

КОНТИНУАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АНОМАЛЬНОЙ ДИФфуЗИИ ПО ГРЕБЕШКОВОЙ СТРУКТУРЕ

*И. А. Лубашевский**, *А. А. Землянов*

Институт общей физики Российской академии наук

117942, Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

117899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 декабря 1997 г.

Рассматривается аномальная диффузия по гребешковой структуре, состоящей из одномерного хребта и боковых отростков (ребер) случайной длины. Определенной классификацией траекторий случайных блужданий исходная задача сводится к анализу классической диффузии по хребту, где, однако, время этого процесса является случайной величиной. Ее распределение задается свойствами блуждания диффундирующих частиц по ребрам. Доказывается возможность применения теории среднего поля в таком представлении, и получено уравнение для функции Грина с частными производными дробного порядка. Анализируются характерные особенности распространения частиц по гребешковой структуре. Получена модель эффективной однородной среды, где диффузия описывается уравнением с дробной производной по времени и начальным условием в виде интеграла дробного порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузия в гетерогенных средах, содержащих неоднородности различных масштабов, в частности, на фракталах, обладает аномальными свойствами (для обзора см. [1–3]). Например, в таких средах без выделенного направления средний квадрат смещения броуновской частицы $\langle x^2 \rangle$ зависит от времени t как $\langle x^2 \rangle \propto t^\alpha$, где $\alpha \neq 1$. К настоящему времени отсутствует единое общее описание аномального транспорта, и поэтому различные модели неоднородных сред исследуются индивидуально. Одними из типичных представителей таких сред являются перколяционные кластеры и кластеры, возникающие в процессе диффузионно-ограниченной агрегации.

С точки зрения диффузионного переноса, такой кластер можно представить как состоящий из бесконечно протяженного хребта и большого количества боковых отростков. Блуждание диффундирующей частицы по хребту кластера главным образом определяет ее перемещение в пространстве, в то время как боковые отростки служат своеобразными ловушками, где частица проводит основное время (см., например, [1–3]). Разветвленность хребта этих кластеров невелика [4], поэтому для описания диффузии в таких системах в работе [5, 6] была предложена модель гребешковой структуры с боковыми отростками (ребрами) случайной длины (рис. 1). При этом, учитывая свойства перколяционных кластеров, рассматриваются и такие распределения, для которых все моменты распределения длин ребер расходятся.

* E-mail: ialub@fpl.gpi.ru

Для гребешковой структуры с ребрами одинаковой длины диффузия вдоль хребта описывается классической закономерностью $\langle x^2 \rangle \propto t$, если длина отростков мала, и является аномальной, $\langle x^2 \rangle \propto t^{1/2}$, при их бесконечной длине [7, 8]. Естественно ожидать, что для гребешковой структуры с ребрами случайной длины зависимость $\langle x^2(t) \rangle$ также будет степенной с показателем $\alpha \in (1/2, 1)$. В работах [9, 10] фактически в приближении классической теории среднего поля были исследованы свойства аномального транспорта. В частности, было найдено, что $\alpha = \gamma/2$ для степенного распределения $f(l) \propto l^{-\gamma}$ длин ребер l при $1 < \gamma < 2$. Если все моменты распределения $f(l)$ сходятся, то диффузия по гребешковой структуре описывается классическими закономерностями [11]. В аналогичном приближении в работах [12, 13] были исследованы свойства такой диффузии под действием топологического поля дрейфа.

В рамках решеточного описания [14, 15] методом выделения лидирующих членов по t была найдена величина α для экспоненциального и степенного распределений длин боковых отростков в отсутствие и при наличии поля дрейфа вдоль хребта. В частности, при наличии поля дрейфа $\alpha = \gamma$ для такого степенного распределения длин ребер. В работе [16] эта задача изучена в присутствии поля дрейфа вдоль ребер. Для решеточной модели также была найдена функция Грина в отсутствие поля дрейфа с использованием, правда, без какого-либо обоснования модификации метода среднего поля [17].

В настоящей работе мы развиваем континуальное описание диффузионного транспорта по гребешковой структуре. Используя определенную классификацию траекторий случайного блуждания, мы сводим начальную задачу к классическому описанию блужданий по хребту, где, однако, время этого блуждания является случайной величиной. Ее распределение задается блужданием диффундирующих частиц по ребрам. В итоге получается модель однородной среды с аномальными свойствами. В частности, диффузия в этой среде описывается уравнением с дробной производной по времени с соответствующим начальным условием в виде интеграла дробного порядка.

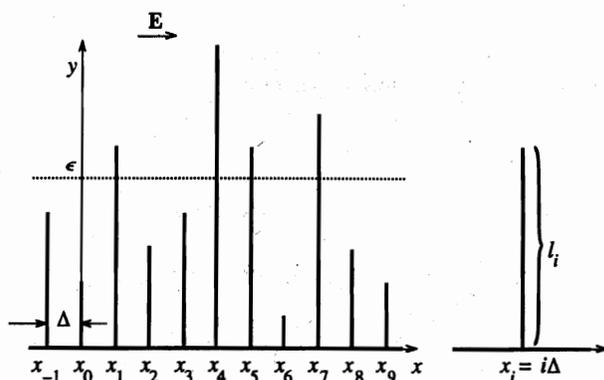


Рис. 1. Модель гребешковой структуры: E — поле дрейфа; точки — линия «наблюдения» $y = \epsilon$; x_i — координаты ребер; l_i — длины ребер

2. МОДЕЛЬ

Пусть ось x представляет хребет рассматриваемой гребешковой структуры (рис. 1). Перпендикулярно к ней (параллельно оси y) присоединены ребра $\{i\}$ ($i \in \mathbb{Z}$), которые отстоят друг от друга на расстояние Δ и длины которых $\{l_i\}$ являются случайно независимыми величинами. Их распределение $f(l)$ описывается степенным законом:

$$f(l) = (\gamma - 1) \frac{l_0^{\gamma-1}}{l^\gamma}, \quad (2.1)$$

где $\gamma \in (1, 2)$ — показатель степени, а $l_0 \sim \Delta$ — минимальная длина ребер. Функция (2.1) отвечает условию нормировки и расходимости всех моментов:

$$\int_{l_0}^{\infty} f(l) dl = 1, \quad \int_{l_0}^{\infty} l^n f(l) dl = \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что, как будет видно из дальнейшего, обеспечивает возможность описания аномальной диффузии в терминах однородной среды.

Закон диффузии броуновских частиц по такой структуре задается следующими уравнениями: для хребта вне точек сочленения с ребрами $\{x_i = i\Delta\}$, т. е. при $x \neq x_i$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.2)$$

и для i -го ребра

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Здесь $c(x, t)$ — концентрация диффундирующих частиц на хребте, $C_i(y, t)$ — их концентрация на ребре i , D — коэффициент диффузии, μ — подвижность и, кроме того, предполагаем, что вдоль оси x действует однородное поле E . В точках сопряжения $\{x_i\}$ концентрация частиц и их потоки по хребту и ребрам, соответственно

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} + \mu E c, \quad J_i = -D \frac{\partial C_i}{\partial y},$$

отвечают условиям непрерывности

$$c(x_i, t) = C_i(0, t), \quad j|_{x=x_i-0} = j|_{x=x_i+0} + J|_{y=0}. \quad (2.4)$$

На концах ребер выполняется условие отражения частиц:

$$\left. \frac{\partial C_i}{\partial y} \right|_{y=l_i} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.2)–(2.5) являются полным микроскопическим описанием диффузии по гребешковой структуре.

Для возможности перехода к континуальному пределу параметр Δ должен быть малой величиной, а именно, полагаем

$$\Delta^2 \ll Dt \quad \text{и} \quad \mu E \Delta \ll D. \quad (2.6)$$

Первое неравенство означает, что характерная диффузионная длина при рассматриваемых временах t существенно превышает расстояние между ребрами Δ , а второе — малость влияния поля дрейфа E на масштабах Δ .

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФУНДИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Ниже для простоты проанализируем диффузию частиц по хребту, если в начальный момент времени $t = 0$ все они были локализованы на хребте с плотностью $c_0(x)$. В этом случае решение задачи (2.2)–(2.5) сводится к нахождению функции Грина $G(x, x'|t)$, задающей значение концентрации $c(x, t)$ в момент времени t согласно формуле

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x'|t) c_0(x') dx'. \quad (3.1)$$

Функция Грина

$$G(x, x'|t) = G(x, y, t|x', 0)|_{y=0}$$

является решением данной задачи при δ -образном начальном условии и может быть истолкована как плотность вероятности обнаружения диффундирующей частицы в точке x в момент времени t при условии, что в начальный момент $t = 0$ она находилась в точке x' . В эту вероятность вносят вклад все возможные траектории частицы, которые начинаются в точке x' и через время t достигают точку x . При этом они являются независимыми вследствие линейности системы уравнений (2.2)–(2.5). Это позволяет представить функцию Грина в виде интеграла по траекториям:

$$G(x, x'|t) = \int_{\substack{x(0)=x' \\ y(0)=0}}^{\substack{x(t)=x \\ y(t)=0}} \mathcal{D}\{x(t'), y(t')\} \mathcal{P}_{tr}, \quad (3.2)$$

где \mathcal{P}_{tr} — статистический вес траектории $\{x(t'), y(t')\}_{t'=0}^{t'=t}$, а $\mathcal{D}\{x(t'), y(t')\}$ — их винеровская мера.

