, 9, 10]) уравнение, определяющее распределение поверхностного потенциала:

$$\operatorname{div}_S \left( \hat{\Sigma} \left( \nabla\phi + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right) \right) = \{j_z\}_S. \quad (63)$$

Зная же распределение потенциала, можно, возвращаясь к выражению (62), построить картину распределения поверхностного тока  $I$ , а далее использовать ее при определении структуры магнитогидродинамических волн.

Важность учета потенциала, возникающего на теле, связана еще и с тем, что именно им определена продольная разность потенциалов в переходном слое между идеальным

МГД потоком и поверхностью тела. Под действием продольного электрического поля частицы плазмы могут ускоряться до достаточно больших энергий. Так, например, дециметровое излучение авроральных зон Юпитера связывается обычно именно с таким механизмом, когда предполагается, что частицы, ускоренные в окрестности Ио, сталкиваются с верхними слоями полярных областей атмосферы Юпитера. Те же эффекты, но в усложненной благодаря наличию магнитосферы форме, оказывают влияние на ускорение частиц и авроральные процессы в приполярных областях Земли.

Подчеркнем, что обычно величина токов абсорбции и эмиссии  $j_z$  сама по себе существенно зависит от величины и распределения потенциала  $\phi$  на теле. Она определяется кинетическими процессами вблизи поверхности, структурой самой поверхности или приповерхностной плазмы, условиями абсорбции или рекомбинации, а также процессами эмиссии заряженных частиц. Таким образом, сама проблема устройства поверхностного слоя между идеальной МГД плазмой и поверхностью тела составляет отдельную задачу, зависящую от конкретных условий и определяющуюся многими физическими параметрами. Мы рассмотрим здесь наиболее простой случай свободной абсорбции и эмиссии электронов. Током ионов, предполагая, что поступательная скорость тела  $v_0$  удовлетворяет условиям

$$v_{Ti} \ll v_0 \ll v_{Te} \quad (64)$$

( $v_{Ti} = \sqrt{T/M}$ ,  $v_{Te} = \sqrt{T/m}$  — тепловые скорости ионов и электронов соответственно), можно пренебречь. Свободная абсорбция электронов описывается при этом выражением (см., например, [11])

$$j_z = -j_0 \begin{cases} 1, & \phi > 0, \\ \exp\left(\frac{e\phi}{T}\right), & \phi < 0, \end{cases} \quad (65)$$

$$j_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} eN. \quad (66)$$

Здесь  $N$  — плотность плазмы. Для свободной электронной эмиссии зависимость тока от потенциала поверхности имеет аналогичный вид:

$$j_z = j_0 \begin{cases} 1, & \phi < 0, \\ \exp\left(-\frac{e\phi}{T}\right), & \phi > 0. \end{cases} \quad (67)$$

Везде в дальнейшем мы будем придерживаться при конкретном рассмотрении токов абсорбции и эмиссии именно этих законов.

Ранее в [9, 10] было показано, что при чисто поступательном движении существенный поверхностный потенциал возникает только в узких областях у края тела, где достаточно резко меняется поверхностная проводимость.

Действительно, вдали от края пластинки градиент  $\nabla\phi$  мал, если проводимость пластинки постоянна вдоль ее поверхности и выполнено условие

$$\epsilon = \frac{\Sigma v_0 B_0}{c j_0 R} \ll 1 \quad (68)$$

(см. [10]). Пренебрегая им в (63), получим, что  $j_z = 0$ , т.е. потенциал  $\phi = 0$ .

Но у самого края пластинки, где поверхностная проводимость скачком падает до нуля, возникает член с сингулярным значением  $\partial\Sigma/\partial r$ . Благодаря этому вблизи края появляется ток  $j_z \neq 0$  и  $\phi \neq 0$ . В этой области формируется тонкий (по сравнению с размерами пластинки) слой, в котором  $\phi \gg T/e$ . Если мы рассматриваем область положительного потенциала, это приводит к подавлению эмиссионного тока и усилению абсорбционного тока до его максимального значения  $j_0$ . В области отрицательного потенциала ситуация, соответственно, обратная. Можно сразу оценить по порядку величины толщину токового слоя. Действительно, индукционный потенциал создает на пластинке полный ток  $I \sim E_{ind}l\Sigma$ , где  $l$  — характерный масштаб тела, в нашем случае радиус пластинки  $R$ . Чтобы прокачать такой ток из плазмы на пластинку путем эмиссии или абсорбции (65), (67), необходима, как минимум, площадь  $S \sim E_{ind}l\Sigma/j_0$ . Если считать, что эта площадь  $S$  вытянута вдоль края пластинки,  $S \sim lx_0$ , то получаем оценку толщины токового слоя:

$$x_0 \sim E_{ind}\Sigma/j_0.$$

Если условия задачи таковы, что слой действительно узкий,  $x_0 \ll R$ , (для этого, как легко видеть, и необходимо выполнение условия (68)), то мы можем достичь упрощения задачи, считая ее квазиодномерной. Точнее, в этом случае мы можем считать, что внутри слоя все производные вдоль него пренебрежимо малы по сравнению с производными поперек слоя, благодаря чему задача становится одномерной.

