

## ТЕОРИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАЗМЕ

*В. Ю. Быченков\*, В. Н. Новиков, В. Т. Тихончук*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 февраля 1998 г.

Сформулирована система уравнений электронного переноса для малых возмущений в плазме, пригодная для произвольного соотношения между длиной свободного пробега электронов и масштабом неоднородности. Электрон-электронные столкновения рассмотрены на основе точного интеграла столкновений Ландау, что позволило впервые получить выражения для потенциальных составляющих фурье-компонент электронных потоков, обобщенных сил и всех транспортных коэффициентов в плазме с произвольным зарядом ионов. Найденные коэффициенты переноса — электрическая проводимость, температуропроводность, коэффициент термотока и коэффициенты ионной конвекции — позволяют количественно описывать широкий круг мелкомасштабных процессов в полностью ионизованной плазме. В качестве приложений развитой теории рассмотрены эффекты подавления теплопереноса и затухания ионно-звуковой волны в бестоковой плазме во всей области пространственных масштабов возмущений от сильностолкновительного предела до бесстолкновительного.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамические уравнения представляют собой эффективный инструмент для исследования широкого круга явлений в физике сплошных сред. Они значительно более просты, чем кинетические уравнения, и адекватно описывают процессы на масштабах значительно больше длины свободного пробега частиц. Известный вывод гидродинамических уравнений из кинетической теории методом Чепмена — Энскога состоит в разложении отклонения функции распределения от термодинамического равновесия в линейном приближении по градиентам гидродинамических моментов [1–3] и приводит к локальным связям между потоками и обобщенными силами. Однако этот метод ограничен областью весьма слабых пространственных градиентов, когда длина масштаба неоднородности гидродинамических переменных превышает сотни длин свободного пробега частиц. Для большого числа важных прикладных задач физики плазмы непосредственный интерес представляют значительно более мелкомасштабные неоднородности, и поэтому необходима разработка теории переноса, свободной от такого ограничения. Такая теория приводит к нелокальным связям между потоками и обобщенными силами и потому называется нелокальной теорией переноса. В настоящее время ее разработка является актуальной проблемой для целого ряда направлений физики плазмы, таких как лазерный термоядерный синтез [4], термоядерные исследования в плазме с

\*E-mail: bychenk@sci.lebedev.ru

магнитным удержанием [5], астрофизическая плазма [6] и слабоионизованная, низкотемпературная плазма [7].

Общий подход к выводу обобщенных гидродинамических уравнений состоит в записи цепочки уравнений для моментов функции распределения частиц, ее обрыве на каком-то уровне и выражении высших моментов через низшие. Последний этап неоднозначен, поскольку предполагает знание полной функции распределения, в то время как она может быть найдена только приближенно. По этой причине все известные нелокальные теории переноса [8–10] имеют весьма ограниченную область применимости, а также зачастую содержат эмпирические параметры. В работах [11, 12] был предложен и развит новый метод вывода уравнений нелокальной гидродинамики, которые, хотя и включают в себя только низкие моменты электронной функции распределения, оказываются полностью эквивалентны кинетической теории для возмущений малой амплитуды в плазме. Это достигнуто благодаря получению общего решения кинетического уравнения для функции распределения электронов с интегралом столкновений с ионами и электронами в форме Ландау. Метод [11] позволяет последовательно получить точные выражения для электронных транспортных коэффициентов в фурье-представлении, но ограничен приближением достаточно большого заряда ионов,  $Z \gg 1$ , поскольку электрон-электронные столкновения были учтены только в уравнении для изотропной части функции распределения. С практической точки зрения такое ограничение весьма существенно, поскольку количественное описание транспортных свойств плазмы оказывается возможным только при  $Z \gtrsim 10$ , тогда как в большинстве практических приложений приходится иметь дело с ионами меньшей кратности ионизации.

В настоящей работе сделан важный шаг в совершенствовании теории нелокального переноса — найдены выражения для электронных коэффициентов переноса для плазмы с ионами любого заряда. Это достигнуто последовательным учетом точного интеграла столкновений электронов с электронами в форме Ландау, подобно тому как это сделано в классической теории переноса в плазме [2, 3]. Существенное отличие от классической теории состоит в том, что соотношение между длиной масштаба неоднородности возмущений и длиной свободного пробега электронов может быть произвольным. Учет электрон-электронных столкновений представляет сложную задачу не только для аналитической теории, но и для численного моделирования. Известно всего несколько численных программ решения кинетического уравнения, где электрон-электронные столкновения учтены в том или ином приближении [13–15], в то время как теоретическое описание нелокального переноса во всем диапазоне изменения параметра столкновительности при последовательном учете электрон-электронных столкновений до сих пор вообще отсутствовало. Наиболее близкой по постановке к нашему подходу является работа [14] по численному моделированию затухания ионно-звуковых возмущений малой амплитуды в однородной плазме. Этот частный случай представляет собой репрезентативный тест для нашей общей теории переноса.

Метод решения кинетического уравнения для электронов, применяемый в данной работе, справедлив для произвольного соотношения между длиной неоднородности возмущения  $L \sim k^{-1}$  и длиной свободного пробега  $\lambda_{ei}$ , поскольку позволяет учесть вклад всех анизотропных компонент функции распределения электронов и количественно описать переход от обычной столкновительной гидродинамики к бесстолкновительному пределу. С помощью предложенной ранее [11] процедуры решения начальной задачи найдено общее решение для возмущенной функции распределения электронов для случая потенциальных возмущений и определены соотношения между электронными

потоками и обобщенными гидродинамическими силами, которые включают электрическое поле, скорость течения плазмы и градиенты плотности и температуры плазмы. В фурье-представлении по пространству эти транспортные соотношения имеют форму, подобную классическим выражениям [2, 3], но коэффициенты переноса оказываются зависящими от волнового числа (параметра столкновительности,  $k\lambda_{ei}$ ). Такой подход впервые позволяет однозначно определить нелокальные кинетические коэффициенты для полностью ионизованной плазмы с произвольным зарядом ионов. В качестве иллюстрации применения полученных уравнений нелокальной гидродинамики в данной работе рассмотрены задачи о нелокальном теплопереносе и затухании для ионно-звуковой волны в бестоковой плазме в области параметров, представляющих интерес для современных экспериментов по взаимодействию мощного лазерного излучения с плазмой.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ

В качестве основного состояния мы рассматриваем однородную плазму с максвелловской функцией распределения электронов по скоростям  $F_0(v_e)$  с плотностью  $n_e$  и температурой  $T_e$ . Мы предполагаем, что плазма полностью ионизована и содержит ионы с кратностью ионизации  $Z$ . Интересуясь явлениями, связанными с переносом электронов, мы для упрощения будем считать ионы холодными и пренебрежем ион-ионными столкновениями. Мы также пренебрежем обменом энергии в электрон-ионных столкновениях.