Построим следующую классификацию траекторий (рис. 2). Введем линию «наблюдения» — горизонтальную прямую $y = \epsilon$, где ϵ — некоторая величина, отвечающая неравенствам

$$\Delta \sim l_0 \ll \epsilon \ll \sqrt{Dt}, \Delta \left(\frac{D}{\mu E \Delta} \right)^{2/\gamma} \quad (3.3)$$

(смысл последнего ограничения на ϵ будет виден из дальнейшего). Первый фрагмент траектории, $P^{in}\{x', i_1, \tau_1\}$, начинается в точке x' и отвечает блужданиям частицы внутри области $\Gamma_\epsilon = \{(x, y) : y \in [0, \epsilon]\}$, т. е. без пересечения линии наблюдения. Он завершается точкой (x_{i_1}, ϵ) в момент времени τ_1 , когда частица первый раз пересекает линию наблюдения. Следующий фрагмент траектории, $P^{out}\{i_1, t_1\}$, соответствуют блужданиям частицы по ребру i_1 без соприкосновения с осью x . Он завершается через время t_1 , когда частица первый раз достигает точки x_{i_1} . Последующая структура траектории формируется из $N - 1$ последовательных повторений этой пары фрагментов блуждания по гребешковой структуре внутри области Γ_ϵ и по ребрам без касания хребта:

$$P^{in}\{i_1, i_2, \tau_2\}; P^{out}\{i_2, t_2\}; \dots; P^{in}\{i_{N-1}, i_N, \tau_N\}; P^{out}\{i_N, t_N\}$$

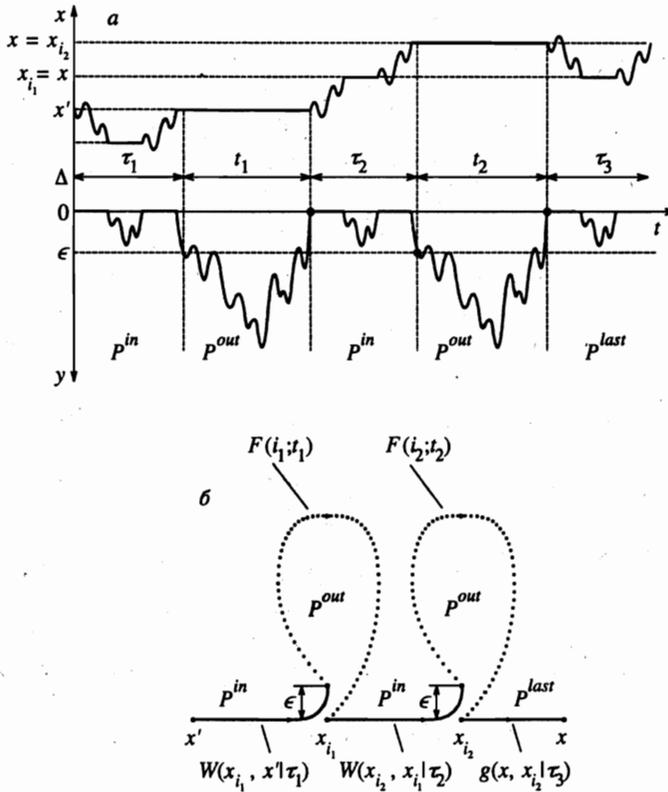


Рис. 2. Характерные фрагменты траектории блуждающей частицы, которая в начальный момент времени $t' = 0$ находилась в точке x' и в момент времени t достигла точки x : a — схематичное изображение этой траектории в пространстве $\{x, y\}$; b — ее диаграмма. Для простоты изображена траектория, содержащая пять характерных фрагментов блуждающей частицы по хребту и по ребрам гребешковой структуры

$(P^{in}\{i_{k-1}, i_k, \tau_k\} \equiv P^{in}\{x_{i_{k-1}}, i_k, \tau_k\})$ за исключением последнего фрагмента $P^{last}\{i_N, x, \tau_{N+1}\}$. Последний фрагмент начинается в точке x_{i_N} и представляет собой блуждание длительностью τ_{N+1} внутри области Γ_ϵ , которое завершается в точке x на оси x .

Данная классификация позволяет сначала выполнить в интеграле (3.2) интегрирование, полагая параметры

$$N, \{i_k, \tau_k, t_k\}_{k=1}^{k=N}, \tau_{N+1}$$

заданными, а затем проинтегрировать полученный результат по этим параметрам (по i_k и N просуммировать). Таким образом получим

$$G(x, x' | t) = g(x, x' | t) + \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^t d\tau_{i_{N+1}} \sum_{i_N=-\infty}^{\infty} g(x, x_{i_N} | \tau_{i_{N+1}}) \Phi_N(x_{i_N}, x' | t - \tau_{i_{N+1}}), \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_N(x_{i_N}, x'|t) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_N=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^N d\tau_k dt_k \times$$

$$\times \delta\left[t - \sum_{j=1}^N (\tau_j + t_j)\right] W(x_{i_k}, x_{i_{k-1}}|\tau_k) F(i_k, t_k). \tag{3.5}$$

Здесь $g(x, x'|t)$ — вероятность достижения точки x из точки x' через время t без касания линии наблюдения, причем эта же функция $g(x, x_{i_N}|\tau_{N+1})$ описывает последний фрагмент траекторий при $N \geq 1$. Множитель $W(x_{i_k}, x_{i_{k-1}}|\tau_k)$ есть вероятность первого достижения линии наблюдения в точке (x_{i_k}, ϵ) через время τ_k , если в начальный момент частица находилась в точке $x_{i_{k-1}}$, причем в функции $W(x_{i_1}, x_{i_0}|\tau_1)$ символ x_{i_0} формально обозначает начальную точку траектории: $x_{i_0} = x'$. Множитель $F(i_k, t_k)$ есть вероятность первого достижения оси x через время t_k при блуждании по ребру i_k для частицы, находящейся в начальный момент в точке $y = \epsilon$. Сопоставление данных множителей и фрагментов траектории проиллюстрированы на рис. 2а. Рисунок 3 представляет уравнения (3.4), (3.5) в виде диаграмм.

Так как рассматриваемая задача является трансляционно-инвариантной относительно времени, удобно перейти к преобразованию Лапласа:

$$(\dots)(s) = \int_0^{\infty} dt' e^{-st'} (\dots)(t'),$$

где полагаем аргумент $s \sim 1/t$. Это позволяет переписать формулы (3.4) и (3.5) в виде

$$G(x, x'|s) = g(x, x'|s) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{i_N=-\infty}^{\infty} g(x, x_{i_N}|s) \Phi_N(x_{i_N}, x'|s), \tag{3.6}$$

$$\Phi_N(x_{i_N}, x'|s) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_{N-1}=-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^N W(x_{i_k}, x_{i_{k-1}}|s) F(i_k, s). \tag{3.7}$$

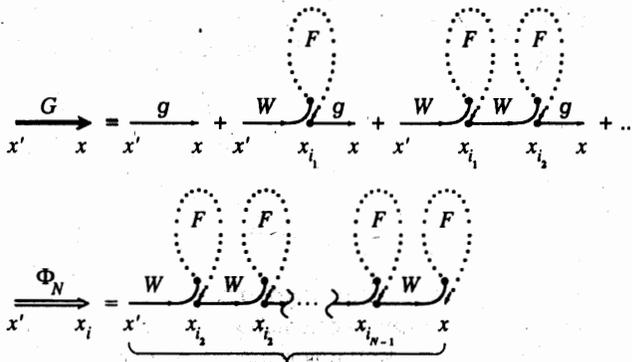


Рис. 3. Диаграмма уравнений (3.4), (3.5) для функции Грина $G(x, x')$ и диаграммное представление функции $\Phi(x_i, x)$ (соотношения (3.5), (3.7)). Скобкой обозначена свертка $\{W * F\}$ из N множителей

Для замыкания данного описания необходимы соотношения, задающие основные множители в выражениях (3.6) и (3.7), чему и будет посвящена остальная часть этого раздела.

3.1. Функция Грина элементарного фрагмента P^{out}

В Приложении А получено общее выражение для образа Лапласа $F(i, s)$ вероятности первого достижения оси x через время t при блуждании по ребру i для частицы, находящейся в начальный момент в точке $y = \epsilon$. В рамках принятых допущений относительно величины ϵ (см. неравенство (3.3)) с точностью до первого порядка малости по параметру $\epsilon\sqrt{s/D}$ это выражение сводится к

$$F(i, s) = 1 - \epsilon\sqrt{\frac{s}{D}} \operatorname{th} \left(l_i \sqrt{\frac{s}{D}} \right), \quad (3.8)$$

которое является искомым в данной части работы.

3.2. Функции Грина элементарного фрагмента P^{in}

Рассмотрим вначале образ Лапласа $g(x, x'|s)$ вероятности достижения точки x из точки x' за время t при блуждании частицы внутри области Γ_ϵ . Такое блуждание сопровождается не только перемещением частицы вдоль хребта, но также и посещением точек близлежащих ребер. Этот процесс описывается соотношениями (2.2) — (2.5) и нулевым граничным условием $C_i(\epsilon, s) = 0$ в точке $y = \epsilon$ для ребер, длины которых $l_i > \epsilon$. В рамках данного описания для функции $g(x, x'|s)$ в Приложении В (см. (В.10)) получено следующее уравнение:

$$sg = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial g}{\partial x} - \eta(x)g + \delta(x - x'), \quad (3.9)$$

где величина

$$\eta(x) = \sqrt{sD} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(x - x_i) \right] \quad (3.10)$$

описывает темп ухода блуждающих частиц с хребта, а коэффициенты b_i являются случайными числами и задаются соотношениями (В.8), которые в пределе (3.3) могут быть переписаны как

$$b_i = \begin{cases} l_i \sqrt{\frac{s}{D}}, & \text{если } l_i \leq \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{D}{s}} + \frac{\epsilon}{3} \sqrt{\frac{s}{D}}, & \text{если } l_i > \epsilon. \end{cases} \quad (3.11)$$

И наконец, для замыкания задачи необходимо выражение для вероятности $W(x_i, x'|t)$ первого достижения линии наблюдения $y = \epsilon$ на ребре i через время t при старте частицы на хребте в точке x' . Как показано в Приложении В (см. (В.12)), образ Лапласа этой функции в пределе (3.3) задается формулой

$$W(x_i, x'|s) = \frac{D}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon^2 s}{6D} \right) g(x_i, x'|s) \theta_i^\epsilon, \quad (3.12)$$

где $\theta_i^\epsilon = 1$ при $l_i > \epsilon$ и $\theta_i^\epsilon = 0$ при $l_i \leq \epsilon$.

Соотношения (3.6)–(3.9), (3.12) являются полным описанием рассматриваемой задачи диффузии по гребешковой структуре при заданном распределении длин ребер $\{l_i\}$. Последующий анализ будет связан с исследованием характерных свойств такой диффузии при усреднении по ансамблю $\{l_i\}$.

Как видно из полученных выражений, функция Грина $g(x, x'|s)$ играет существенную роль в излагаемом подходе. Поэтому перед тем как перейти к дальнейшему построению, рассмотрим ее характерные свойства.