### 3.2. Геометрия переходного слоя

Будем исследовать задачу для простейшего случая  $n_2 = 0$ . Рассмотрим область непосредственно у края пластины на масштабах порядка толщины слоя. Так как эта толщина предполагается малой (условия, необходимые для этого, будут в дальнейшем получены), мы вообще можем считать край пластины плоским (радиус пластины устремляем к бесконечности). Тогда нам остается решить задачу натекания плазмы на полубесконечную пластину и посмотреть строение переходного слоя, а затем обобщить результат на общий случай.

Рассмотрим случай  $\phi > 0$ , а результаты для  $\phi < 0$  могут быть получены из простых симметричных соображений. Введем у края пластины прямоугольную систему координат с осью  $x$ , направленной внутрь пластинки перпендикулярно краю, и осью  $y$ , параллельной краю. Тогда видно, что ось  $x$  антипараллельна радиусу полярной системы координат с началом в центре пластинки, а ось  $y$  антипараллельна направлению  $\varphi$  в той же точке.

Будем считать, что нормаль к краю пластинки и скорость набегающей плазмы составляют между собой некоторый угол  $\alpha$ . В случае круглой пластинки этот угол  $\alpha = -\varphi$ , поэтому именно угол  $\varphi$  и будет использоваться далее. При  $\Omega \neq 0$  появляется дополнительная составляющая скорости  $\Omega R$  вдоль  $e_\varphi$  или, в локальной системе края пластинки, в отрицательном направлении оси  $y$ . Скорость натекающего потока в такой геометрии

$$\mathbf{v} = (v \cos \varphi, -v \sin \varphi - \Omega r, 0).$$

Считая пластинку полубесконечной, все величины не зависящими от  $y$  и отсчитывая  $x$  от края пластинки, мы переписываем (63) в одномерном варианте как

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2\Omega B}{c} = \frac{2j_0}{\Sigma_p} \quad (69)$$

(учтено, что абсорбционный ток в слое принимает максимальное значение).

Решение этого уравнения в нашем одномерном варианте есть

$$\phi(x) = \left( \frac{j_0}{\Sigma_p} - \frac{\Omega B}{c} \right) x^2 + C_1 x + C_2. \quad (70)$$

Граничные условия для уравнения потенциала определим следующим естественным образом. Во-первых, согласно (66), плотность тока в пространстве теперь не может превышать  $j_0$ . В результате поверхностный ток, перпендикулярный краю пластины,  $I_x$ , должен обращаться в нуль, т. е. должно выполняться условие

$$\left( \hat{\Sigma} \left( \nabla \phi + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (71)$$

Отсюда, используя явное выражение для  $\mathbf{v}$ , имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{\Sigma_h B_0 v_0}{\Sigma_p c} \cos \varphi - \frac{B_0}{c} (v_0 \sin \varphi - \Omega R). \quad (72)$$

Второе условие задается на внутренней границе пограничного слоя  $x_0$ , где  $\phi(x_0) = 0$ . Естественно, в силу той же ограниченности пространственного тока, считать  $x$ -компоненту поверхностного тока в этой точке непрерывной. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = 0, \quad (73)$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ .

Три граничных условия (72), (73) позволяют определить константы  $C_1, C_2$  в выражении для потенциала и положение края пограничного слоя:

$$C_1 = \frac{B_0 \Omega R \Sigma_p}{c j_0} - \frac{B_0 v_0}{c j_0} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi), \quad (74)$$

$$C_2 = \left( \frac{C_1^2}{4} \right) \left( \frac{j_0}{\Sigma_p} - \frac{\Omega B_0}{c} \right), \quad (75)$$

$$x_0 = - \frac{B_0 \Omega R \Sigma_p}{c j_0} + \frac{B_0 v_0}{c j_0} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi). \quad (76)$$