Пусть в начальный момент  $t = 0$  задано возмущение максвелловского распределения электронов

$$\delta f(t = 0, \mathbf{r}, \mathbf{v}_e) = \left[ \frac{\delta n_0}{n_e} + \left( \frac{v_e^2}{2v_{Te}^2} - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T_0}{T_e} \right] F_0(v_e),$$

где  $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$  и  $m_e$  — тепловая скорость и масса электронов. Рассмотрим линейный отклик плазмы на это возмущение, а также на потенциальные возмущения малой амплитуды электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  и ионной скорости  $\mathbf{u}_i$ . Причем  $\delta n_0$  и  $\delta T_0$  могут быть произвольными функциями координат  $\mathbf{r}$ , а  $\phi$  и  $\mathbf{u}_i$  могут быть произвольными функциями координат и времени (при условии  $\text{rot} \mathbf{u}_i = 0$ ). Благодаря линейности отклика достаточно ограничиться рассмотрением пространственно-периодических возмущений плотности, температуры, электрического поля и ионной скорости с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Линеаризуем кинетическое уравнение для функции распределения электронов  $f_e$ , учитывая электрон-электронные столкновения в форме интеграла столкновений Ландау,  $C_{ee}[f_e, f_e]$ , и электрон-ионные столкновения в представлении, описывающем только рассеяние по углу  $\theta$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и вектором относительной скорости электрона  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e - \mathbf{u}_i$ :

$$C_{ei}[f_e] = \frac{1}{2} \nu_{ei}(v) \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\nu_{ei}(v) = 4\pi Z n_0 e^4 \Lambda / m_e^2 v^3$  — зависящая от скорости частота электрон-ионных столкновений,  $-e$  — заряд электрона,  $\Lambda$  — кулоновский логарифм,  $\mu = \cos \theta$ . В результате подстановки приведенных выше выражений в кинетическое уравнение для электронов, переходя в систему отсчета, движущуюся с локальной ионной скоростью, получаем

следующее уравнение для пространственной фурье-компоненты отклонения электронной функции распределения  $\delta f(t, k, \theta, v)$  от равновесной функции  $F_0(v_e)$ :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + ikv\mu\delta f - ikv\mu u_i \mu^2 \frac{\partial F_0}{\partial v} + ik \frac{e}{m_e} \phi \mu \frac{\partial F_0}{\partial v} = C_{ei}[\delta f] + C_{ee}[\delta f, F_0] + C_{ee}[F_0, \delta f]. \quad (2.2)$$

Здесь  $u_i(t)$  и  $\phi(t)$  представляют собой фурье-компоненты ионной скорости и электрического потенциала. Далее разложим возмущение функции распределения  $\delta f$  по полиномам Лежандра, являющимся собственными функциями оператора электрон-ионных столкновений (2.1) в локальной системе отсчета, движущейся с ионной скоростью  $u_i$ :

$$\delta f = \sum_{l=0}^{\infty} i^l f_l(t, k, v) P_l(\mu), \quad C_{ee}[\delta f, F_0] + C_{ee}[F_0, \delta f] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l C_{ee}^l P_l(\mu), \quad (2.3)$$

и совершим преобразование Лапласа по времени. В результате указанных операций кинетическое уравнение для электронов (2.2) сводится к бесконечной системе уравнений для угловых гармоник  $f_l$  электронной функции распределения:

$$p f_l + kv \frac{l}{2l-1} f_{l-1} - kv \frac{l+1}{2l+3} f_{l+1} = -\frac{l(l+1)}{2} \nu_{ei}(v) f_l + C_{ee}^l + S_l. \quad (2.4)$$

Здесь первое слагаемое в правой части отвечает электрон-ионным столкновениям, а второе описывает электрон-электронные столкновения в форме потенциалов Розенблюта [16]:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ee}^l}{\nu_{ee}(v)} = & \frac{l(l+1)}{6} f_l (I_2^0 - 3I_0^0 - 2J_{-1}^0) + v \frac{\partial}{\partial v} \left[ f_l I_0^0 + \frac{v}{3} \frac{\partial f_l}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) \right] + \frac{4\pi v^3}{n_e} f_l F_0 + \\ & + \frac{v^2}{2(2l+1)} \frac{\partial^2 F_0}{\partial v^2} \left[ \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} (\delta I_{l+2}^l + \delta J_{-1-l}^l) - \frac{l(l-1)}{2l-1} (\delta I_l^l + \delta J_{-1-l}^l) \right] + \\ & + \frac{v}{2(2l+1)} \frac{\partial F_0}{\partial v} \left[ \frac{l^2+3l-2}{2l-1} \delta I_l^l + \frac{l(l-1)}{2l-1} \delta J_{-1-l}^l - \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} \delta I_{l+2}^l - \frac{l^2-l-4}{2l+3} \delta J_{-1-l}^l \right], \quad (2.5) \end{aligned}$$

где  $\nu_{ee}(v) = \nu_{ei}(v)/Z$  - зависящая от скорости частота электрон-электронных столкновений,

$$[J_m^0; \delta J_m^n] = \frac{4\pi}{n_e v^m} \int_0^v [F_0; f_n] v^{2+m} dv, \quad [J_m^0; \delta J_m^n] = \frac{4\pi}{n_e v^m} \int_v^{\infty} [F_0; f_n] v^{2+m} dv$$

— потенциалы Розенблюта, а функции источников  $S_l$  определяются величинами  $u_i$ ,  $\phi$ , а также фурье-компонентами  $\delta n_0$ ,  $\delta T_0$  и отличны от нуля только при  $l \leq 2$ :

$$\begin{aligned} S_0 = & \frac{\delta n_0}{n_e} F_0 + \frac{3}{2} \frac{\delta T_0}{T_e} \left( \frac{v^2}{3v_{Te}^2} - 1 \right) F_0 - \frac{i}{3} k u_i \frac{v^2}{v_{Te}^2} F_0, \\ S_1 = & \frac{e\phi}{T_e} k v F_0, \quad S_2 = \frac{2}{3} i k u_i \frac{v^2}{v_{Te}^2} F_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.4) отличается от изученной в [11, 12] учетом электрон-электронных столкновительных членов (2.5) в уравнениях с  $l \geq 1$ .

Ниже мы ограничимся изучением достаточно медленных (квазистационарных) процессов, протекающих за характерные времена малые по сравнению со временем столкновений электронов с электронами, когда можно пренебречь первыми слагаемыми в левых частях (2.4). Имея в виду линейность решаемой кинетической задачи и следуя работам [11, 12], введем базисные функции распределения  $\varphi_l$ , не зависящие от амплитуд источников (2.6) в уравнениях (2.4), но отражающие их специфические зависимости от скорости, т. е. ищем общее решение для угловых гармоник возмущения электронной функции распределения в виде

$$f_l = \frac{e\phi}{T_e} F_0 \delta_{l,0} + \frac{\delta n_0}{n_e} F_0 \varphi_l^N + \frac{3}{2} \frac{\delta T_0}{T_e} F_0 \varphi_l^T - i k u_i F_0 \varphi_l^R. \quad (2.7)$$

Здесь  $\delta_{n,m}$  — символ Кронекера, а три набора независимых базисных функций  $\varphi_l^A$  ( $A = N, T, R$ ) удовлетворяют трем подобным системам уравнений с различными источниками:

$$k v \left( \frac{l}{2l-1} \varphi_{l-1}^A - \frac{l+1}{2l+3} \varphi_{l+1}^A \right) = -\nu_{ei}(v) \frac{l(l+1)}{2} \varphi_l^A + \frac{1}{F_0} \tilde{C}_{ee}^l + S_l^A, \quad (2.8)$$

где  $S_0^N = 1$ ,  $S_0^T = v^2/3v_{Te}^2 - 1$  и  $S_0^R = -S_0^T/2 = v^2/3v_{Te}^2$  — унитарные источники, соответствующие возмущениям плотности ( $N$ ), температуры ( $T$ ) и скорости ионов ( $R$ ) единичной амплитуды, а электрон-электронные столкновительные вклады  $\tilde{C}_{ee}^l$  определяются формулами (2.5) с заменой  $f_l$  на  $F_0 \varphi_l^A$ .