Выделим в функции $g(x, x'|s)$ ее регулярную (т. е. усредненную по ансамблю $\{l_i\}$) часть $\bar{g}(x, x'|s)$ и случайную составляющую $\delta g(x, x'|s)$:

$$g(x, x'|s) = \bar{g}(x, x'|s) + \delta g(x, x'|s). \quad (3.13)$$

В нулевом приближении по Δ/ϵ функция $\bar{g}(x, x'|s)$ удовлетворяет уравнению (3.9) при замене величины $\eta(x)$ на ее усредненное значение $\bar{\eta}$ и игнорировании малоамплитудных вариаций $\bar{g}(x, x'|s)$ на длине Δ , обусловленных дискретным положением ребер. В этом приближении (см. Приложение В) для функции $\bar{g}(x, x'|s)$ имеем

$$s\Omega_\epsilon \bar{g} = D \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} - \frac{2D}{\ell_\epsilon^2} \bar{g} + \delta(x - x'), \quad (3.14)$$

где

$$\Omega_\epsilon = 1 + \frac{(2\gamma - 1)l_0}{3(2 - \gamma)\Delta} \left(\frac{\epsilon}{l_0}\right)^{2-\gamma} \quad (3.15)$$

— безразмерная емкость слоя Γ_ϵ , а

$$\ell_\epsilon = \sqrt{2\Delta l_0} \left(\frac{\epsilon}{l_0}\right)^{\gamma/2} \quad (3.16)$$

— среднеквадратичная длина элементарного фрагмента P^{in} . Из (3.14) также следует, что среднее время τ_ϵ длительности фрагмента P^{in} и соответствующее ему среднее время τ_ϵ^b пребывания частицы на хребте есть

$$\tau_\epsilon = \frac{\Omega_\epsilon \ell_\epsilon^2}{2D} \simeq \frac{2\gamma - 1}{3(2 - \gamma)} \frac{\epsilon^2}{D}, \quad \tau_\epsilon^b = \frac{\ell_\epsilon^2}{2D} = \frac{\sqrt{\Delta l_0}}{\sqrt{2D}} \left(\frac{\epsilon}{l_0}\right)^{\gamma/2}. \quad (3.17)$$

В этом же приближении случайная составляющая $\delta g(x, x'|s)$ задается выражением (Приложение В, формула (B.29))

$$\delta g(x, x'|s) = -\sqrt{sD} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta b_i \bar{g}(x - x_i|s) \bar{g}(x_i - x'|s), \quad (3.18)$$

где $\delta b_i = b_i - \langle b \rangle$ — случайная компонента коэффициента b_i . Тогда в качестве меры влияния случайных неоднородностей геометрии гребешковой структуры на блуждания частиц внутри слоя Γ_ϵ можно использовать отношение Фурье компонент δg_k и \bar{g}_k функций δg и \bar{g} . Согласно формуле (B.33),

$$\frac{\langle |\delta g_k|^2 \rangle}{|\bar{g}_k|^2} \sim \left(\frac{l_0}{\epsilon}\right)^{(2-\gamma)/2} \ll 1, \tag{3.19}$$

тем самым при $\gamma < 2$ и $\epsilon \gg l_0 \sim \Delta$ величина $\delta g(x, x'|s)$ мала по сравнению с регулярной частью $\bar{g}(x, x'|s)$, и в первом приближении функцию Грина $g(x, x'|s)$ можно отождествлять с ее регулярной частью. Отметим, что данное утверждение фактически следует из условия, что на характерной длине элементарного фрагмента P^{in} содержится большое количество ребер с длинами $l_i > \epsilon$. А именно, их число

$$N_\epsilon \sim \frac{\ell_\epsilon}{\Delta} P_\epsilon \sim \left(\frac{\epsilon}{l_0}\right)^{(2-\gamma)/2} \gg 1, \tag{3.20}$$

где

$$P_\epsilon = \int_\epsilon^\infty dl f(l) = \left(\frac{l_0}{\epsilon}\right)^{\gamma-1} \tag{3.21}$$

— вероятность обнаружения ребра с длиной $l_i > \epsilon$.

В силу (3.3) и (3.17) характерная траектория случайных блужданий диффундирующих частиц включает в себя большое количество, $N \gg 1$, элементарных фрагментов P^{in} и P^{out} . Тем самым функция Грина $\Phi_N(x_i, x'|s)$ после соответствующей регуляризации будет мало изменяться при вариациях аргументов x_i, x' не только на масштабах порядка Δ , но и порядка ℓ_ϵ . Это позволит рассматривать такую функцию Грина $\Phi_N(x_i, x'|s)$ как непрерывную функцию своих аргументов, что и дает возможность описания диффузии по гребешковой структуре в рамках эффективной однородной среды с аномальными свойствами. Построению этой процедуры регуляризации и выводу соответствующего дифференциального уравнения для регуляризованной функции Грина и посвящен следующий параграф.

4. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА $\Phi_N(x, x'|s)$

Представим соотношение (3.7) в виде уравнения типа Смолуховского–Колмогорова, которое связывает функции $\Phi_{N+1}(x, x'|s)$ и $\Phi_N(x, x'|s)$:

$$\Phi_{N+1}(x_i, x'|s) = F(i, s) \sum_{j=-\infty}^\infty W(x_i, x_j|s) \Phi_N(x_j, x'|s), \tag{4.1}$$

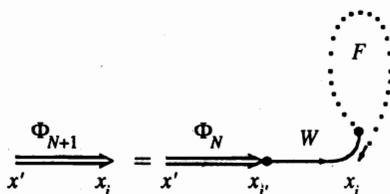


Рис. 4. Диаграмма уравнения (4.1) для функции Грина $\Phi_N(x_i, x')$. Большие точки на диаграмме обозначают суммирование и интегрирование по соответствующим аргументам

что соответствует диаграмме, изображенной на рис. 4. Рассмотрим далее большие значения аргумента $N \gg 1$. В этом случае естественно ожидать, что функции $\Phi_{N+1}(x_i, x'|s)$ и $\Phi_N(x_i, x'|s)$ будут слабо отличаться друг от друга, при этом можно считать аргумент N непрерывным и полагать

$$\Phi_{N+1}(x_i, x'|s) - \Phi_N(x_i, x'|s) = \frac{\partial \Phi_N(x_i, x'|s)}{\partial N}.$$

Однако пространственные неоднородности $\Phi_N(x_i, x'|s)$ остаются существенными при изменении координаты x_i на масштабах Δ , так как при $l_i < \epsilon$ функция $\Phi_N(x_i, x'|s) \equiv 0$ в силу (3.12). Тем не менее эти неоднородности не играют заметной роли, так как искомая функция Грина $G(x, x'|s)$ связана с функцией $\Phi_N(x_i, x'|s)$ интегральным соотношением (3.6) и ядро этой связи $g(x, x'|s)$ имеет область локализации шириной порядка ℓ_ϵ . Сама функция $g(x, x'|s)$ слабо изменяется при вариации аргумента x' на масштабах Δ , и область ее локализации содержит большое количество ребер с длинами $l_i > \epsilon$ (см. (3.20)). Поэтому имеет смысл сгладить функцию $\Phi_N(x_i, x'|s)$ по аргументу x_i на масштабах меньших ℓ_ϵ и рассматривать ее как непрерывную функцию аргументов $x = x_i, x'$ и $t_b \equiv N\tau_\epsilon^b$:

$$\Phi_N(x_i, x'|s) \rightarrow \Phi(x, x'|t_b, s).$$

Использование аргумента t_b оправдано тем, что его величина есть среднее время пребывания блуждающей частицы на хребте гребешковой структуры.

В Приложении С построена такая процедура сглаживания на основе фурье-преобразования для волновых чисел $k \ll 1/\ell_\epsilon$. Там же показано, что, следуя фактически методу Понтрягина [18], уравнение Смолуховского–Колмогорова (4.1) для $\Phi_N(x_i, x'|s)$ можно свести к следующему уравнению Фоккера–Планка для $\Phi(x, x'|t_b, s)$:

$$\tau_\epsilon^b \frac{\partial \Phi}{\partial t_b} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_\epsilon(x)\Phi] - \frac{\partial}{\partial x} [\vartheta(x)\Phi] - v(x, s)\Phi. \quad (4.2)$$

Кинетические коэффициенты в этом уравнении задаются соотношениями

$$\begin{aligned} D_\epsilon(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_j - x)^2 W(x_j, x|0) = \\ &= D \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} g(\tilde{x}, x|0) + \mu E \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} (\tilde{x} - x)g(\tilde{x}, x|0); \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\vartheta(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_j - x)W(x_j, x|0) = \mu E \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} g(\tilde{x}, x|0), \quad (4.4)$$

$$v(x, s) = \epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{th} \left(l_i \sqrt{\frac{s}{D}} \right) W(x_j, x|0). \quad (4.5)$$

При $N = 1$ в первом приближении можно полагать

$$\Phi_1(x_i, x'|s) \approx W(x_i, x'|0),$$

при этом ширина области локализации функции $\Phi_1(x_i, x'|s)$ оказывается порядка ℓ_ϵ и в силу (В.17) выполняется равенство

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_1(x_i, x'|s) \approx 1.$$

Это позволяет дополнить уравнение (4.2) формальным начальным условием

$$\Phi(x, x'|t_b, s)|_{t_b=0} = \Delta\delta(x - x'), \quad (4.6)$$

так как при переходе к континуальному пределу мы используем замену

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rightarrow \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dx_i.$$

Последующий анализ будет основан на решении уравнения (4.2) с использованием средних значений его кинетических коэффициентов в силу малости их случайно-неоднородных возмущений. Однако гребешковая структура представляет собой низкоразмерную систему, поэтому в общем случае приближение среднего поля для уравнений типа Фоккера–Планка может нарушаться сколь угодно малыми возмущениями (см., например, [19]). Поэтому использование приближения среднего поля для описания данной системы требует специального обоснования, чему и посвящен следующий раздел.

4.1. Приближение среднего поля

Покажем, что в рамках неравенства (3.3) влияние случайных неоднородностей кинетических коэффициентов (4.3)–(4.5) незначительно. Применим смешанные преобразования Лапласа и Фурье,

$$(\dots)(\sigma) = \int_0^{\infty} dt_b e^{-\sigma t_b} (\dots)(t_b), \quad (\dots)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} (\dots)(x),$$

для уравнения (4.2). Тогда из (4.2) получаем следующее уравнение для такого образа $\Phi^*(k, x'|\sigma, s)$ функции Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$:

$$L_k^* \Phi_k^* = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta L_{k,k-p}^* \Phi_p^* + \Delta e^{-ikx'}, \quad (4.7)$$

где

$$L_k^* = \tau_\epsilon^b \sigma + D_\epsilon k^2 + i\vartheta k + \nu, \quad \delta L_{k,p}^* = k^2 \delta D_\epsilon(p) + ik \delta \vartheta(p) + \delta \nu(p),$$

а D_ϵ , ϑ , ν — средние значения соответствующих кинетических коэффициентов и $\delta D_\epsilon(p)$, $\delta \vartheta(p)$, $\delta \nu(p)$ — фурье-образы их флуктуационных компонент.