Выражение для потенциала можно переписать тогда в виде

$$\phi(x) = \left( \frac{j_0}{\Sigma_p} - \frac{\Omega B}{c} \right) (x - x_0)^2. \quad (77)$$

С учетом этого получим для поверхностного тока в системе координат края пластинки:

$$I_x = -2 \left( j_0 - \frac{\Omega B \Sigma_p}{c} \right) (R - r - x_0(\varphi)) + \frac{vB}{c} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi) - \frac{\Sigma_p B_0}{c} \Omega R, \quad (78)$$

$$I_y = 2 \left( j_0 \frac{\Sigma_h}{\Sigma_p} - \frac{\Omega B \Sigma_h}{c} \right) (R - r - x_0(\varphi)) + \frac{vB}{c} (\Sigma_p \cos \varphi - \Sigma_h \sin \varphi) + \frac{\Sigma_h B_0}{c} \Omega R. \quad (79)$$

В области отрицательного потенциала толщина слоя ведет себя как

$$x_0 = \frac{B_0 v_0}{c j_0} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi) + \frac{B_0 \Omega R \Sigma_p}{c j_0}, \quad (80)$$

а сам потенциал меняется внутри слоя как

$$\phi(x) = - \left( \frac{j_0}{\Sigma_p} + \frac{\Omega B}{c} \right) (x - x_0)^2. \quad (81)$$

Теперь нетрудно обобщить полученные результаты на случай пластинки произвольной формы. Для этого надо просто брать те же формулы для потенциала  $\phi$  и толщины слоя  $x_0^\Omega$ , где теперь уже эти величины считаются зависящими от  $\varphi$  как угла, определяющего положение рассматриваемой точки у края пластины. Сам пограничный слой будет теперь иметь переменную ширину, зависящую от угла  $\varphi$  по закону (76).

Посмотрим сначала, что будет в рассматриваемом нами случае круглой пластины в отсутствие вращения. При  $\Omega = 0$  решение принимает вид

$$\phi(x) = \frac{j_0}{\Sigma_p} (x - x_0)^2. \quad (82)$$

Поверхностный ток в пограничном слое в этом случае равен

$$\begin{aligned} I &= - \begin{pmatrix} \Sigma_p & \Sigma_h \\ -\Sigma_h & \Sigma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2j_0}{\Sigma_p} (x - x_0) - \frac{vB}{c} \sin \varphi \\ -\frac{vB}{c} \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 2j_0(x - x_0) - \frac{vB}{c} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi) \\ -2j_0 \frac{\Sigma_h}{\Sigma_p} (x - x_0) - \frac{vB}{c} (\Sigma_p \cos \varphi - \Sigma_h \sin \varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (83)$$

Пограничный слой имеет толщину, зависящую от  $\varphi$  по закону

$$x_0 = \frac{B_0 v_0}{c j_0} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi). \quad (84)$$

Его максимальная толщина

$$x_0^{max} = \frac{vB}{c j_0} \sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2}$$

достигается при  $\varphi_{max} = \pi/2 - \arctg(\Sigma_h/\Sigma_p)$ . Если же угол равен  $-\varphi_0 = -\arctg(\Sigma_h/\Sigma_p)$  или  $\pi - \varphi_0$ , толщина пограничного слоя обращается в нуль. Толщина  $x_0^{max}$  должна быть мала по сравнению с  $R$ , следовательно

$$v_0 B_0 \sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2} / c j_0 R \ll 1, \quad (85)$$

т. е. условие (68) на самом деле выполняется. Как уже упоминалось ранее, в этом случае поверхностный потенциал вне слоя (вдали от края пластины) очень мал и в этой области абсорбционный и эмиссионный токи в точности компенсируют друг друга. В области  $(-\varphi_0, \pi - \varphi_0)$  получаем пограничный слой с положительным потенциалом и

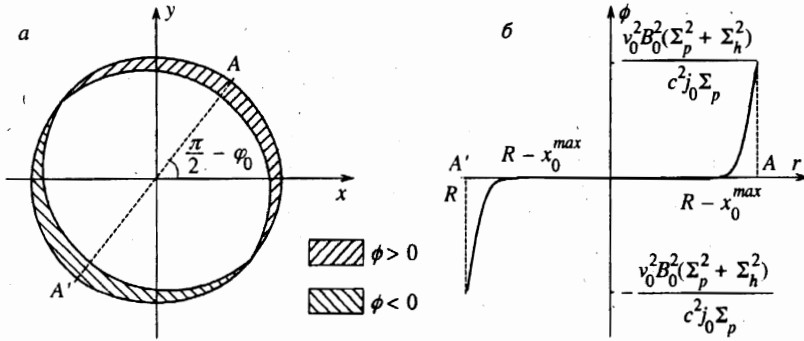


Рис. 4. Распределение потенциала на пластинке в случае  $\Omega = 0$ : а — расположение переходных слоев, б — зависимость потенциала от расстояния до края пластинки