### 3. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Возмущение электронной функции распределения, описываемой угловыми гармониками (2.7), создается вынуждающими силами, пропорциональными  $\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\phi$  и  $\mathbf{u}_i$ , и зависит также от начальных возмущений плотности,  $\delta n_0$ , и температуры,  $\delta T_0$ . Поэтому на первый взгляд выражение (2.7) не позволяет рассматривать гидродинамические моменты  $\delta n$  и  $\delta T$  электронной функции распределения как независимые переменные, что необходимо для общей формулировки теории электронного переноса. В частности, именно  $\delta n$  и  $\delta T$  фигурируют в классической сильностолкновительной теории. Однако, как показано в работе [11], получение общего решения для возмущения функции распределения электронов допускает процедуру введения гидродинамических моментов  $\delta n_e$  и  $\delta T_e$  как независимых переменных благодаря линейности кинетического уравнения для  $\delta f$ . Решение уравнений (2.4) и (2.8) в общем виде определяет возмущение электронной функции распределения в произвольный момент времени  $t$  в зависимости от четырех величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\delta n_0$  и  $\delta T_0$ . Поэтому для любого момента времени можно вычислить гидродинамические моменты возмущения функции распределения:

$$\delta n_e = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f_0, \quad \delta T_e = \frac{4\pi m_e}{3n_e} \int_0^\infty dv v^2 (v^2 - 3v_{Te}^2) f_0, \quad (3.1)$$

которые могут быть представлены как линейные комбинации начальных возмущений  $\delta n_0$  и  $\delta T_0$ . В соответствии с этим начальные возмущения плотности и температуры можно исключить, выразив их через мгновенные возмущения, с помощью решения системы

двух линейных алгебраических уравнений. Таким образом, электронная функция распределения может быть выражена через свои мгновенные гидродинамические моменты  $\delta n_e$  и  $\delta T_e$  как независимые переменные.

На языке лаплас-фурье-образов угловых гармоник электронной функции распределения последнее утверждение соответствует следующему соотношению:

$$f_l = i \frac{eE^*}{kT_e} F_0 \frac{J_T^N \varphi_l^T - J_T^T \varphi_l^N}{D_{NT}^{NT}} + \frac{\delta T_e}{T_e} F_0 \frac{(J_T^N + J_N^N) \varphi_l^T - (J_T^T + J_N^T) \varphi_l^N}{D_{NT}^{NT}} + \frac{e\phi}{T_e} F_0 \delta_{l,0} + iku_i F_0 \left( \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}} \varphi_l^N + \frac{D_{TN}^{RN}}{D_{NT}^{NT}} \varphi_l^T - \varphi_l^R \right), \quad (3.2)$$

записанному с помощью матрицы моментов изотропных компонент базисных функций  $\varphi_0^A$

$$J_B^A = \frac{4\pi}{n_e} \int_0^\infty v^2 dv \varphi_0^A F_0 S_0^B. \quad (3.3)$$

Здесь введено эффективное электрическое поле

$$E^* = -ik\phi + ikT_e(\delta n/n_e + \delta T/T_e)/e$$

и использовано обозначение

$$D_{AB}^{CD} = J_A^C J_B^D - J_A^D J_B^C.$$

Приведенное выражение (3.2) записано через гидродинамические моменты и базисные решения уравнения (2.8) и может быть использовано для отыскания анизотропной добавки к функции распределения  $f_1$  и замыкания системы гидродинамических уравнений.

#### 4. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Для определения функции распределения электронов нам необходимо решить кинетические уравнения для базовых функций (2.8). Они образуют, вообще говоря, бесконечную систему, для обрыва и замыкания которой целесообразно иметь определенную процедуру. Такая процедура может быть легко установлена, если учесть, что при  $l \gg 1$  в выражении для  $l$ -ой угловой гармоники электрон-электронного интеграла столкновений (2.5) первое слагаемое в правой части значительно больше всех остальных. По этой причине, начиная с некоторого  $l_{max} \gg 1$ , все уравнения для гармоник базисных функций приобретают следующий простой вид:

$$kv \left( \frac{l}{2l-1} \varphi_{l-1}^A - \frac{l+1}{2l+3} \varphi_{l+1}^A \right) = -\nu^*(v) \frac{l(l+1)}{2} \varphi_l^A, \quad l > l_{max}, \quad (4.1)$$

где использовано следующее обозначение для перенормированной частоты столкновений:

$$\nu^* = \nu_{ei} + \nu_{ee} (I_0^0 + 2J_{-1}^0/3 - I_2^0/3).$$

Записав с помощью (4.1) формальные соотношения

$$\varphi_l^A = -\frac{l}{2l-1} \frac{kv}{\nu_l(v)} \varphi_{l-1}^A, \quad \nu_l(v) = \frac{1}{2} l(l+1) \nu^*(v) - kv \frac{l+1}{2l+3} \frac{\varphi_{l+1}^A}{\varphi_l^A}, \quad (4.2)$$

приходим к рекуррентной формуле:

$$\nu_{l-1}(v) = \frac{1}{2} l(l+1) \nu^*(v) + \frac{l^2}{4l^2-1} \frac{k^2 v^2}{\nu_l(v)}. \quad (4.3)$$

Поскольку при больших значениях  $l$  выполняется условие  $\nu_l \simeq \nu_{l+1}$ , для эффективной частоты столкновений  $\nu_l$  приближенно получаем

$$\nu_l(v) = \frac{1}{2} \nu^*(v) H_l \left( \frac{kv}{\nu^*(v)} \right), \quad H_l(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{l^2}}. \quad (4.4)$$

Таким образом, для нахождения базисных функций достаточно решить конечное число уравнений (2.8) с  $l \leq l_{max}$ , подставив в последнее из них  $\varphi_{l_{max}+1}^A = -(kv/2\nu_{l_{max}}) \varphi_{l_{max}}^A$ .

Решение системы уравнений (2.8) будем искать, разлагая базисные функции  $\varphi_l^A$  по полиномам Сонина — Лагерра:

$$\varphi_l^A = \sum_{n=0}^{\infty} c_{ln}^A L_n^{1/2} \left( \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right). \quad (4.5)$$

Подставляя разложение (4.5) в исходные уравнения (2.8), получаем систему линейных уравнений для коэффициентов  $c_{ln}^A$ . Решение этой системы проведено методом матричной прогонки, адаптированным к пакету прикладных программ *Mathematica* [17]. При этом расчеты выполнялись для  $l_{max} = 10$ , когда погрешность, связанная с замыканием бесконечной системы уравнений, не превышала 1–2%.

В практическом плане использование 55–60 полиномов Сонина — Лагерра оказывается достаточным, чтобы описать электронный перенос во всей области параметра столкновительности вплоть до  $\lambda_{ei} \lesssim 10^3$ , когда результаты уже совпадают с результатами бесстолкновительного предела, отвечающими не зависящим от  $Z$  коэффициентам переноса. Такой расчет коэффициентов  $c_{ln}^A$  возможен при использовании любого современного персонального компьютера. Заметим также, что результаты теории классического сильностолкновительного переноса ( $k\lambda_{ei} < 10^{-2}$ ), как показано в работе [18], воспроизводятся с точностью 1–2% при использовании четырех-пяти полиномов Сонина — Лагерра ( $n_{max} = 4$ ) в первых двух уравнениях для симметричной и первой анизотропной добавок  $f_0$  и  $f_1$  ( $l_{max} = 2$ ).