Из (4.7) видно, что в нулевом приближении по флуктуационному оператору $\delta L_{k,p}^*$ регулярная часть Φ_k^* образа функции Грина $\Phi^*(k, x'|\sigma, s)$ задается выражением

$$\bar{\Phi}_k^* = \frac{\Delta e^{-ikx'}}{L_k^*} \quad (4.8)$$

и в первом приближении ее флуктуационная компонента $\delta\Phi_k^*$ есть

$$\delta\Phi_k^* = -\frac{e^{ikx'}}{2\pi\Delta} \bar{\Phi}_k^* \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta L_{k,k-p}^* \bar{\Phi}_p^*. \quad (4.9)$$

При $t_b \gg \tau_\epsilon^b$ ($N \gg 1$) ширина l_ϕ области локализации функции $\Phi(x, x'|t_b, s)$ значительно превышает масштаб l_ϵ — ширину области локализации функции $g(x_i, x|s)$, $l_\phi \gg l_\epsilon$. Следовательно, для Φ_k^* существенными значениями волновых чисел является область $|k| \lesssim 1/l_\phi \ll 1/l_\epsilon$. Как видно из (4.3)–(4.5) характерная длина корреляции кинетических коэффициентов $D_\epsilon(x)$, $\vartheta(x)$, $v(x)$ порядка l_ϵ . Поэтому в выражении (4.9) случайные неоднородности кинетических коэффициентов $\delta D_\epsilon(x)$, $\delta\vartheta(x)$, $\delta v(x)$ можно считать δ -коррелированными. Тогда из (4.9) получаем следующую оценку меры влияния случайных неоднородностей геометрии гребешковой структуры на функцию Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$:

$$\left\langle \left| \frac{\delta\Phi_k^*}{\bar{\Phi}_k^*} \right|^2 \right\rangle = \frac{\Lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{L_p^* L_{-p}^*}, \quad (4.10)$$

где

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle \delta L_k^*(x) \delta L_{-k}^*(x') \rangle, \quad (4.11)$$

$$\delta L_k^*(x) = k^2 \delta D_\epsilon(x) + ik \delta\vartheta(x) + \delta v(x). \quad (4.12)$$

В Приложении D найдено значение интеграла (4.10) (см. формулу (D.17)), которое дает оценку

$$\left\langle \left| \frac{\delta\Phi_k^*}{\bar{\Phi}_k^*} \right|^2 \right\rangle \lesssim \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{(2-\gamma)/2} \ll 1, \quad (4.13)$$

если длина волны $1/k$ возмущения $\delta\Phi_k^*$ не слишком сильно превышает характерную толщину области локализации функции $\Phi(x, x'|t_b, s)$.

В силу неравенства (4.13) в первом приближении образ Φ_k^* функции Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$ задается выражением (4.8), т. е. при решении уравнения (4.2) мы можем использовать приближение среднего поля. Иными словами, оправданным является замена в этом уравнении кинетических коэффициентов $D_\epsilon(x)$, $\vartheta(x)$ и $v(x, s)$ на их средние значения: D_ϵ , ϑ , v . Это позволяет, во-первых, не различать далее саму функцию Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$ и ее регулярную часть. Во-вторых, используя полученные в Приложении D выражения (D.2), (D.7) для значений D_ϵ , ϑ , v и соотношение (3.17), можем представить уравнение (4.2) в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_b} = D \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \nu(s)\Phi, \quad (4.14)$$

где

$$\nu(s) = I_\gamma \frac{D}{\Delta l_0} \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^\gamma, \quad (4.15)$$

I_γ — константа порядка единицы, задаваемая формулой (D.6) и $1/\nu(s)$ играет роль характерного времени жизни диффундирующей частицы на хребте гребешковой структуры при ее блужданиях в течение времени $t \sim 1/s$.

Уравнение (4.14) с начальным условием (4.6) составляют основной результат этого раздела. Поэтому перед переходом к завершающей части работы приведем качественное объяснение справедливости приближения среднего поля для рассматриваемой системы. Полагаем, для простоты, поле дрейфа малым. Как следует из результатов Приложения D, случайные неоднородности именно кинетического коэффициента $\nu(x, s)$ определяют пространственные флуктуации функции Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$ и связаны главным образом с блужданиями частицы по ребрам, длины которых порядка $l_s = \sqrt{D/s}$. Эти флуктуации малы, если блуждающая частица за время $t \sim 1/s$ встретит большое количество N_s таких ребер. В силу (2.1) доля ребер с длинами порядка l_s есть

$$P_s \sim \int_{l_s}^{\infty} f(l) dl \sim \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{\gamma-1}$$

и, как следует из уравнения (4.14), характерная толщина l_Φ области локализации функции $\Phi(x, x'|t_b, s)$ оценивается выражением

$$l_\Phi \sim \sqrt{\frac{D}{\nu(s)}} \sim \Delta \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{-\gamma/2}$$

Отсюда для величины N_s имеем

$$N_s \sim P_s \frac{L_s}{\Delta} \sim \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{-(2-\gamma)/2} \gg 1,$$

что, фактически, совпадает с условием (4.13).

5. КONTИНУАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДИФФУЗИИ ПО ХРЕБТУ ГРЕБЕШКОВОЙ СТРУКТУРЫ

Возвращаясь к исходной задаче о вычислении функции Грина $G(x, x'|s)$ случайных блужданий по гребешковой структуре, мы видим, что полученные выше результаты позволяют преобразовать уравнение (3.6) следующим образом. Во-первых, перейдем от суммирования по N и i к интегрированию по $t_b = N\tau_b^\epsilon$ и $\bar{x} \rightarrow x_{i_N}$:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \rightarrow \frac{1}{\tau_b^\epsilon} \int_0^{\infty} dt_b, \quad \sum_{i_N=-\infty}^{\infty} \rightarrow \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}.$$

Так как функция $g(x, x_{i_N}|s)$ и сглаженная функция $\Phi(x_{i_N}, x'|t_b, s)$ фактически не изменяются на масштабах Δ , основной вклад в величину $G(x, x'|s)$ обусловлен значениями

$N \sim \tau_b^\epsilon / \nu(s) \sim (\epsilon \sqrt{s/D})^{-\gamma} \gg 1$, и в силу (4.6) первый член в правой части уравнения (3.6) может быть представлен как

$$g(x, x'|s) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty d\bar{x} g(x, \bar{x}|s) \Phi(\bar{x}, x'|0, s).$$

Затем положим $s = 0$ в функции $g(x, x_N|s)$ и проинтегрируем по \bar{x} , игнорируя вариаций функции $\Phi(\bar{x}, x'|t_b, s) \simeq \Phi(x, x'|t_b, s)$ в окрестности точки x толщиной ℓ_ϵ малой по сравнению с толщиной ℓ_ϕ области локализации самой функции $\Phi(\bar{x}, x'|t_b, s)$. В итоге, учитывая также соотношения (3.17) и (D.1) и тот факт, что в принятых допущениях функции $G(x, x'|s)$ и $\Phi(x, x'|t_b, s)$ зависят только от разности аргументов $x - x'$, можем записать

$$G(x - x'|s) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty dt_b \Phi(x - x'|t_b, s). \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) совместно с уравнением (4.2) и граничным условием (4.6) показывает, что функция Грина $G(x - x'|s)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu(s)G = D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial G}{\partial x} + \delta(x - x'), \quad (5.2)$$

что и являются общим решением поставленной задачи.

Последнее уравнение задает континуальное описание аномальной диффузии вдоль хребта гребешковой структуры. Далее подробнее проанализируем конкретные свойства такой диффузии.

5.1. Континуальное уравнение аномальной диффузии

Построенная система соотношений совместно с выражением (3.1) позволяет записать следующее уравнение для образа Лапласа $c_L(x, s)$ концентрации диффундирующих частиц $c(x, t)$:

$$\nu(s)c_L = D \frac{\partial^2 c_L}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial c_L}{\partial x} + c_0, \quad (5.3)$$

где, как и в разд. 3, $c_0(x)$ — концентрация частиц в начальный момент времени $t = 0$. Используя понятия дробных интегралов и производных [20], этому уравнению в силу (4.15) можно сопоставить уравнение аномальной диффузии:

$$I_\gamma \frac{l_0}{\Delta} \left(\frac{D}{l_0^2} \right)^{(2-\gamma)/2} \frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (5.4)$$

где оператор дробной производной степени $\alpha = \gamma/2$ (при $0 < \alpha < 1$) определяется выражением [20]

$$\frac{\partial^\alpha c(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \frac{c(t')}{(t-t')^\alpha} \quad (5.5)$$

и $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция. Уравнение (5.4) должно быть дополнено некоторым «начальным» условием, которое описывает поведение концентрации $c(x, t)$ при малых значениях t . Однако формальный предельный переход $t \rightarrow +0$ в уравнении (5.4) невозможен, так как оно было получено в предположении $t \gg \Delta^2/D$. Тем не менее существует возможность определить некоторое предельное поведение концентрации $c(x, t)$, оставаясь в рамках используемого описания¹⁾. А именно, в рассматриваемой модели естественно считать, что начальное распределение $c_0(x)$ мало изменяется на масштабах длины Δ . Поэтому по истечению времени $t \gtrsim \Delta^2/D$ концентрация $c(x, t)$ будет изменяться, главным образом, вследствие диффузии частиц вдоль ребер, а не вдоль хребта. Кроме того, ее пространственные вариации на масштабах Δ также будут незначительны, несмотря на структурную неоднородность системы ребер, что фактически следует из оценок, завершающих п. 4.1. Такое поведение $c(x, t)$ при $t \gtrsim \Delta^2/D$ описывается уравнением (5.3), если отбросить первые два члена в его правой части, т. е. $\nu(s)c_L \simeq c_0$. Последнее может быть также записано в терминах интеграла дробного порядка $\hat{\mathfrak{J}}^{1-\alpha}$:

$$I_\gamma \frac{l_0}{\Delta} \left(\frac{D}{l_0^2} \right)^{(2-\gamma)/2} \hat{\mathfrak{J}}^{1-\alpha} \{c(x, t)\} \simeq c_0(x), \quad (5.6)$$