преобладанием абсорбционного тока. В интервале  $(\pi - \varphi_0, 2\pi - \varphi_0)$  сформируется слой с отрицательным потенциалом и, соответственно, эмиссионным током. В силу симметрии полные токи, протекающие через эти слои, равны друг другу по величине и, следовательно, полностью компенсируют друг друга, замыкая, таким образом, токовую цепь (см. рис. 4).

Посмотрим, что будет в случае  $\Omega \neq 0$ . Здесь у нас уже нет такой явной симметрии, которая была в случае  $\Omega = 0$ . Геометрия пограничного слоя существенно изменится: размеры слоев положительного и отрицательного потенциалов будут разными. Действительно, слой положительного потенциала теперь не простирается на  $\pi$ , а заключен в пределах углов

$$\left( -\varphi_0 + \arcsin \left( \frac{\Omega R}{v_0} \frac{\Sigma_p}{\sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2}} \right), \pi - \varphi_0 - \arcsin \left( \frac{\Omega R}{v_0} \frac{\Sigma_p}{\sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2}} \right) \right).$$

Соответственно в остальном интервале углов находится слой отрицательного потенциала. Изменяется и ширина слоев: положительный истончается, отрицательный, напротив, расширяется. Теперь уже максимальная ширина первого есть

$$x_0^{max} = \frac{vB}{cj_0} \sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2} - \frac{B_0 \Omega R \Sigma_p}{cj_0}, \tag{86}$$

а второго

$$x_0^{max} = \frac{vB}{cj_0} \sqrt{\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2} + \frac{B_0 \Omega R \Sigma_p}{cj_0}. \tag{87}$$

Видно, что по мере того как  $\Omega$  приближается по величине к  $\Omega^{cr} = v_0 \sqrt{\Sigma_h^2 + \Sigma_p^2} / R \Sigma_p$ , интервал углов, в пределах которого лежит слой положительного потенциала, уменьшается, а сам слой сужается. При  $\Omega = \Omega^{cr}$  этот слой исчезает совсем. Обратная ситуация со слоем отрицательного потенциала — он расширяется, увеличиваясь в продольном направлении. В пределе  $\Omega \rightarrow \Omega^{cr}$  он занимает весь край пластинки и при дальнейшем увеличении угловой скорости вращения представляет собой ободок переменной ширины у края пластинки (см. рис. 5).



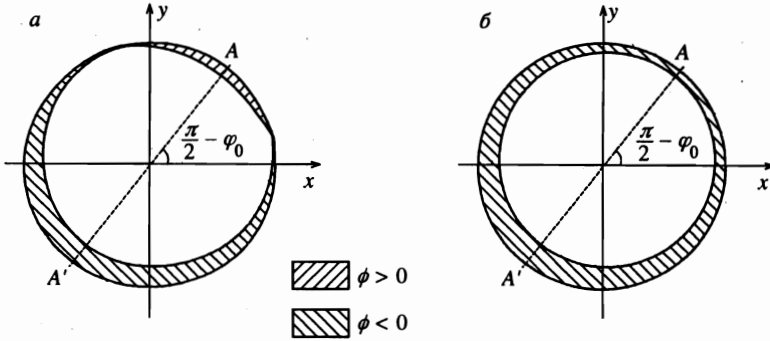


Рис. 5. Расположение переходных слоев на поверхности пластинки в случае  $\Omega \neq 0$ : а — случай  $\Omega < \Omega^{cr}$ , б — случай  $\Omega > \Omega^{cr}$

Возникает вопрос: каким же образом осуществляется тогда замыкание токов на пластинке, ведь через пограничный слой теперь будет происходить избыточный сток эмиссионного тока, не компенсируемый абсорбционным током в положительном слое. Для ответа на этот вопрос необходимо вернуться к области вне пограничного слоя. При включении в рассмотрение вращения мы уже не можем пренебрегать потенциалом, который генерируется в этой части пластинки. Действительно, возьмем уравнение (63) и, как это делалось ранее, пренебрежем в области вдали от края производными потенциала. Тогда получаем