Описание нелокального переноса базируется на использовании найденных решений для базисных функций  $\varphi_l^A$  в выражении (3.2) для первой ( $l = 1$ ) анизотропной компоненты электронной функции распределения. При этом выражения для электрического тока  $j$  и электронного теплового потока  $q_e$  имеют вид

$$j = -ie \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} dv v^3 f_1, \quad q = -iT_e \frac{4\pi}{3} \int dv v^3 \left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{v_{Te}^2} \right) f_1. \quad (4.6)$$

Поскольку функция  $f_1$ , согласно (3.2), уже выражена через гидродинамические переменные, замыкание уравнений гидродинамики, что представляет собой основную задачу теории переноса, решается в данном методе естественным образом.

Подставляя  $f_1$  из (3.2) в соотношения (4.6), мы выражаем фурье-компоненты электрического тока и теплового потока  $j$  и  $q_e$  через обобщенные гидродинамические силы: фурье-компоненты эффективного электрического поля  $E^*$ , температурный градиент  $ik\delta T$  и скорость течения плазмы  $u_i$ .

$$j = \sigma E^* + \alpha i\delta T_e + \beta_j en_e u_i, \quad q_e = -\alpha T_e E^* - \chi i\delta T_e - \beta_q n_e T_e u_i, \quad (4.7)$$

где  $\sigma$  — электропроводность,  $\alpha$  — коэффициент термотока,  $\chi$  — температуропроводность и  $\beta_{j,q}$  — коэффициенты ионного конвективного переноса. Заметим, что эти коэффициенты являются функциями волнового числа  $k$  и, следовательно, соотношения переноса представляют собой интегралы типа свертки в координатном пространстве. Коэффициенты переноса определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^2 n_e}{k^2 T_e} \frac{J_T^T}{D_{NT}^{NT}}, & \alpha &= -\frac{en_e}{k^2 T_e} \frac{J_T^N + J_T^T}{D_{NT}^{NT}}, & \beta_j &= 1 - \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}}, \\ \beta_q &= \frac{D_{NT}^{RT} + D_{NT}^{RN}}{D_{NT}^{NT}}, & \chi &= \frac{n_e}{k^2} \frac{2J_T^N + J_T^T + J_N^N}{D_{NT}^{NT}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

На первый взгляд соотношения (4.8) наряду с моментами  $J_A^B$  изотропных частей базисных функций  $\varphi_0^A$  должны также содержать подобные моменты первых анизотропных компонент  $\varphi_1^A$  как результат интегрирования в (4.6). Однако последние удается исключить с помощью непосредственного интегрирования уравнения (2.8) для  $l = 0$  с учетом сохранения числа частиц и энергии при электрон-электронных столкновениях

$$\int_0^\infty d^3 v C_{ee}^0 = 0, \quad \int_0^\infty d^3 v v^2 C_{ee}^0 = 0.$$

Уравнения переноса (4.7) отражают свойства симметрии Онсагера: коэффициент  $\alpha$  один и тот же в выражениях для электрического тока и теплового потока, что соответствует равенствам [11, 12]  $J_A^B = J_B^A$  для произвольного параметра столкновительности  $k\lambda_{ei}$ .

### 5. НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим теперь зависимости нелокальных коэффициентов переноса от параметра столкновительности. Подставляем полученные решения кинетических уравнений для базисных функций  $\varphi_0^A$  в соотношения (3.3), (4.8) и вычисляем коэффициенты переноса  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\beta_j$ ,  $\beta_q$ . Результаты этих вычислений для разных  $k\lambda_{ei}$  и  $Z$  представлены в табл. 1.

Коэффициенты продольной электрической проводимости  $\sigma$ , термотока  $\alpha$  и температуропроводности  $\chi$  в пределе сильных столкновений  $\sqrt{Z}k\lambda_{ei} \ll 1$  определяются классическими значениями [2, 3, 18]:

$$\sigma_0 = \gamma_\sigma(Z) \frac{32e^2 n_e \lambda_{ei}}{3\pi m_e v_{Te}}, \quad \alpha_0 = \gamma_\alpha(Z) \frac{16en_e \lambda_{ei}}{\pi m_e v_{Te}}, \quad \chi_0 = \gamma_\chi(Z) \frac{200n_e v_{Te} \lambda_{ei}}{3\pi}, \quad (5.1)$$



Таблица 1

Значения коэффициентов переноса  $\sigma/\sigma_0$ ,  $\alpha/\alpha_0$ ,  $\chi/\chi_0$ ,  $\beta_j$ ,  $\beta_q$  (сверху вниз)

$Z \setminus k\lambda_{ei}$	0.01	0.03	0.1	0.3	1	3	10
1	0.999	0.994	0.950	0.770	0.394	0.153	0.0516
	0.996	0.975	0.827	0.454	0.0700	-0.0179	-0.0129
	0.995	0.964	0.775	0.432	0.165	0.0686	0.0257
	0.000303	0.00268	0.0260	0.147	0.469	0.738	0.890
	0.000549	0.00471	0.0386	0.148	0.266	0.233	0.142
2	0.998	0.986	0.905	0.672	0.320	0.148	0.0363
	0.991	0.940	0.703	0.322	0.0465	0.00597	-0.0100
	0.987	0.904	0.604	0.279	0.0972	0.0414	0.0144
	0.000571	0.0049	0.0418	0.194	0.512	0.734	0.899
	0.00131	0.0104	0.0670	0.196	0.285	0.227	0.145
4	0.995	0.970	0.853	0.595	0.272	0.105	0.0334
	0.979	0.879	0.580	0.238	0.0351	-0.00466	-0.00557
	0.961	0.799	0.443	0.180	0.0592	0.0233	0.00866
	0.000923	0.00745	0.0563	0.227	0.538	0.764	0.899
	0.00251	0.0175	0.0895	0.219	0.285	0.231	0.142
8	0.990	0.949	0.805	0.541	0.243	0.0945	0.0304
	0.955	0.801	0.481	0.188	0.0301	-0.00146	-0.00352
	0.913	0.671	0.321	0.121	0.0385	0.0150	0.00565
	0.00127	0.00952	0.0658	0.246	0.552	0.770	0.901
	0.00379	0.0226	0.0980	0.218	0.271	0.218	0.135
16	0.983	0.926	0.768	0.508	0.227	0.0881	0.0284
	0.915	0.717	0.406	0.157	0.0275	0.000386	-0.00234
	0.840	0.546	0.236	0.0852	0.0266	0.0104	0.00398
	0.00150	0.0106	0.0700	0.255	0.560	0.775	0.903
	0.00460	0.0238	0.0939	0.202	0.248	0.200	0.126
32	0.971	0.900	0.737	0.486	0.217	0.0844	0.0273
	0.863	0.637	0.348	0.136	0.0258	0.00154	-0.00160
	0.747	0.436	0.177	0.0625	0.0194	0.00756	0.00298
	0.00159	0.0108	0.0703	0.256	0.563	0.779	0.905
	0.00471	0.0219	0.0828	0.178	0.221	0.180	0.115

а в коротковолновом пределе ( $k\lambda_{ei} \gg 1$ ) все они имеют подобные асимптотики, обратно пропорциональные волновому числу и не зависящие от заряда ионов [11, 12]:

$$\sigma = \frac{5e^2 n_e v_{Te}}{\sqrt{8\pi k T_e}}, \quad \alpha = -\frac{en_e v_{Te}}{\sqrt{2\pi k T_e}}, \quad \chi = \frac{4n_e v_{Te}}{\sqrt{2\pi k}}. \quad (5.2)$$

Функции  $\gamma_\sigma(Z)$ ,  $\gamma_\alpha(Z)$  и  $\gamma_\chi(Z)$  в соотношениях (5.1), равные единице при  $Z \gg 1$ , учитывают отличие точных значений классических коэффициентов переноса от соответ-