где величина $t \gtrsim \Delta^2/D$, а оператор $\hat{\mathfrak{J}}^{1-\alpha}$ (при $0 < 1 - \alpha < 1$) определяется выражением [20]:

$$\hat{\mathfrak{J}}^{1-\alpha} \{c(x, t)\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t dt' \frac{c(x, t')}{(t-t')^\alpha}.$$

Соотношение (5.6) описывает закон сохранения частиц. Иными словами, оно утверждает, что по истечению времени $t \gtrsim \Delta^2/D$ общее число частиц (на единицу длины хребта), находящихся на хребте и близлежащих ребрах, равняется начальной их концентрации на хребте. Естественно, данное условие фактически не зависит от t при значениях $t \gtrsim \Delta^2/D$ и в рамках континуального описания может быть использовано в качестве формального начального условия для решения уравнения (5.4):

$$I_\gamma \frac{l_0}{\Delta} \left(\frac{D}{l_0^2} \right)^{(2-\gamma)/2} \hat{\mathfrak{J}}^{1-\alpha} \{c(x, t)\} \Big|_{t \rightarrow +0} = c_0(x). \quad (5.7)$$

Следует обратить внимание, что при таком подходе значение концентрации $c(x, t)$ не стремится к $c_0(x)$ при $t \rightarrow +0$, а в силу (5.7) задается формулой

$$c(x, t) \sim \frac{\Delta}{I_\gamma \Gamma(\gamma/2) l_0} \left(\frac{l_0^2}{Dt} \right)^{(2-\gamma)/2} c_0(x), \quad (5.8)$$

имеющей сингулярность при $t \rightarrow +0$. Последнее, однако, не более чем формальность, так как при вычислении конкретных значений $c(x, t)$ мы должны полагать, по крайней мере, $t \gtrsim \Delta^2/D$. В этом случае выражение (5.8) дает осмысленный результат. Иными

¹⁾ Отметим, что в работах [21, 22] развивается другой подход к заданию начальных условий. Он основан на построении кроссовера между малой окрестностью $t = 0$ и областью применимости дифференциального уравнения с дробной производной по времени.

словами, при континуальном описании процесса диффузии по гребешковой структуре масштабы длины Δ и времени Δ^2/D должны рассматриваться как бесконечно малые величины, и в этом случае предел $t \rightarrow +0$ не подразумевает нарушения условия $t \gtrsim \Delta^2/D$.

Уравнение (5.4) с начальным условием (5.7) и составляет континуальное описание аномальной диффузии в терминах уравнений с частными дробными производными. Отметим, что применение непосредственно модели ловушек для объяснения аномального транспорта приводит также к уравнению с дробными производными [21, 22], вид которого, однако, отличается от полученного.

5.2. Дисперсионные соотношения

Для анализа свойств распространения блуждающих частиц по гребешковой структуре вычислим зависимость среднего $\langle x(t) \rangle$ и среднеквадратичного $\langle x^2(t) \rangle$ смещений блуждающих частиц вдоль хребта от времени t . По определению

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x G(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx G(x, t)}, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 G(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx G(x, t)}. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.2) непосредственно позволяет найти образы преобразования Лапласа данных сомножителей. А именно, интегрируя его с весовыми функциями 1 , x , x^2 , затем восстанавливая из полученных зависимостей прообразы Лапласа и подставляя в (5.9), имеем

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\mu E \lambda^2}{D} \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma/2}, \quad (5.10)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = 2\lambda^2 \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma/2} + (1 + \chi) \langle x(t) \rangle^2, \quad (5.11)$$

где константы

$$\lambda^2 = \frac{\Gamma(\gamma/2)}{I_\gamma \Gamma(\gamma)} \Delta l_0, \quad \chi = \frac{2\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma/2)\Gamma(3\gamma/2)} - 1 \approx 0.27(2 - \gamma),$$

причем последняя оценка при $1 < \gamma < 2$ оправдана с точностью 0.004.

Из формул (5.10) и (5.11), в частности, следует, что при фиксированной длительности процесса t в выражении для $\langle x^2(t) \rangle$ доминирует первый или второй член в зависимости от условия соответственно $E \ll E_c(t)$ или $E \gg E_c(t)$, где

$$E_c(t) = \frac{D}{\mu \lambda} \left(\frac{l_0^2}{Dt} \right)^{\gamma/4}. \quad (5.12)$$

В области слабых полей, $E \ll E_c(t)$, имеет место зависимость $\langle x^2(t) \rangle \propto t^{\gamma/2}$ с показателем степени $1/2 < \gamma/2 < 1$, т.е. в данном пределе процесс распространения частиц по гребешковой структуре является субдиффузионным (в терминах, принятых в [1-3]). Кроме того, в этом случае выполняется равенство

$$\frac{\langle x(t) \rangle}{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{\mu E}{2D}, \quad (5.13)$$

которое может рассматриваться как обобщенное соотношение Эйнштейна для взаимосвязи регулярного и хаотического движений.

В области сильных полей, $E \gg E_c(t)$, реализуется соотношение

$$\frac{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{\langle x(t) \rangle^2} = \chi \sim 1, \quad (5.14)$$

которое демонстрирует, что при аномальной диффузии поле дрейфа вызывает не только регулярное смещение диффундирующих частиц, но и приводит к их некоторому эффективному случайному движению. В этой области полей последний эффект соизмерим с первым и может условно рассматриваться как диффузия, индуцированная полем. Такой диффузионный перенос характеризуется расплыванием ансамбля частиц $\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \propto t^\gamma$ с показателем степени $1 < \gamma < 2$ и по этому признаку может быть отнесен к классу супердиффузии [1–3]. Следует обратить внимание, что обычно супердиффузия связывается с моделью «полетов Леви» и описывается диффузионным уравнением с дробными производными по пространству, а не по времени вследствие расходимости моментов для распределения длин прыжков частиц за один акт их перемещения в соседние узлы [21]²⁾. Отметим также, что диффузия, индуцированная полем, возникает и при зернограничной диффузии в поликристаллах и в кристаллах с дислокациями [23–25].

Как и следовало ожидать, в рассмотренном случае $1 < \gamma < 2$ асимптотика (5.10) и лидирующий член в асимптотике (5.11) находятся в соответствии с результатами решеточных моделей [14, 15] и формальных теорий среднего поля [9, 10]. Что касается случая $\gamma > 2$ (когда, например, расходятся все моменты, кроме первого), то мы встретили нарушение приближения среднего поля для функций Грина $g(x, x'|s)$ и $\Phi_N(x, x'|s)$. Иными словами, при $\gamma > 2$ распределение диффундирующих частиц по хребту может стать существенно неоднородным вследствие случайной геометрии гребешковой структуры. Поэтому этот случай должен рассматриваться индивидуально и применимость каких-либо вариантов теории среднего поля требует отдельного исследования.

В заключение, чтобы сделать физический смысл аномальной диффузии более наглядным, приведем качественный вывод данных дисперсионных соотношений при помощи простых оценок, родственных, по сути, подходу работы [9]. Пусть $\bar{l}(t)$ — средняя глубина проникновения блуждающих вдоль ребер частиц за время t . Значение $\bar{l}(t)$ можно оценить как

$$\bar{l}(t) \sim \int_{l_0}^{\sqrt{Dt}} dl l f(l) \sim \frac{Dt}{l_0} \left(\frac{l_0}{\sqrt{Dt}} \right)^\gamma.$$

Тогда среднее время t_b , которое блуждающая частица проводит на хребте, есть

$$t_b \sim \frac{\Delta}{\bar{l}} t \sim \frac{\Delta l_0}{D} \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma/2}.$$

²⁾ Супердиффузионный перенос встречается также в задачах о диффузии пассивного скаляра при слоистом движении жидкостей (см., например, [22]).

За это время среднее $\langle x(t) \rangle$ и среднеквадратичное $\langle x^2(t) \rangle$ расстояния, преодолеваемые частицами по ребру, есть

$$\langle x(t) \rangle \sim \mu E t_b \sim \frac{\mu E \sqrt{\Delta l_0}}{D} \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma/2},$$

$$\langle x^2(t) \rangle \sim Dt_b + (\mu E)^2 t_b^2 \sim \Delta l_0 \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma/2} + \Delta l_0 \left(\frac{\mu E \sqrt{\Delta l_0}}{D} \right)^2 \left(\frac{Dt}{l_0^2} \right)^{\gamma},$$

что совпадает по порядку величины со строгими результатами (5.10) и (5.11).

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17576).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функция Грина первого достижения хребта при случайных блужданиях по ребру

Как следует из общих свойств случайных блужданий (см., например, [26]) образ Лапласа $F(i, s|y)$ вероятности первого достижения хребта при условии, что блуждающая частица в начальный момент находилась в точке y на ребре i , удовлетворяет уравнению

$$sF = D \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

и граничным условиям

$$F|_{y=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=l_i} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Отсюда имеем, что

$$F(i, s|y) = \frac{\text{ch}[(l_i - y)\sqrt{s/D}]}{\text{ch}(l_i\sqrt{s/D})}. \quad (\text{A.3})$$

Искомый сомножитель $F(i, s) = F(i, s|\epsilon)$. Как видно из условия (3.3), при $y = \epsilon$ параметр $y\sqrt{s/D}$ может считаться малым. Тогда с точностью до первой степени y из (A.3) находим

$$F(i, s|y) = 1 - y \sqrt{\frac{s}{D}} \text{th} \left(l_i \sqrt{\frac{s}{D}} \right) + O(y^2), \quad (\text{A.4})$$

что непосредственно приводит к формуле (3.8) при $y = \epsilon$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Функции Грина случайных блужданий внутри области Γ_ϵ