$$\frac{\Omega B}{c} = \frac{j_z}{\Sigma_p} \tag{88}$$

Предполагая разность потенциалов в этой области малой по сравнению с  $T_e/e$ , мы можем разложить в (88) ток  $j_z$ , который есть сумма абсорбционного (65) и эмиссионного (67) токов, по степеням  $e\phi/T$  и получить в результате постоянный положительный потенциал

$$\phi = \frac{T_e}{e} \frac{\Sigma_p \Omega B_0}{c j_0} \tag{89}$$

(см. рис. 6). Решение (89) справедливо лишь при достаточно больших токах в плазме  $j_0$ :

$$\Omega B_0 \Sigma_p / c j_0 \ll 1.$$

Этот потенциал создает дополнительный абсорбционный ток с плотностью

$$j^+ = j_0 (1 - \exp(e\phi/T_e)) = B_0 \Omega \Sigma_p / c. \tag{90}$$

Этот ток, по условию (68), много меньше, чем ток  $j_0$  в пограничном слое. Но зато он собирается практически со всей поверхности пластинки, тогда как размер пограничного слоя, где течет ток с большой плотностью, мал. Этот добавочный абсорбционный ток дает полный ток, равный  $\pi R^2 B_0 \Sigma_p \Omega / c$ , тогда как избыток эмиссионного тока над абсорбционным в пограничном слое составляет, как показывает элементарный расчет,

$$\Delta I = j_0(S^- - S^+) = j_0 \int_{S^-} x_0^-(\varphi) d\varphi - j_0 \int_{S^+} x_0^+(\varphi) d\varphi = \frac{B_0 \Omega \Sigma_p}{c} \pi R^2, \tag{91}$$

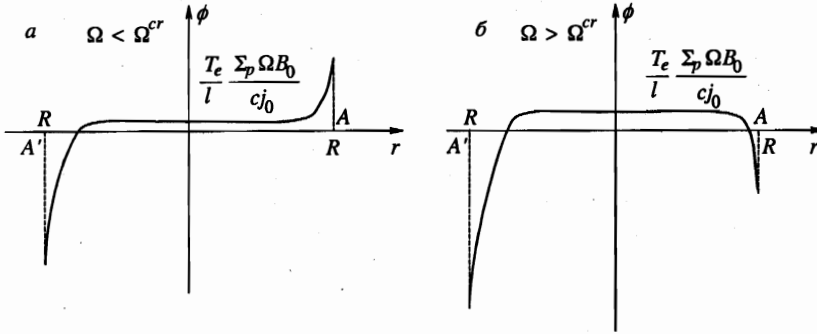


Рис. 6. Зависимость потенциала от расстояния до края пластинки в случае  $\Omega \neq 0$ : а — случай  $\Omega < \Omega^{cr}$ , б — случай  $\Omega > \Omega^{cr}$

т. е. ту же самую величину. Именно таким образом и осуществляется замыкание тока на обтекаемом теле в случае его вращения: эмиссионный ток идет лишь в узкой полосе (76) вблизи края, а компенсирующий его ток абсорбции натекает на всю поверхность.

### 3.3. Случай малых токов эмиссии и абсорбции

Существенный интерес представляет рассмотрение предела малых токов эмиссии и абсорбции или высокой скорости вращения тела, когда выполняется соотношение, обратное (68):

$$\epsilon_1 = \frac{\Sigma v_0 B_0}{c j_0 R} \gg 1, \quad \epsilon_2 = \frac{\Sigma \Omega B_0}{c j_0} \gg 1. \tag{92}$$

Такая ситуация может реализовываться в случае разреженной плазмы или низкой температуры, когда тепловая скорость ее частиц не обеспечивает достаточно больших плотностей тока.

Если выполняется условие (92), мы уже не можем считать, что основной ток сосредоточен у нас в пограничном слое, где плотность тока равна  $j_0$ . Действительно, по мере роста угловой скорости вращения  $\Omega$  картина распределения потенциала по поверхности пластинки качественно меняется примерно следующим образом: краевой слой отрицательного потенциала постепенно расширяется, а величина положительного потенциала во внутренних областях пластинки линейно растет с ростом  $\Omega$ . Когда этот потенциал по величине сравнится с  $T_e/e$  (это произойдет, когда параметр  $\epsilon_2$  станет  $\sim 1$ ), ток во внутренних областях будет вести себя уже нелинейным образом. При этом, как легко видеть, размер пограничного слоя становится порядка  $R$  и наше предположение об одномерности нарушается (ср. [9]).