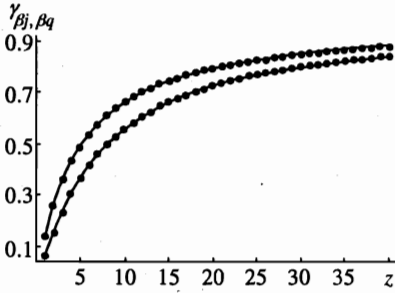


Рис. 1

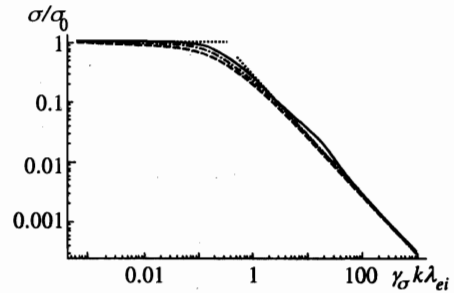


Рис. 2

**Рис. 1.** Зависимость от заряда ионов коэффициентов  $\gamma_{\beta_j}$  и  $\gamma_{\beta_q}$ , характеризующих ионный конвективный перенос в длинноволновом пределе (точки). Сплошные кривые соответствуют приближенным формулам (5.5) для  $\gamma_{\beta_j}$  (верхняя кривая) и  $\gamma_{\beta_q}$  (нижняя кривая)

**Рис. 2.** Зависимость электропроводности  $\sigma/\sigma_0$  от параметра столкновительности  $\gamma_{\sigma}(Z)k\lambda_{ei}$  для плазмы с  $Z = 1$  (сплошная кривая),  $Z = 4$  (штрих-пунктирная кривая) и  $Z = 64$  (штриховая кривая). Пунктирные линии соответствуют классической сильностолкновительной асимптотике и бесстолкновительному пределу

ствующих значений в модели лоренцевой плазмы, отвечающей полному пренебрежению электрон-электронными столкновениями. Эти функции были вычислены и протабулированы в [2, 18]. Их удобно интерполировать следующими простыми выражениями [3]

$$\gamma_{\sigma}(Z) = \frac{0.87 + Z}{2.2 + Z}, \quad \gamma_{\alpha}(Z) = \frac{0.25 + Z}{3.6 + Z}, \quad \gamma_{\chi}(Z) = \frac{0.13 + Z}{4.7 + Z}, \quad (5.3)$$

которые воспроизводят точные значения с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Ионные конвективные коэффициенты переноса  $\beta_j$  и  $\beta_q$  в уравнениях (4.7) связаны с учетом более высоких ( $l > 1$ ) угловых гармоник функции распределения электронов и не возникают в классической сильностолкновительной теории [2, 3]. В длинноволновом пределе они пропорциональны  $k^2$ :

$$\beta_j = 22(\gamma_{\beta_j}(Z)k\lambda_{ei})^2, \quad \beta_q = 87(\gamma_{\beta_q}(Z)k\lambda_{ei})^2, \quad k\lambda_{ei} \ll 1, \quad (5.4)$$

а в бесстолкновительном пределе коэффициент  $\beta_j$  стремится к 1, в то время как коэффициент  $\beta_q$  уменьшается как  $(\ln k)/k$ . Нами установлены зависимости коэффициентов  $\gamma_{\beta_j}$  и  $\gamma_{\beta_q}$  от заряда ионов. Они представлены на рис. 1 и хорошо (с погрешностью, не превышающей несколько процентов) описываются аппроксимационными формулами

$$\gamma_{\beta_j}(Z) = \frac{-0.19 + Z}{4.9 + Z}, \quad \gamma_{\beta_q}(Z) = \frac{-0.5 + Z}{7 + Z}, \quad (5.5)$$

которые также изображены на рис. 1. Заметим, что переход в формулах (5.4) к пределу  $Z \gg 1$ , отвечающему  $\gamma_{\beta_j, \beta_q} = 1$ , дает результат работы [11] в длинноволновом приближении.

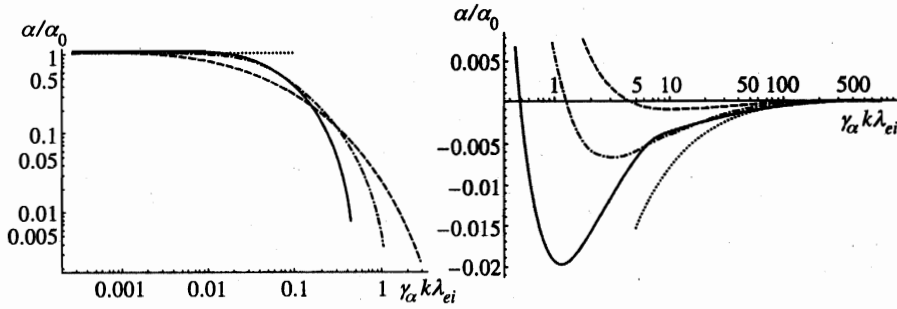


Рис. 3. Зависимость термоэлектрического коэффициента  $\alpha/\alpha_0$  от параметра столкновительности  $\gamma_\alpha(Z)k\lambda_{ei}$  для плазмы с  $Z = 1$  (сплошная кривая),  $Z = 4$  (штрих-пунктирная кривая) и  $Z = 64$  (штриховая кривая). Пунктирные линии соответствуют классической сильностолкновительной асимптотике и бесстолкновительному пределу

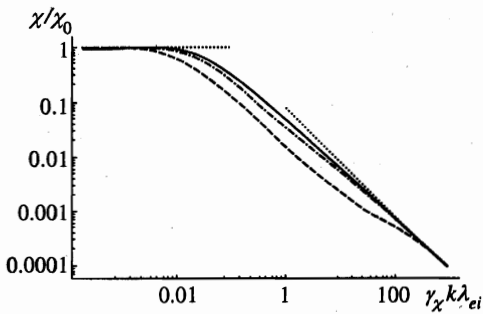


Рис. 4

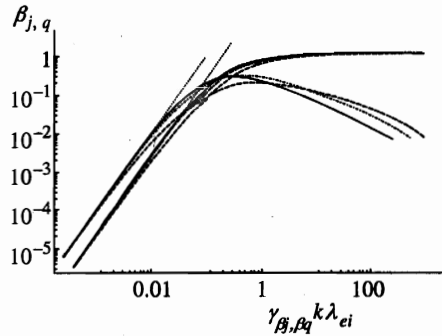


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость коэффициента температуропроводности  $\chi/\chi_0$  от параметра столкновительности  $\gamma_\chi(Z)k\lambda_{ei}$  для плазмы с  $Z = 1$  (сплошная кривая),  $Z = 4$  (штрих-пунктирная кривая) и  $Z = 64$  (штриховая кривая). Пунктирные линии соответствуют классической сильностолкновительной асимптотике и бесстолкновительному пределу

Рис. 5. Зависимость коэффициентов ионного конвективного переноса  $\beta_j$  и  $\beta_q$  от параметра столкновительности  $\gamma_{\beta_j}k\lambda_{ei}$  и  $\gamma_{\beta_q}k\lambda_{ei}$  (соответственно) для плазмы с  $Z = 1$  (сплошная кривая),  $Z = 4$  (штрих-пунктирная кривая) и  $Z = 64$  (штриховая кривая). Пунктирные линии соответствуют сильностолкновительным асимптотикам (5.4)