В.1. Общие соотношения

Случайные блуждания диффундирующей частицы по гребешковой структуре при условии, что ее траектория локализована в области Γ_ϵ , характеризуются двумя типами функций. Во-первых, это плотность вероятности $g(x, t|x', 0)$ обнаружения частицы на хребте в точке x через время t при ее старте из точки x' . Во-вторых, это совокупность плотностей вероятности $\{\varphi_i(y, t)\}$ ее обнаружения на ребрах $\{i\}$ в момент времени t . Данные функции взаимосвязаны соотношениями (2.2)–(2.5), поэтому их образы Лапласа удовлетворяют следующим уравнениям. Для функции $g(x, x'|s)$ вне точек $\{x_i\}$ сочленения хребта и ребер, т.е. $x \neq x_i$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеем

$$sg = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial g}{\partial x} + \delta^*(x - x'), \quad (\text{B.1})$$

где $\delta^*(x - x')$ — обычная δ -функция при $x' \neq x_i$, а при $x' = x_i$ применим следующее правило регуляризации:

$$\delta^*(x - x_i) = \lim_{x' \rightarrow x_i - 0} \delta(x - x').$$

Образы Лапласа $\{\varphi_i(y, s)\}$ вероятностей обнаружения блуждающей частицы на ребрах $\{i\}$ отвечают уравнению:

$$s\varphi_i = D \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \quad (\text{B.2})$$

при $0 < y < \min(\epsilon, l_i)$ и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right|_{y=l_i} = 0, \quad l_i \leq \epsilon \quad (\text{B.3})$$

$$\varphi_i|_{y=\epsilon} = 0, \quad l_i > \epsilon \quad (\text{B.4})$$

Отметим, что последнее нулевое условие на функции $\{\varphi_i(y, s)\}$ отражает тот факт, что рассматриваются те траектории частицы, которые не покидают область Γ_ϵ при блуждании частицы по ребрам. В точках сочленения хребта и ребер $\{(x_i, y = 0)\}$ выполняются условия непрерывности:

$$\varphi_i(0, s) = g(x_i, x'|s), \quad (\text{B.5})$$

$$J_i|_{y=0} = j|_{x=x_i-0} - j|_{x=x_i+0}, \quad (\text{B.6})$$

где

$$J_i = -D \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad j = -D \frac{\partial g}{\partial x} + \mu E g.$$

Решение уравнения (B.2) при граничных условиях (B.3)–(B.5) имеет вид

$$\varphi_i(y, s) = g(x_i, x' | s) \left[\operatorname{ch} \left(y \sqrt{\frac{s}{D}} \right) - b_i \operatorname{sh} \left(y \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \right], \quad (\text{B.7})$$

где коэффициент

$$b_i = b(l_i) = \begin{cases} \operatorname{th} \left(l_i \sqrt{s/D} \right), & l_i \leq \epsilon, \\ \operatorname{cth} \left(\epsilon \sqrt{s/D} \right), & l_i > \epsilon. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Выражение (B.8) позволяет представить граничное условие (B.6) в виде

$$j|_{x=x_i+0} - j|_{x=x_i-0} = D \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\sqrt{sD} b_i g(x_i, x' | s). \quad (\text{B.9})$$

Соотношение (B.9) показывает, что уравнение (B.1) может быть продолжено по непрерывности на всю ось x при условии, что в точках $\{x_i\}$ будут введены δ -образные стоки мощности $\sqrt{sD} b_i g$. Иными словами, для функции Грина мы можем записать уравнение, определенное уже на всей оси x :

$$s g = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial g}{\partial x} - \sqrt{sD} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(x - x_i) \right] g + \delta^*(x - x'), \quad (\text{B.10})$$

причем в этом уравнении не имеет смысла различать функцию $\delta^*(x - x')$ и обыкновенную δ -функцию $\delta(x - x')$. Отсюда непосредственно следует уравнение (3.9).

Блуждание частицы внутри области Γ_ϵ также характеризуется вероятностью первого достижения ее границы — линии наблюдения $y = \epsilon$. Для излагаемой здесь теории нам нужен образ Лапласа $W(x_i, x' | s)$ плотности вероятности первого достижения линии наблюдения блуждающей частицы на ребре i в момент времени t при ее старте на хребте из точки x' . Как следует из общих свойств случайных блужданий (см., например, [26]), функция $W(x_i, x' | s)$ и плотность потока вероятности J_i связаны соотношением

$$W(x_i, x' | s) = J_i|_{y=\epsilon} = -D \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=\epsilon}, \quad (\text{B.11})$$

конечно, при условии $l_i > \epsilon$. Подставляя (B.7) в (B.11), получаем искомое выражение:

$$W(x_i, x' | s) = \sqrt{sD} \left[\operatorname{sh} \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \right]^{-1} g(x_i, x' | s) \theta_i^\epsilon, \quad (\text{B.12})$$

где $\theta_i^\epsilon = 1$, если $l_i > \epsilon$ и $\theta_i^\epsilon = 0$ при $l_i \leq \epsilon$.

В рамках предела (3.3) можно считать величину $\epsilon \sqrt{s/D}$ малым параметром. Тогда, сохраняя в (B.12) первые два члена разложения по $\epsilon \sqrt{s/D}$, приходим к выражению (3.12).

В дальнейшем также окажутся полезными некоторые общие тождества, которые устанавливают взаимосвязь функций $g(x_i, x' | s)$ и $W(x_i, x' | s)$. Для их вывода разделим в правой части уравнения (B.10) вклады боковых ребер с длинами $l_i \leq \epsilon$ и $l_i > \epsilon$ и, учитывая (B.12), в пределе $\epsilon \ll \sqrt{D/s}$ перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_i)W(x_i, x'|s) = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial g}{\partial x} - s \left[1 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_i) \left(\frac{1}{2} \epsilon \theta_i^\epsilon + l_i (1 - \theta_i^\epsilon) \right) \right] g + \delta(x-x'). \quad (\text{B.13})$$

Интегрируя последнее соотношение по x от $-\infty$ до ∞ с весовыми функциями 1, $(x-x')$, $(x-x')^2$, соответственно получаем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} W(x_i, x'|s) = 1 - s \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x, x'|s) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \epsilon \theta_i^\epsilon + l_i (1 - \theta_i^\epsilon) \right) g(x_i, x'|s) \right], \quad (\text{B.14})$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - x')W(x_i, x'|s) = \mu E \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x, x'|s) - s \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x')g(x, x'|s) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - x') \left(\frac{1}{2} \epsilon \theta_i^\epsilon + l_i (1 - \theta_i^\epsilon) \right) g(x_i, x'|s) \right], \quad (\text{B.15})$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - x')^2 W(x_i, x'|s) = 2D \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x, x'|s) + 2\mu E \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x')g(x, x'|s) - s \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x')^2 g(x, x'|s) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - x')^2 \left(\frac{1}{2} \epsilon \theta_i^\epsilon + l_i (1 - \theta_i^\epsilon) \right) g(x_i, x'|s) \right]. \quad (\text{B.16})$$

Из (B.14), в частности, также следует полезное тождество

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} W(x_i, x'|0) = 1, \quad (\text{B.17})$$

которое отражает тот факт, что частица, стартующая на хребте, когда-нибудь обязательно пересечет границу $y = \epsilon$ области Γ_ϵ .

В следующей части этого Приложения мы рассмотрим конкретные статистические свойства случайных блужданий внутри области Γ_ϵ .

В.2. Статистические свойства функции Грина $g(x, x'|s)$

Выделим регулярную и флуктуационную составляющие функции Грина $g(x, x'|s)$:

$$g(x, x'|s) = \bar{g}(x, x'|s) + \delta g(x, x'|s). \quad (\text{B.18})$$

В соответствии с последующими результатами флуктуационная компонента δg является малым возмущением. Это позволяет решить уравнение (3.9) (или (B.10)) по теории возмущений. В этом случае, усредняя (3.9) по ансамблю $\{l_i\}$, находим

$$s\bar{g} = D \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} - \sqrt{sDb} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{g} \delta(x-x_j) + \delta(x-x'), \quad (\text{B.19})$$

где b есть среднее значение величин $\{b_j\}$ и задается соотношением

$$b = \int_{l_0}^{\infty} dl f(l)b(l) = \frac{2\gamma - 1}{3(2 - \gamma)} \sqrt{\frac{s}{D}} l_0^{\gamma-1} \epsilon^{2-\gamma} + \sqrt{\frac{D}{s}} l_0^{\gamma-1} \epsilon^{-\gamma} \quad (\text{B.20})$$

в силу (2.1), (B.8) и неравенства (3.3). Для преобразования дискретного описания влияния ребер на случайные блуждания внутри области Γ_ϵ к континуальному перейдем в уравнении (B.19) к фурье-образам. Тогда для фурье-образа \bar{g}_k функции $\bar{g}(x, x'|s)$,

$$\bar{g}_k(x'|s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{g}(x, x'|s) e^{-ikx}, \quad (\text{B.21})$$

уравнение (B.19) примет вид

$$L_k \bar{g}_k + \sqrt{sD} \frac{b}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_{k+K_n} = e^{-ikx'}, \quad (\text{B.22})$$

где

$$L_k = s + Dk^2 + i\mu Ek + \sqrt{sD} \frac{b}{\Delta}, \quad (\text{B.23})$$

$K_n = 2\pi n/\Delta$ — числа Бриллюэна (n — целые числа) и штрих возле знака суммы обозначает, что пропущен член с $n = 0$. В рассматриваемой задаче нас интересуют масштабы длин гораздо большие, чем Δ . Это позволяет ограничиться волновыми числами k малыми по сравнению с $1/\Delta$. В этом случае из (B.22) следует, что поправка $\delta\bar{g}_k$ к нулевому приближению для \bar{g}_k по малому параметру $k\Delta \ll 1$ оценивается как

$$\left| \frac{\delta\bar{g}_k}{\bar{g}_k} \right| \lesssim \frac{\sqrt{sD}b}{L_k \Delta} \ll 1$$

в пределе (3.3). Следовательно, можно игнорировать второй член в левой части уравнения (B.22), откуда следует, что

$$L_k \bar{g}_k = e^{-ikx'}. \quad (\text{B.24})$$

Отсюда, в частности, имеем, что в данном приближении регулярная часть $\bar{g}(x - x'|s)$ функции Грина зависит только от разности аргументов x и x' , а ее фурье-образ есть

$$\bar{g}_k = \frac{e^{-ikx'}}{s + Dk^2 + i\mu Ek + \sqrt{sD}b/\Delta}. \quad (\text{B.25})$$

Возвращаясь к фурье-преобразованиям, получаем

$$s\bar{g} = D \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} - \sqrt{sD} \frac{b}{\Delta} \bar{g} + \delta(x - x'). \quad (\text{B.26})$$