В случае выполнения условий (92) можно, однако, сравнительно просто найти распределение потенциала по поверхности. Действительно, теперь мы должны решать полное уравнение (63) без предположения об одномерности. Но в его правой части можно пренебречь, в силу (92), токами эмиссии и абсорбции. Тогда уравнение для потенциала переписется в полярных координатах как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = -2 \frac{\Omega B_0}{c}. \tag{93}$$

Граничное условие для уравнения (93), т. е. исчезновение нормальной компоненты поверхностного тока на краю пластины, переписывается теперь как

$$\Sigma_p \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\Sigma_h}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{B_0 v_0}{c} (\Sigma_p \sin \varphi + \Sigma_h \cos \varphi) - \frac{B_0 \Sigma_p \Omega R}{c}. \quad (94)$$

Эта граничная задача похожа на классическую задачу Неймана. Ее решение ищется в виде

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m(r) \cos(m\varphi) + \beta_m(r) \sin(m\varphi)]. \quad (95)$$

Подстановка в (93) и использование граничного условия (94) и условия отсутствия у решения особенности при  $r = 0$  дают нетривиальные функции  $\alpha_m, \beta_m$  только для  $m = 0, 1$ . Полное решение есть

$$\phi(r, \varphi) = -\frac{\Omega B_0}{2c} r^2 + r \frac{B_0 v_0}{c} \sin \varphi + C, \quad (96)$$

где  $C$  — произвольная константа, для определения которой необходимо еще одно граничное условие. Его можно получить из баланса полного тока на пластинке: поскольку абсорбционный и эмиссионный токи переносятся практически везде с плотностью  $j_0$  (так как  $\phi \gg T/e$ ), необходимо, чтобы площадь, занимаемая положительным потенциалом, была равна площади, занимаемой отрицательным потенциалом. Значение константы  $C$  сильно зависит от соотношения между  $\Omega R$  и  $v_0$ . В общем случае она выражается посредством весьма громоздкого интегрирования, но в предельных случаях выражение для  $C$  сильно упрощается: при  $\Omega R \ll v_0$  она, очевидно, просто равна нулю, в обратном же случае  $\Omega R \gg v_0$  получаем, что  $C = \Omega B_0 R^2 / 4c$ .

Легко физически интерпретировать получающуюся картину. Действительно, при условии (92) ток, пропускаемый через пластину одним лишь индукционным потенциалом, имеет порядок  $E_{ind} \Sigma R$ , что гораздо больше того тока, который может подтечь из плазмы. В итоге на поверхности тела выстраивается поверхностный потенциал таким образом, чтобы максимально скомпенсировать индукционную разность потенциалов на пластинке и, соответственно, уменьшить ток через нее до величины порядка  $j_0 R^2$ .

### 3.4. Поле и токи в переходном слое

Теперь, после выяснения деталей геометрической структуры переходного слоя, можно перейти к нахождению токов и полей в этом слое.

Используя выражения (78), (79) для компонент поверхностного тока, получаем компоненту тока по оси  $y$  в декартовой системе координат с началом в центре пластинки:

$$J_y = I_r \sin \varphi + I_\varphi \cos \varphi = \quad (97)$$

$$= 2(x - x_0^{\Omega}) \left( \frac{j_0}{\Sigma_p} - \frac{\Omega B}{c} \right) (\Sigma_p \sin \varphi - \Sigma_h \cos \varphi) - \frac{Bv \Sigma_p}{c} - \frac{\Omega r B}{c} (\Sigma_p \sin \varphi - \Sigma_h \cos \varphi). \quad (98)$$

Обратим внимание на тот факт, что на самом краю пластинки ток  $J_y$  не обращается в нуль, поскольку, хотя  $I_r = 0$  при  $r = R$ ,  $I_\varphi \neq 0$ . Это приводит к возникновению скачка поля  $b_x$  на краю пластинки и, как следствие, к  $\delta$ -функциональным альфвеновским токам в плазме. Возникает кажущийся парадокс, так как эти токи должны замыкаться

нормальной компонентой тока, текущего по пластинке, а она как раз отсутствует. Это противоречие легко разрешается, если вспомнить, что при наличии ненулевого тока  $I_\varphi$  в пространстве вокруг пластинки будет генерироваться еще и быстрая магнитозвуковая волна. Она, естественно, также создает свои токи, которые как раз и будут компенсировать  $\delta$ -функциональные альфвеновские токи на границе цилиндров. В результате токовый баланс опять выполняется и кажущееся противоречие, связанное с ним, снимается —  $\delta$ -функциональные токи в полном решении отсутствуют.