Полученные впервые коэффициенты переноса, представленные в табл. 1, количественно определяют нелокальные транспортные свойства плазмы в случае произвольного  $Z$ , подобно классическим коэффициентам переноса в случае локальной гидродинамики, определяющимися зависимостями  $\gamma_\sigma(Z)$ ,  $\gamma_\alpha(Z)$  и  $\gamma_\chi(Z)$ . Интересно отметить почти универсальный характер зависимости нормированной (на классические значения) электрической проводимости  $\sigma/\sigma_0$  от параметра  $\gamma_\sigma(Z)k\lambda_{ei}$ , что иллюстрируется кривыми на рис. 2. Подобные зависимости для термоэлектрического коэффициента  $\alpha/\alpha_0$  представлены на рис. 3, а для температуропроводности  $\chi/\chi_0$  — на рис. 4. Соответству-

ющие зависимости для ионных конвективных коэффициентов переноса представлены на рис. 5. В области  $1 \lesssim k\lambda_{ei}$  термотокковый коэффициент  $\alpha$  меняет знак при значении  $k$ , зависящем от  $Z$ . Например,  $\alpha$  обращается в нуль при  $k\lambda_{ei} = 1.8$  и  $4.6$  для  $Z = 1$  и  $64$ , соответственно. Положение максимума  $k_{max}$  коэффициента  $\beta_q$ , достигающего величины  $0.2-0.3$ , который находится при значении  $k\lambda_{ei} \approx 1$ , практически не зависит от зарядового числа ионов  $Z$ . Из рис. 2-4 виден монотонный выход коэффициентов электронного переноса на бесстолкновительные асимптотики, изображенные на них пунктирными линиями.

## 6. ПЕРЕНОС В БЕСТОКОВОЙ ПЛАЗМЕ И ЗАТУХАНИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Как и в классическом сильностолкновительном случае, одним из важных применений квазигидродинамических уравнений является случай отсутствия электрического тока,  $j = 0$ , который описывает квазинейтральные движения плазмы. При этом обобщенный закон Ома позволяет исключить амбиполярное электрическое поле

$$E^* = -ik\delta T_e \alpha / \sigma - en_e u_i \beta_j / \sigma \quad (6.1)$$

из выражения для электронного теплового потока, который определяется в этом случае двумя транспортными коэффициентами:

$$q_e = -\kappa ik\delta T_e - \beta n_e T_e u_i, \quad \text{где } \kappa = \chi - \alpha^2 T_e / \sigma, \quad \beta = \beta_q - e\alpha\beta_j / \sigma. \quad (6.2)$$

Значения коэффициента теплопроводности  $\kappa$  и ионного коэффициента  $\beta$  даны в табл. 2. Оба коэффициента существенно зависят от заряда ионов. При слабой неоднородности,  $k\lambda_{ei} \rightarrow 0$ , величина  $\kappa$  переходит в коэффициент теплопроводности Спитцера — Харма [18],

$$\kappa_0 = \gamma_\kappa(Z) 128 n_e v_{Te} \lambda_{ei} / 3\pi,$$

определяющийся функцией  $\gamma_\kappa(Z)$ , которая табулирована в работе [18] и хорошо интерполируется аналитическим выражением [14]

$$\gamma_\kappa(Z) = (0.24 + Z) / (4.2 + Z).$$

Ионный конвективный коэффициент  $\beta$  пренебрежимо мал в условиях классической теории переноса:

$$\beta \propto k^2 \lambda_{ei}^2.$$

Зависимость от  $Z$  коэффициента  $\gamma_\beta$ , определяющего величину ионного конвективного вклада в тепловой поток, практически (с точностью до нескольких процентов) совпадает с зависимостью  $\gamma_{\beta q}(Z)$  (5.5), т. е.  $\gamma_\beta(Z) \simeq \gamma_{\beta q}(Z)$ . В бесстолкновительном пределе  $k\lambda_{ei} \rightarrow \infty$  коэффициент теплопроводности имеет асимптотику, подобную (5.2), а коэффициент  $\beta$  выходит на константу:

$$\kappa = \frac{18 n_e v_{Te}}{5\sqrt{2\pi}k}, \quad \beta = 0.4. \quad (6.3)$$

Зависимость от длины волны коэффициента теплопроводности  $\kappa$  и коэффициента ионного переноса  $\beta$  в плазме с различными  $Z$  приведена на рис. 6. Там же изображены прямые, отвечающие сильностолкновительной и бесстолкновительной асимптотикам.

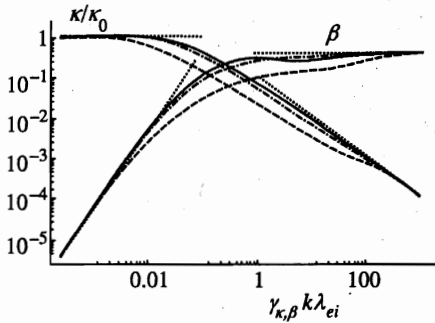


Рис. 6. Зависимости от длины волны возмущений коэффициентов теплопроводности  $\kappa/\kappa_0$  и ионного конвективного переноса  $\beta$  в бестоковой плазме с  $Z = 1$  (сплошная кривая),  $Z = 4$  (штрих-пунктирная кривая) и  $Z = 64$  (штриховая кривая). Сильностолкновительная и бесстолкновительная асимптотики изображены пунктирными прямыми

Таблица 2

Значения коэффициентов переноса  $\kappa/\kappa_0$ ,  $\beta$  и коэффициента затухания ионного звука  $\Gamma_s/kc_s$  (сверху вниз)

$Z \backslash k\lambda_{ei}$	0.01	0.03	0.1	0.3	1	3	10
1	0.995	0.965	0.791	0.482	0.211	0.0889	0.0325
	0.000337	0.00287	0.0227	0.0874	0.207	0.294	0.299
	0.265	0.0904	0.0323	0.0169	0.0119	0.0109	0.0108
2	0.987	0.906	0.626	0.327	0.132	0.0574	0.0187
	0.000800	0.00622	0.0376	0.112	0.218	0.200	0.369
	0.181	0.0632	0.0262	0.0161	0.0125	0.0116	0.0119
4	0.961	0.801	0.465	0.218	0.0841	0.0339	0.0122
	0.00152	0.0102	0.0477	0.119	0.210	0.268	0.306
	0.132	0.0497	0.0244	0.0169	0.0139	0.0130	0.0126
8	0.910	0.669	0.338	0.149	0.0559	0.0226	0.00828
	0.00227	0.0126	0.0492	0.112	0.186	0.233	0.265
	0.105	0.0454	0.0260	0.0192	0.0161	0.0148	0.0140
16	0.832	0.540	0.247	0.105	0.0389	0.0159	0.00599
	0.00271	0.0127	0.0439	0.0953	0.156	0.196	0.227
	0.0905	0.0471	0.0296	0.0229	0.0196	0.0173	0.0159
32	0.735	0.428	0.183	0.0759	0.0283	0.0117	0.00456
	0.00270	0.0110	0.0357	0.0765	0.126	0.160	0.191
	0.0872	0.0501	0.0354	0.0294	0.0239	0.0210	0.0185

Еще одним практически важным применением развитой выше теории является описание затухания ионно-звуковых волн в области промежуточных значений параметра столкновительности, когда для декремента затухания  $\Gamma_s$  неприменимы как формула сильностолкновительного приближения

$$\Gamma_s/kc_s = 3\pi c_s / 256 \gamma_\kappa(Z) v_{Te} k \lambda_{ei}$$

( $c_s = \sqrt{Z T_e / m_i}$  — ионно-звуковая скорость), так и бесстолкновительная формула

$$\Gamma_s/kc_s = \sqrt{\pi/8} c_s / v_{Te}$$

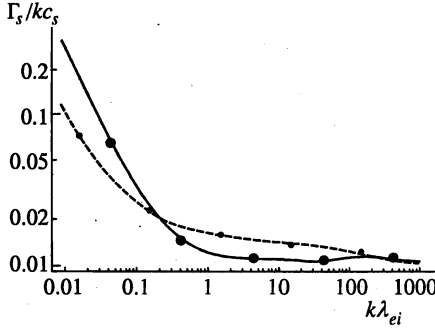


Рис. 7. Зависимость декремента ионно-звуковой волны от волнового числа для плазмы с  $A/Z = 2$  ( $A$  — атомный номер) при  $Z = 1$  (сплошная кривая) и  $Z = 8$  (штриховая кривая) в сравнении с результатами численного моделирования [14] (большие точки —  $Z = 1$ , маленькие точки —  $Z = 8$ )

отвечающая затуханию Ландау на электронах.