Подстановка (B.20) в (B.26) дает уравнение (3.14). В частности, окажется полезным вид этого уравнения при $s = 0$. В силу (B.8) и (B.20) имеем

$$\frac{D}{\Delta l_0} \left(\frac{l_0}{\epsilon} \right)^\gamma \bar{g} + \mu E \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x^2} = \delta(x - x'). \quad (\text{B.27})$$

В этом же приближении для флуктуационной составляющей $\delta g(x, x'|s)$ уравнение (3.9) (или (B.10)) примет вид

$$\left(s - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu E \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{sD} \frac{b}{\Delta} \right) \delta g(x, x'|s) = -\sqrt{sD} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta b_i \delta(x - x_i) \bar{g}(x_i - x'|s), \quad (\text{B.28})$$

где $\delta b_i = b_i - b$. Обращая уравнение (B.28) и учитывая (B.26), получаем выражение (3.18):

$$\delta g(x, x'|s) = -\sqrt{sD} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta b_i \bar{g}(x - x_i|s) \bar{g}(x_i - x'|s), \quad (\text{B.29})$$

или для фурье-образа δg_k (определяемого тем же соотношением, что и (B.21)):

$$\delta g_k(x'|s) = -\frac{\sqrt{sD}}{L_k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{L_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta b_j \exp[-i(k-p)x_j - ipx']. \quad (\text{B.30})$$

В частности, из выражения (B.30) следует оценка для величины флуктуационной компоненты δg . А именно, рассматривая только малые значения волнового числа $|k| \ll 1/\Delta$, находим

$$\frac{\langle |\delta g_k|^2 \rangle}{|g_k|^2} = \frac{sD}{2\pi\Delta} (\delta b)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{|L_p|^2}, \quad (\text{B.31})$$

где $(\delta b)^2$ — дисперсия коэффициентов $\{\delta b_j\}$, т. е.

$$(\delta b)^2 = \int_{l_0}^{\infty} dl f(l) [b(l) - b]^2 \simeq b^2 \left(\frac{\epsilon}{l_0} \right)^{\gamma-1} \quad (\text{B.32})$$

в нулевом приближении по малому параметру $\epsilon\sqrt{s/D}$. Тогда, полагая в (B.31) $L_p = L_p|_{E=0}$ (что завьшает его правую часть) и учитывая (B.20) и (B.32), имеем

$$\frac{\langle |\delta g_k|^2 \rangle}{|g_k|^2} \simeq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Delta}{l_0}} \left(\frac{l_0}{\epsilon} \right)^{(2-\gamma)/2}, \quad (\text{B.33})$$

откуда и следует оценка (3.19).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Процедура сглаживания функции $\Phi_N(x_j, x'|s)$ и вывод уравнения Фоккера–Планка (4.2)

Используя периодические условия Борна–Кармана, зададим преобразование Фурье для функции $\Phi_N(x_j, x'|s)$ в виде

$$\Phi_N(k_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \Phi_N(x_j, x'|s) \exp(-ik_m x_j), \quad (\text{C.1})$$

где $\mathfrak{M} \rightarrow \infty$ — полное (четное) число ребер, а волновое число k принимает значения $k_m = 2\pi m/\Delta\mathfrak{M}$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\mathfrak{M}/2 - 1), -\mathfrak{M}/2$. Тогда обратное преобразование есть

$$\Phi_N(x_j, x'|s) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{m=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \Phi_N(k_m) \exp(ik_m x_j). \quad (\text{C.2})$$

Определим процедуру сглаживания функции Грина

$$\Phi_N(x_j, x'|s) \rightarrow \Phi(x, x'|N, s)$$

условием, что в соотношении (C.2) учитываются только значения волнового числа k_m , которые не превышают $1/\ell_\epsilon$, т. е. $|k_m \ell_\epsilon| \lesssim 1$:

$$\Phi(x, x'|N, s) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{|k_m \ell_\epsilon| \lesssim 1} \Phi_N(k_m) \exp(ik_m x_j). \quad (\text{C.3})$$

Как видно из последующего анализа, непосредственный источник случайных неоднородностей функции $\Phi_N(x_j, x'|s)$ отвечает волновым числа $k_m \gg 1/\ell_\epsilon$, а ширина области локализации функции $\Phi(x, x'|N, s)$ оценивается как $\ell_\epsilon \sqrt{N}$. Случайные возмущения могут трактоваться как δ -коррелированные источники. Отсюда также следует, что в (C.3) фактически достаточно рассматривать область $|k_m \ell_\epsilon| \ll 1$.

Уравнение для функции $\Phi(x, x'|N, s)$ получим из (4.1), следуя фактически методу Понтрягина [18]. А именно, переходя к фурье-образам правой и левой частей уравнения (4.1), имеем

$$\Phi_{N+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \exp(-ikx_j) F(j, s) \sum_{j'=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} W(x_j, x_{j'}|s) \Phi_N(x_{j'}, x'|s),$$

откуда в силу (C.2)

$$\Phi_{N+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{m=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \Pi(k, k - p_m) \Phi_N(p_m), \quad (\text{C.4})$$

где

$$\Pi(k, k - p_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j, j'=-\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \exp[-ik(x_j - x_{j'}) - i(k - p_m)x_{j'}] F(j, s) W(x_j, x_{j'}|s). \quad (\text{C.5})$$

Так как область локализации функции $W(x_j, x_{j'}|s)$ совпадает с областью локализации функции Грина $g(x_j, x_{j'}|s)$ (см. (B.12)), то в пределе $|k \ell_\epsilon| \ll 1$, разлагая экспоненциальный множитель в ряд по $k(x_j - x_{j'})$, выражение (C.5) можно переписать в виде

$$\Pi(k, k - p_m) \simeq 1 - v^F(k - p_m) - ik\vartheta^F(k - p_m) - k^2 D_\epsilon^F(k - p_m), \quad (C.6)$$

где

$$v^F(k - p_m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j, j' = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \exp[-i(k - p_m)x_{j'}] F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s), \quad (C.7)$$

$$\vartheta^F(k - p_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j, j' = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} (x_j - x_{j'}) \exp[-i(k - p_m)x_{j'}] F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s), \quad (C.8)$$

$$D_\epsilon^F(k - p_m) = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{M}}} \sum_{j, j' = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} (x_j - x_{j'})^2 \exp[-i(k - p_m)x_{j'}] F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s) \quad (C.9)$$

являются фактически фурье-образами функций

$$v(x_{j'} | s) = 1 - \sum_{j = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s), \quad (C.10)$$

$$\vartheta(x_{j'} | s) = \sum_{j = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} (x_j - x_{j'}) F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s), \quad (C.11)$$

$$D_\epsilon(x_{j'} | s) = \sum_{j = -\mathfrak{M}/2}^{\mathfrak{M}/2-1} \frac{1}{2} (x_j - x_{j'})^2 F(j, s) W(x_j, x_{j'} | s). \quad (C.12)$$

Как видно из последующего, значения кинетических коэффициентов $v^F(k)$, $\vartheta^F(k)$, $D_\epsilon^F(k)$ малы при $|k| \gg 1/\ell_\epsilon$. Поэтому, во-первых, в формулах (C.10)–(C.12) аргумент $x_{j'}$ можно считать непрерывным. Во-вторых, в выражении (C.4) допустимо полагать, что $|p_m| \lesssim 1/\ell_\epsilon$, так как значение функции $\Phi_N(p_m)$ является заметным либо при $|p_m| \ll 1/\ell_\epsilon$, либо при $|p_m| \gg 1/\ell_\epsilon$. Это позволяет, пользуясь теоремой о фурье-образе произведения функций, перейти от уравнения (C.4) к уравнению для сглаженной функции Грина $\Phi(x, x' | N, s)$. Тогда, учитывая (C.6) и полагая

$$\Phi(x, x' | N + 1, s) - \Phi(x, x' | N, s) \simeq \frac{\partial \Phi(x, x' | N, s)}{\partial N},$$

получаем для $\Phi(x, x' | N, s)$ уравнение типа Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_\epsilon(x | s) \Phi] - \frac{\partial}{\partial x} [\vartheta(x | s) \Phi] - v(x | s) \Phi. \quad (C.13)$$

Как видно из структуры уравнения (C.13), основная зависимость функции $\Phi(x, x' | N, s)$ от аргумента s обусловлена последним членом правой части. Зависимость от s кинетических коэффициентов ϑ^F , D_ϵ обуславливает лишь слабую перенормировку ширины области локализации функции Грина $\Phi(x, x' | N, s)$, в то время как зависимость v от s задает характерное число N элементарных фрагментов $\{P^{in}, P^{out}\}$ траектории

блуждающей частицы за время $t \sim 1/s$. Это позволяет положить в выражениях (С.11), (С.12) $s = 0$, что в силу (В.15) и (В.16) дает

$$D_\epsilon(x_{j'}|0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (x_j - x_{j'})^2 W(x_j, x_{j'}|0) = \\ = D \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x, x_{j'}|0) + \mu E \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x_{j'}) g(x, x_{j'}|0), \quad (\text{С.14})$$

$$\vartheta(x_{j'}|0) = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_j - x_{j'}) W(x_j, x_{j'}|0) = \mu E \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x, x_{j'}|0). \quad (\text{С.15})$$

Выражение (С.10) также можно упростить в силу (В.14) и (3.8). Как нетрудно убедиться, зависимость от s множителя $F(j, s)$ доминирует над соответствующей зависимостью множителя $W(x_j, x_{j'}|s)$ в меру $(D/s\epsilon^2)^{(2-\gamma)/2} \gg 1$. Следовательно,

$$v(x_{j'}|s) \simeq \epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{th} \left(l_i \sqrt{\frac{s}{D}} \right) W(x_j, x_{j'}|0). \quad (\text{С.16})$$

Соотношения (С.14)–(С.16) дают искомые общие выражения (4.5)–(4.3) для кинетических коэффициентов уравнения (4.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Средние значения и интенсивность случайных неоднородностей кинетических коэффициентов D_ϵ , ϑ и v

Вычислим вначале средние значения D_ϵ , ϑ и $v(s)$ кинетических коэффициентов $D_\epsilon(x)$, $\vartheta(x)$ и $v(x, s)$. В силу уравнения (В.27) и определений (3.16), (3.21) для регулярной части функции Грина $\bar{g}(x, x') \equiv \bar{g}(x, x'|0)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{g}(x, x') = \frac{\ell_\epsilon^2}{2D}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x') \bar{g}(x, x') = \mu E \left(\frac{\ell_\epsilon^2}{2D} \right)^2. \quad (\text{D.1})$$