Подставляя (98) в (15), получаем граничное условие для компоненты поля  $b_x$ , после чего нетрудно сразу выписать решение по аналогии с тем, как это делалось раньше:

$$b_x^+ = -\frac{2\pi v_0 \Sigma_p}{c^2 M_A} - \frac{\Omega R}{v_0} \frac{2\pi v_A}{c^2} \frac{\Sigma_p y - \Sigma_h x^+}{R} + \delta_l \times \\ \times \left( 2 \frac{j_0}{\Sigma_p} R \frac{\Sigma_p y - \Sigma_h x^+}{\sqrt{y^2 + (x^+)^2}} - 2 \frac{j_0}{\Sigma_p} (\Sigma_p y - \Sigma_h x^+) - \frac{vB}{c \Sigma_p} \frac{\Sigma_p^2 y^2 - \Sigma_h^2 (x^+)^2}{y^2 + (x^+)^2} + \frac{\Omega R}{v_0} \frac{2\pi v_A}{c^2} \frac{\Sigma_p y - \Sigma_h x^+}{R} \right),$$

где  $\delta_l$  равно единице в слое и нулю везде вне его.

Имея выражения для поля, можно найти и пространственную плотность тока в слоевых окрестностях альфвеновских цилиндров:

$$j_y^+ = -\Omega R \frac{\Sigma_h}{2cR} + \frac{\delta_l}{2B} \left[ -2j_0 \frac{x^+}{\Sigma_p R^2} (\Sigma_h x^+ - \Sigma_p y) - \right. \\ \left. - 4 \frac{v_0 B_0}{c \Sigma_p} \frac{y^2 x^+ (\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2)}{R^4} - \frac{\Omega R}{v_0} \frac{v}{2c} \left( -2 \frac{\Sigma_h}{R} + \frac{y (\Sigma_p x^+ + \Sigma_h y)}{R^3} \right) \right], \quad (99)$$

$$j_z^+ = \frac{\Omega R}{M_A} \frac{\Sigma_p}{2cR} + \frac{\delta_l}{2B M_A} \left[ 2j_0 \left( 1 + \frac{x^+ (\Sigma_h x^+ + \Sigma_p y)}{R^2 \Sigma_p} \right) - \right. \\ \left. - 4 \frac{vB}{c \Sigma_p} \frac{y(x^+)^2 (\Sigma_p^2 + \Sigma_h^2)}{R^4} - \frac{\Omega R}{v_0} \frac{v_A}{2c} \left( 2 \frac{\Sigma_p}{R} - \frac{x^+ (\Sigma_p x^+ + \Sigma_h y)}{R^3} \right) \right]. \quad (100)$$

Все формулы для случая  $z < 0$  выписываются аналогичным образом. Видно, что пространственный ток, ранее текший по поверхности цилиндров, сейчас течет в слое конечной толщины (76).

Аналогично, вычисляя  $x$ -компоненту тока на пластинке через  $I_r$  и  $I_\varphi$ , можно найти поле и токи в быстрой магнитозвуковой волне.

### 3.5. Силы и моменты сил, действующие на тело

Токи, возникающие на движущемся теле, взаимодействуют с внешним магнитным полем, что приводит к появлению сил, действующих на тело. Величина сил порядка  $JB/c$ , где  $J$  — полный ток на теле, и существенно зависит от того, какова плотность тока  $j_0$  в плазме. Если  $j_0$  высока, что соответствует идеальной магнитной гидродинамике, то  $J$  определяется индукционным механизмом генерации тока на теле и зависит лишь от его проводимости, скорости тела и поля  $B$ . Если же, напротив, выполняется условие (92), то ток  $J$  зависит лишь от  $j_0$  и от геометрических размеров тела. Мы рассмотрим здесь первый случай, когда предполагается, что плотность тока  $j_0$  велика и, следовательно, условие (68) выполнено.

Для вычисления сил и их моментов, действующих на вращающееся тело, достаточно использовать невозмущенные значения для магнитного поля и скорости плазмы. Расчет достаточно просто проводится в случае произвольной ориентации поля  $\mathbf{B}_0$  относительно тела. Поэтому мы перейдем в систему координат с осью  $z$ , направленной вдоль нормали к пластинке, и будем считать, что поле  $\mathbf{B}_0$  имеет все три составляющие:  $B_x, B_y, B_z$ .