Чтобы описать затухание ионно-звуковых волн воспользуемся законами сохранения числа частиц и энергии, записав в предположении квазинейтральности плазмы,  $j = 0$ , следующие соотношения для пространственных фурье-компонент первых двух моментов кинетического уравнения (2.2):

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + ik u_i n_e = 0, \quad \frac{\partial \delta T_e}{\partial t} + \frac{2}{3 n_e} (ik q_e + n_e T_e u_i) = 0, \quad (6.4)$$

а также уравнение движения для ионов

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial t} = Z \frac{e}{m_i} E^* - ik c_s^2 \left( \frac{\delta n_e}{n_e} + \frac{\delta T_e}{T_e} \right) + \frac{Z}{m_i n_e} R_{ie}, \quad (6.5)$$

в котором эффективное электрическое поле  $E^*$  определяется формулой (6.1), а  $R_{ie}$  представляет собой силу трения ионов об электроны:

$$R_{ie} = im_e \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dv v^3 \nu_{ei}(v) f_1. \quad (6.6)$$

Подобно электронным потокам (4.7), сила трения может быть выражена с помощью моментов базисных функций:

$$R_{ie} = -\rho_N n_e E^* + \rho_T n_e ik \delta T_e - \rho_R m_e n_e u_i v_{Te} / \lambda_{ei},$$

$$\rho_N = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k \lambda_{ei}} \frac{J_T^N L_R^T - J_T^T L_R^N}{D_{NT}^{NT}}, \quad \rho_T = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k \lambda_{ei}} \frac{(J_T^N + J_N^N) L_R^T - (J_T^T + J_N^T) L_R^N}{D_{NT}^{NT}}, \quad (6.7)$$

$$\rho_R = \sqrt{\frac{\pi}{2}} k v_{Te} \left( \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}} L_R^N + \frac{D_{TN}^{RN}}{D_{NT}^{NT}} L_R^T - L_R^R \right), \quad L_R^A = \frac{4\pi}{n_e} v_{Te}^2 \int_0^\infty dv \varphi_1^A F_0,$$

причем в случае  $Z \gg 1$  выполняются соотношения  $\rho_N = 1 - \beta_j$  и  $\rho_T = \beta_q$ , а величина  $\rho_R$  переходит в коэффициент  $\beta_r$  из работы [11].

Рассматривая возмущения  $\propto \exp(-i\omega t)$ , из системы уравнений (6.4), (6.5) и (6.7), дополненной выражением для теплового потока (6.2), получаем дисперсионное уравнение, слабозатухающее решение которого  $\omega = kc_s - i\Gamma_s$  описывает ионно-звуковую волну с декрементом затухания, определяющимся формулой

$$\frac{\Gamma_s}{kc_s} = \frac{n_e c_s}{2k} \left[ \frac{(1-\beta)(1-\rho)}{\kappa} + \frac{e^2 \beta_j (1-\rho_N)}{T_e \sigma} + \frac{\rho_R}{n_e v_{Te} \lambda_{ei}} \right], \quad (6.8)$$

где  $\rho = \rho_T - e\alpha(1-\rho_N)/\sigma$  является аналогом коэффициента  $\beta$  (6.2) в случае плазмы с конечным  $Z$ , совпадая с последним при  $Z \gg 1$ . Значения ионно-звукового декремента даны в табл. 2, а его зависимость от волнового числа изображена на рис. 7. Там же представлены результаты, полученные путем прямого численного решения уравнения Фоккера — Планка для электронов [14], которые, как видно из рисунка, очень хорошо согласуются с нашими. Даже небольшое отклонение от немонотонного падения величины  $\Gamma_s/kc_s$  с ростом  $k$  при  $100 \lesssim k\lambda_{ei}$ , видное на рис. 2 работы [14] для  $Z = 1$ , целиком воспроизводится выражением (6.8) (см. рис. 7). Подобное изменение в монотонности падения при больших  $k\lambda_{ei}$  коэффициента электропроводности и коэффициента  $\beta$ , определяющих декремент затухания ионного звука, видно и на рис. 2, 6.

Таким образом, на основе сопоставления (6.8) с результатами прямого численного решения уравнения Фоккера — Планка [14], а также имея в виду однозначную связь (6.8) между  $\Gamma_s$  и полученными нами нелокальными коэффициентами переноса, получаем убедительное доказательство того, что развитая выше теория количественно описывает нелокальный перенос в плазме. Формула (6.8) описывает плавный переход от сильностолкновительного гидродинамического выражения для декремента затухания ионного звука к бесстолкновительному затуханию Ландау, демонстрируя полную аналогию предложенных квазигидродинамических уравнений кинетической модели.

## 7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные выше исследования показали, что существует широкая область значений параметра столкновительности  $\lambda_{ei}/L$  и  $Z$ , в которой для описания процессов переноса в плазме не могут быть использованы известные результаты сильностолкновительного и бесстолкновительного пределов, причем эта область тем шире, чем больше зарядовое число. В меньшей степени отклонения от известных предельных случаев возникают для электрической проводимости, а сильнее всего они проявляются в коэффициентах температуропроводности и теплопроводности. Можно записать следующее приближенное условие для параметра столкновительности, определяющее область, в которой возникает существенное отклонение коэффициента теплопроводности от значений, предсказываемых классическими столкновительной и бесстолкновительной теориями:

$$\frac{1}{20\sqrt{Z}} \lesssim \frac{\lambda_{ei}}{L} \lesssim 20\sqrt{Z}. \quad (7.1)$$

Для электрической проводимости эта область несколько меньше:  $1/5\sqrt{Z} \lesssim \lambda_{ei}/L \lesssim 5\sqrt{Z}$ . Заметим также, что в силу того что сильностолкновительный и бесстолкновительный пределы для термотокового коэффициента дают разные знаки, даже грубая его оценка в переходной области с помощью интерполяции известных результатов таких предельных случаев оказывается невозможной.

Для современных термоядерных исследований режим промежуточной столкновительности, для которого классические представления о переносе неприменимы, практически типичен. Легко убедиться [15], что в пристеночной плазме токамака условие (7.1), как правило, выполняется.