Эти соотношения, выражения (4.3), (4.4) и неравенство (3.3) дают следующие средние значения кинетических коэффициентов:

$$D_\epsilon \simeq \frac{\ell_\epsilon^2}{2}, \quad \text{и} \quad \vartheta = \frac{\mu E \ell_\epsilon}{D} \frac{\ell_\epsilon}{2}. \quad (\text{D.2})$$

Для вычисления среднего значения $v(x, s)$ обозначим совокупность ребер, длины которых превышают ϵ , как $\{i\}_\epsilon = \{i : l_i > \epsilon\}$. Тогда будем рассматривать реализацию набора длин ребер $\{l_i\}_\epsilon \equiv \{l_i : l_i > \epsilon\}$, превышающих ϵ , как реализацию данных конкретных значений при условии события $\{i\}_\epsilon$. Иными словами, представляем вероятность $f(l)$ события $l > \epsilon$ как произведение вероятности P_ϵ превышения длиной ребра величины ϵ и условной вероятности $f_\epsilon(l)$ реализации данного значения:

$$f(l) = P_\epsilon f_\epsilon(l). \quad (D.3)$$

Отсюда и (2.1), (3.21) следует, что

$$f_\epsilon(l) = (\gamma - 1) \frac{\epsilon^{\gamma-1}}{l^\gamma}. \quad (D.4)$$

Тогда при вычислении $v(s)$ мы можем вначале усреднить по условному распределению длин ребер, а затем уже по реализации условия того, что данные ребра имеют длины большие ϵ . На первом шаге формула (4.5) дает

$$\langle v(x|s) \rangle_1 = \epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \left\langle \text{th} \left(l \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \right\rangle_\epsilon \sum_{i=-\infty}^{\infty} W(x_j, x_{j'}|0),$$

так как функция $W(x_j, x_{j'}|0)$ не зависит от конкретных значений $\{l_i > \epsilon\}$. Здесь символ $\langle \dots \rangle_\epsilon$ обозначает усреднение по условным реализациям длин ребер $\{l_i\}_\epsilon$ и, в частности, в пределе $\epsilon \sqrt{s/D} \ll 1$

$$\left\langle \text{th} \left(l \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \right\rangle = \int_\epsilon^\infty dl f_\epsilon(l) \text{th} \left(l \sqrt{\frac{s}{D}} \right) \simeq \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{\gamma-1} I_\gamma, \quad (D.5)$$

где величина (см., например, [27])

$$I_\gamma = (\gamma - 1) \int_0^\infty d\xi \frac{\text{th} \xi}{\xi^\gamma} = (\gamma - 1) 2^\gamma (2^\gamma - 1) \Gamma(1 - \gamma) \zeta(1 - \gamma) \quad (D.6)$$

и $\zeta(\dots)$ — дзета-функция Римана. В силу тождества (B.17) отсюда следует искомое выражение

$$v(s) = I_\gamma \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^\gamma, \quad (D.7)$$

так как значение $\langle v(x|s) \rangle_1$ оказывается не зависимым от конкретной реализации события $\{i\}_\epsilon$.

Кроме того, используя эти соотношения, получаем следующее выражение для интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{|L_p^*|^2} \simeq \frac{\pi}{2I_\gamma^{3/2} \sqrt{\Delta l_0}} \left(\frac{l_0}{\epsilon} \right)^{\gamma/2} \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{-3\gamma/2} \left(1 + \frac{E^2}{E_c^2} \right)^{-1/2}, \quad (D.8)$$

где $L_p^* = k^2 D_\epsilon + ik\vartheta + v(s)$ и

$$E_c = 2\sqrt{I_\gamma} \frac{D}{\sqrt{\Delta l_0 \mu}} \left(l_0 \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{\gamma/2} \quad (D.9)$$

есть критическая величина поля дрейфа, которая при данном значении параметра s (т. е. при данной длительности процесса диффузии $t \sim 1/s$) делит возможные значения

поля дрейфа на слабые ($E \ll E_c$) и сильные ($E \gg E_c$). (Данное определение поля E_c и (5.12) практически совпадают.)

Переходя к вычислению суммарной амплитуды Λ случайных неоднородностей этих кинетических коэффициентов, отметим, что последнее свойство позволяет рассматривать флуктуации пары коэффициентов $\delta D_\epsilon(x)$, $\delta \vartheta(x)$ и флуктуации коэффициента $\delta v(x, s)$ независимо друг от друга, так как величины $\delta D_\epsilon(x)$, $\delta \vartheta(x)$ также не зависят от конкретных значений совокупности длин $\{l_i\}_\epsilon$. Поэтому выражение (4.11) можно переписать в виде

$$\Lambda = \Lambda_g + \Lambda_v, \quad (\text{D.10})$$

где

$$\Lambda_g = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle [k^2 \delta D_\epsilon(x) + ik \delta \vartheta(x)] [k^2 \delta D_\epsilon(x') - ik \delta \vartheta(x')] \rangle, \quad (\text{D.11})$$

$$\Lambda_v = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle \delta v(x) \delta v(x') \rangle. \quad (\text{D.12})$$

Учитывая (3.18), (D.1) и (D.2), можно записать

$$k^2 \delta D_\epsilon(x) + ik \delta \vartheta(x) = -\frac{D}{\epsilon} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta \theta_j \bar{g}(x_i - x) \{D_\epsilon k^2 + \vartheta [ik + k^2(x_i - x)]\}.$$

Тогда, подставляя это выражение в (D.11) и выполняя интегрирование, находим

$$\Lambda_g = \Delta \bar{I}_\gamma^2 \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{2\gamma} \left(\frac{\epsilon}{l_\Phi} \right)^{\gamma-1} \Psi(k), \quad (\text{D.13})$$

где

$$\Psi(k) = \frac{(kl_\Phi)^2}{1 + 4(E/E_c)^2} \left[\frac{(kl_\Phi)^2}{1 + 4(E/E_c)^2} + 4(E/E_c)^2 \right] \quad (\text{D.14})$$

и l_Φ — характерная ширина области локализации функции Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$, определяемая как половина соответствующего среднеквадратичного отклонения $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$, а именно,

$$l_\Phi^2 = \frac{D_\epsilon}{v} + \frac{\vartheta^2}{v^2}. \quad (\text{D.15})$$

Отметим, что в области значений волновых чисел $k \lesssim 1/l_\Phi$, существенных для функции Грина $\Phi(x, x'|t_b, s)$, множитель $\Psi(k) \lesssim 1$. Подставляя (4.5) в (D.12) и усредняя сначала по условной реализации значений $\{l_i\}_\epsilon$, а затем по случайным величинам θ_i^ϵ и по вариациям функции Грина $g(x, x')$, получаем

$$\Lambda_v = \Delta \bar{I}_\gamma \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{\gamma+1} \left(\frac{\epsilon}{l_\Phi} \right)^{\gamma-1}, \quad (\text{D.16})$$

где коэффициент

$$\tilde{I}_\gamma = (\gamma - 1) \int_0^\infty d\xi \frac{\text{th}^2 \xi}{\xi^\gamma}.$$

Соотношения (D.8), (D.13) и (D.16) приводят к следующей оценке для относительной интенсивности (4.10) случайных неоднородностей функции Грина $\Phi(x, x' | t_b, s)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{\delta \Phi_k^*}{\Phi_k^*} \right|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \tilde{I}_\gamma I_\gamma^{-3/2} \sqrt{\frac{\Delta}{l_0}} \left(l_0 \sqrt{\frac{s'}{D}} \right)^{(2-\gamma)/2} \left(1 + \frac{E^2}{E_c^2} \right)^{-1/2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{I_\gamma^2}{\tilde{I}_\gamma} \left(\epsilon \sqrt{\frac{s}{D}} \right)^{\gamma-1} \Psi(k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Отсюда следует оценка (4.13) для не слишком больших значений величины kl_Φ .

Литература

1. E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, Vol. 11, ed. by J. Leibowitz and E. W. Montroll, North-Holland, Amsterdam (1984), p. 1.
2. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
3. M. B. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
4. С. Хавлин, в *Фракталы в физике*, Мир, Москва (1988), с. 498.
5. S. R. White and M. Varma, *J. Phys. A* **17**, 2995 (1984).
6. Y. Gefen and I. Goldhirsch, *J. Phys. A* **18**, 1037 (1985).
7. G. H. Weiss and S. Havlin, *Physica A* **134**, 474 (1986).
8. В. Е. Архинчеев, Э. М. Баскин, *ЖЭТФ* **100**, 292 (1991).
9. S. Havlin, J. E. Kiefer, and G. H. Weiss, *Phys. Rev. A* **36**, 1403 (1987).
10. K. P. N. Murthy and K. W. Kehr, *Phys. Rev. A* **40**, 2082 (1989).
11. S. Revathi, V. Balakrishnan, S. Lakshminbala, and K. P. N. Murthy, *Phys. Rev. E* **54**, 2298 (1996).
12. S. Havlin, A. Bunde, H. E. Stanley, and D. Movshovitz, *J. Phys. A* **19**, L693 (1986).
13. A. Bunde, S. Havlin, H. E. Stanley, B. Trus, and G. H. Weiss, *Phys. Rev. B* **34**, 8129 (1986).
14. C. Aslangul and N. Pottier, *Physica A* **203**, 533 (1993).
15. N. Pottier, *Nuovo Cimento D* **16** ser. 1, 1265 (1994).
16. N. Pottier, *Physica A* **216**, 1 (1995).
17. V. Balakrishnan and Van den Broeck, *Physica A* **217**, 1 (1995).
18. Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин, *Термодинамика и статистическая физика*, Наука, Москва (1977).
19. Дж. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, Москва (1982).
20. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Марченко, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и Техника, Минск (1987).
21. К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **108**, 1875 (1995).
22. К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **109**, 1335 (1996).
23. И. А. Лубашевский, В. Л. Алаторцев, *Металлофизика* **11**, 63 (1989).
24. I. A. Lubashevsky, V. L. Alatorsev, and A. G. Keijan, *Physica A* **193**, 259 (1993).
25. И. А. Лубашевский, *Хим. физ.* **9**, 272 (1990).
26. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986).
27. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).