В таком случае, как показывает проводимый аналогично [2] расчет, полная сила складывается из сил торможения, бокового сдвига и подъемной силы и равна

$$\mathbf{F} = \frac{v_0 B_z \pi R^2}{c^2} \begin{pmatrix} -\Sigma_p B_z \\ -\Sigma_h B_z \\ B_y \Sigma_h - B_x \Sigma_p \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Сравнение с результатами, полученными в [2] для чисто поступательного движения, показывает, что вращение не дает вклада в силы, действующие на тело. Оказывается, однако, что оно приводит к возникновению момента сил, чего не было в случае поступательного движения. Момент сил равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_S \frac{1}{c} [\mathbf{r}[\mathbf{I}\mathbf{B}_0]] dS = - \int_S \frac{1}{c^2} [\mathbf{r}[\hat{\Sigma}[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_0] \mathbf{B}_0]] dS = \\ &= \frac{\Omega B_z \pi R^4}{4c^2} \begin{pmatrix} \Sigma_h B_y - \Sigma_p B_x \\ -\Sigma_h B_z - \Sigma_p B_y \\ -2B_z \Sigma_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

Если рассматривать различные компоненты момента по отдельности, возникает следующая картина. Момент  $M_z$  приводит к торможению вращения тела по закону

$$\Omega = \Omega_0 \exp\left(-\frac{B_z^2 \Sigma_p \pi R^4}{2I_z c^2} t\right), \quad (103)$$

где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси, совпадающей с нормалью.

Слагаемые в  $M_x, M_y$ , пропорциональные  $\Sigma_p$ , приводят к тому, что пластинка стремится повернуться так, чтобы ее нормаль встала параллельно направлению магнитного поля, причем угол между направлением поля и нормалью убывает пропорционально  $\exp(-B_z^2 \pi R^4 \Sigma_p t / 4c^2 I_z)$ . Видно, что постоянная времени этого процесса практически такая же, как и у торможения вращения, что означает, что, вообще говоря, эти два процесса фактически протекают вместе.

Наконец, те слагаемые в  $M_x, M_y$ , которые пропорциональны  $\Sigma_h$ , приводят к прецессии пластинки относительно направления магнитного поля. Природу этой прецессии понять нетрудно. Дело в том, что из-за поверхностного тока на пластинке генерируется ненулевой магнитный момент. Расчет с использованием выражений (25), (26) дает для этого момента величину

$$\mathbf{m} = \frac{\pi R^4 \Sigma_h B_z}{4c^2 I_z} \mathbf{L}, \quad (104)$$

где  $\mathbf{L}$  — момент импульса пластинки относительно нормали. Прецессия этого магнитного момента в поле  $\mathbf{B}$  и приводит к прецессии пластинки:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{m}\mathbf{B}] = [\Omega_{pr} \mathbf{L}], \quad \Omega_{pr} = -\frac{\pi \Sigma_h B_z R^4}{4c^2 I_z} \mathbf{B}. \quad (105)$$

Мы получили в итоге, что результирующее движение пластинки под действием моментов индукционных сил, вызванных вращением, есть суперпозиция прецессии, торможения основного вращения и выравнивания пластинки перпендикулярно полю. Рассмотренное изменение момента вращения качественно подобно возникающему в магнитосфере пульсаров [13].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-18217) и соросовского фонда (грант № s98-1545).

## Литература

1. F. D. Drell, H. M. Foley, and A. M. Ruderman, *Geophys. Res.* **70**, 3131 (1965).
2. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Е. Н. Федоров, *ЖЭТФ* **75**, 2132 (1978).
3. L. A. Frank et al., *Science* **274**, 394 (1996).
4. M. G. Kivelson et al., *Science* **274**, 396 (1996).
5. D. J. Williams et al., *Science* **274**, 401 (1996).
6. F. M. Neubauer, *J. Geophys. Res.* **85**, 1171 (1980).
7. D. J. Southwood, M. G. Kivelson, R. J. Walker, and J. A. Slavin, *J. Geophys. Res.* **85**, 5959 (1980).
8. K. Papadopoulos, C.-L. Chang, and A. Drobot, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 745 (1998).
9. А. В. Гуревич, Н. Т. Пашенко, *Геомагнетизм и аэрономия* **21**, 225 (1981).
10. А. В. Гуревич and Н. Т. Pashchenko, *Acta Astronautica* **10**(2), 91 (1982).
11. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Искусственные спутники в разреженной плазме*, Наука, Москва (1964).
12. А. В. Gurevich, A. L. Krylov, and E. E. Tsedilina, *Space Sci. Rev.* **19**, 59 (1976).
13. V. S. Beskin, A. V. Gurevich, and Ya. N. Istomin, *Physics of the Pulsar Magnetosphere*, Cambridge University Press (1993).