Еще больше примеров можно привести для случая термоядерных исследований на основе лазеров в плазме с температурой электронов от одного до нескольких кэВ. Так, например, типичная длина пробега электрона в области критической плотности для неодимового лазера, облучающего твердотельную мишень, составляет  $\sim 10^{-3}$  см, в то время как характерный пространственный масштаб уменьшения электронной температуры в глубь мишени практически всегда меньше  $10^{-2}$  см. Даже в экспериментах с ультракороткими лазерными импульсами, когда плазма не успевает разлететься и ее типичной плотностью является величина, близкая к плотности твердого тела, условие (7.1), тем не менее, может выполняться, поскольку сильное скинирование лазерного поля обуславливает весьма большие градиенты,  $L \sim 10^{-5}$  см. Еще один интересный пример возникновения нелокального теплопереноса связан с плазмой с большим  $Z$ . Как отмечалось выше, несмотря на то что длина пробега электрона падает с увеличением  $Z$ , отклонение коэффициента теплопроводности от спитцеровского значения [18] наступает раньше именно для плазмы с большей кратностью ионизации ионов. По этой причине даже в случае достаточно плавных неоднородностей  $L > 10^{-2}$  см горячая плазма ( $T_e \sim 3\text{--}5$  кэВ) «hohlraums» мишеней ( $n_e \sim 10^{21}$  см $^{-3}$ ) должна рассматриваться как существенно нелокальная среда, на что указывалось в работе [22].

В настоящее время решение проблемы управляемого лазерного термоядерного синтеза (УЛТС) связывается с использованием различных приемов сглаживания лазерного пучка [23]. При этом его структура характеризуется флуктуирующими неоднородностями интенсивности лазерного поля. Соответствующая типичная корреляционная длина (радиус горячих пятен) составляет несколько длин волн лазерного излучения и сопоставима по порядку величины с длиной свободного пробега электронов. Таким образом, для плазмы, взаимодействующей с таким спеклованным лазерным пучком, характерен режим промежуточной столкновительности, существенно отличающийся от столкновительного и бесстолкновительного режимов. Ясно, что релаксация горячих пятен и генерация нетепловых флуктуаций в такой плазме должны носить существенно нелокальный характер [24].

Наконец, эффекты нелокальности следует учитывать и в параметрических процессах при взаимодействии лазерного излучения с плазмой. Наиболее существенно это для филаментации и вынужденного рассеяния Манделъштама — Бриллюэна. Так, например, применительно к филаментационной неустойчивости было показано [25], что использование классической теплопроводности необоснованно снижает уровень филаментации и приводит к недооценке ее последствий для УЛТС. По этой причине требуется количественное описание нелокальной теплопроводности лазерной плазмы.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог изложенному выше, отметим, что, подобно тому как более тридцати лет назад была сформулирована последовательная количественная теория электронного переноса в сильностолкновительной плазме, в данной работе развита подобная теория, позволяющая количественно описать нелокальный перенос в условиях произвольного соотношения между длиной свободного пробега частиц и характерным пространственным масштабом потенциальных возмущений. Обобщение на случай вихревых возмущений очевидно и может быть выполнено в соответствии с методикой, изложенной в работе [12].



Определенной «платой» за количественное описание всех нелокальных коэффициентов переноса является приближение малых возмущений. Однако можно ожидать, что область применимости теории окажется более широкой, чем предписывается заложенными ограничениями. В частности, в работе [19] были сопоставлены результаты прямого численного решения кинетического уравнения и квазигидродинамических уравнений с нелокальной теплопроводностью, полученные ранее численно в работе [25] для малых возмущений. При решении задачи об обратнотормозном нагреве плазмы лазерным излучением было обнаружено, что результаты кинетического и квазигидродинамического подходов находятся в хорошем согласии также и для реальных (не малых) изменений плотности и температуры. Отметим также, что сопоставление нелокальной теории теплопереноса для малых возмущений с результатами эксперимента [21] (где возмущения были не малыми) также показало их хорошее соответствие. Это позволяет надеяться на возможность практического использования полученных выше нелокальных уравнений переноса для моделирования мелкомасштабных процессов в плазме. Подчеркнем еще раз, что полученные квазигидродинамические уравнения нелокальной гидродинамики полностью эквивалентны кинетическому описанию и пригодны для изучения переноса в широкой области параметра столкновительности — от сильностолкновительной области классического переноса до бесстолкновительного предела.

Представленная теория сопоставлена с численными кинетическими расчетами [14] и показывает хорошее количественное соответствие последним. Тем самым демонстрируются преимущества развитой нами новой модели нелокального переноса, не требующей для ее практической реализации, в отличие от кинетических расчетов, больших численных ресурсов.

Выведенные уравнения нелокальной квазигидродинамики могут быть использованы для изучения плазменных неустойчивостей и флуктуаций, для которых важны эффекты переноса. Существенным результатом данной теории является найденное выражение для декремента затухания ионного звука, пригодное для использования при произвольных значениях зарядового числа плазмы и параметра столкновительности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект № 310-96) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16165-а).

## Литература

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. С. И. Брагинский, *Вопросы теории плазмы*, вып. 1, 183 (1965).
3. R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas*, 1, Elsevier, Amsterdam (1988).
4. V. Yu. Bychenkov and V. T. Tikhonchuk, in: *Nuclear Fusion by Inertial Confinement*, ed. by G. Velarde, Y. Ronen, and J. M. Martinez-Val, CRC Press (1993).
5. Z. Chang and J. D. Callen, *Phys. Fluids B* 4, 1167 (1992).
6. P. B. Snyder, G. W. Hammett, and W. Dorland, *Phys. Plasmas* 4, 3974 (1997).
7. E. Furkal, A. I. Smolyakov, and A. Hirose, *Bull. Am. Phys. Soc.* 42, 1822 (1997).
8. J. F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont, *Phys. Rev. Lett.* 51, 1664 (1983).
9. J. R. Albritton, E. A. Williams, I. B. Bernstein, and K. P. Swartz, *Phys. Rev. Lett.* 57, 1887 (1986).
10. S. I. Krashennnikov, *Phys. Fluids B* 5, 74 (1992).

11. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. T. Tikhonchuk, and A. V. Brantov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4405 (1995).
12. А. В. Брантов, В. Ю. Быченков, В. Т. Тихончук, В. Розмус, *ЖЭТФ* **110**, 1301 (1996).
13. J. P. Matte and J. Virmont, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1936 (1982)
14. E. M. Epperlein, *Phys. Plasmas* **1**, 109 (1994).
15. O. V. Batishchev, S. I. Krasheninnikov, P. J. Catto, A. A. Batishcheva, D. J. Sigmar, X. Q. Xu, J. A. Byers, T. D. Rognlien, R. H. Cohen, M. M. Shoucri, and I. P. Shkarofskii, *Phys. Plasmas* **4**, 1672 (1997).
16. I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, and M. A. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, MA (1966).
17. S. Wolfram, *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Redwood City (1988).
18. L. Spitzer and R. Härm, *Phys. Rev.* **89**, 977 (1953).
19. E. Vidal, J. P. Matte, M. Casanova, and O. Larroche, *Phys. Plasmas* **2**, 1412 (1995).
20. E. M. Epperlein, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2145 (1990).
21. D. S. Montgomery, O. N. Landen, R. P. Drake, K. G. Estabrook, H. A. Baldis, S. H. Batha, K. S. Bradley, and R. J. Procassini, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2055 (1994).
22. J. S. De Groot, K. G. Estabrook, S. H. Glenzer, W. L. Kruer, and J. P. Matte, *Bull. Am. Phys. Soc.* **42**, 1993 (1997).
23. A. J. Schmitt, *Phys. Fluids* **31**, 3079 (1988).
24. V. K. Senecha, A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. E* **57**, 978 (1998).
25. E. M. Epperlein and R. W. Short, *Phys. Fluids B* **4**, 2211 (1992).