

## ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Н. А. Силантьев\*

*Instituto Nacional de Astrofisica, Optica y Electronica  
 Apartado Postal 51 y 216 C.P. 72000 Puebla, Pue. Mexico  
 Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук  
 196140, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 23 февраля 1998 г.

Рассмотрены особенности диффузии примесных частиц в сжимаемой турбулентной среде по сравнению с диффузией в несжимаемой среде. Вычисление коэффициентов турбулентной диффузии проводится на основе точных формул, выраженных через функцию Грина, описывающую процесс переноса примеси в бесконечной однородной, изотропной и стационарной турбулентной среде. В качестве приближенного выражения для функции Грина в основном использовались впервые полученные для сжимаемой турбулентности точные численные решения нелинейного уравнения для средней функции Грина (*direct interaction approximation equation*, или *DIA equation*). Рассмотрены два типа турбулентности — акустическая и типа смеси ударных волн, — описываемые различными видами обобщенных спектров. Показано, что сжимаемость существенно увеличивает коэффициент диффузии в случае акустической турбулентности и уменьшает его во втором случае.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема переноса примесных частиц и магнитного поля в турбулентной среде является составной частью теории турбулентности [1]. Более всего продвинулось решение этой проблемы для случая несжимаемой турбулентности, причем сначала были получены общие формулы для коэффициентов турбулентной диффузии  $D_T$  в лагранжевом представлении скоростей  $v(\mathbf{r}, t)$  (см. [2–4]) и значительно позже — в эйлеровом представлении  $u(\mathbf{r}, t)$  [5]. Для вычисления  $D_T$  в эйлеровом, практически наиболее важном, представлении решающим обстоятельством явилось использование решений простейшего нелинейного уравнения для усредненной функции Грина  $\langle G(1, 2) \rangle \equiv \langle G(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ , предложенного Крайчнаном [6], а затем подробно исследованного Робертсом [7] и Крайчнаном [8, 9]. Это уравнение носит сейчас название *DIA-уравнение* (*direct interaction approximation equation*). Расчеты с использованием численных решений этого уравнения [10–13] показали, что *DIA*-решения позволяют получить значения коэффициента турбулентной диффузии для всей области возможных значений числа Струхала  $\xi_0 = u_0 p_0 \tau_0$ , где  $u_0$ ,  $p_0$  и  $\tau_0$  — характерные значения турбулентной скорости, волнового числа (характерная длина  $R_0 \simeq 1/p_0$ ) и времени жизни турбулентных пульсаций. Поправки к этой теории, обусловленные вкладом неучитываемых в *DIA*-уравнении корреляторов четвертого порядка неприводимого типа, составляют  $\simeq 7\%$  для широких спектров типа колмогоровского и  $\simeq 11\%$  для пикообразных спектров в предельном случае «замороженной» турбулентности ( $\xi_0 \rightarrow \infty$ ). Отрицательные по величине

\* E-mail: silant@inaoep.mx

эти поправки монотонно уменьшаются с уменьшением параметра  $\xi_0$  вплоть до нуля при  $\xi_0 \rightarrow 0$ . Следует подчеркнуть, что *DIA*-решения позволяют вычислить  $D_T$  даже в случае «многогорбых» спектров (см. [11]), когда простая оценка величины  $D_T$  весьма затруднительна.

Вывод *DIA*-уравнения, первого из иерархии нелинейных уравнений для средней функции Грина [10], не зависит от того, сжимаема или несжимаема турбулентная среда. Представляется естественным поэтому использовать *DIA*-уравнение также для вычисления коэффициентов турбулентной диффузии в общем случае сжимаемой среды. Кроме того, следует отметить, что и сама проблема вычисления  $D_T$  для сжимаемой турбулентности разработана весьма недостаточно. Из ранних работ отметим статью Эшриха [14], где рассмотрен случай  $\xi_0 \ll 1$ , а также работы [5, 15, 16], в которых в рамках приближенных методов расчета впервые появились отрицательные значения  $D_T$  для турбулентности типа хаотической смеси ударных волн для достаточно больших значений  $\xi_0 \geq 2-3$ . Интересное рассмотрение турбулентной диффузии, не ограниченное рамками несжимаемой среды, дано в [17, 18]. Результат этих работ несколько неожидан: формула для  $D_T$  одна и та же как для несжимаемой среды, так и для сжимаемой и не содержит в явном виде корреляторов с  $\text{div } \mathbf{u}$  — показателем сжимаемости. Коэффициент диффузии зависит только от спектра энергии турбулентности. Неполнота этой формулы очевидна — одному и тому же спектру энергии в несжимаемой и в сжимаемой средах соответствуют совершенно различные движения, и, следовательно, различными будут и коэффициенты диффузии. Отсутствие члена с  $\text{div } \mathbf{u}$  в формулах работы [17] вызвано прямой ошибкой при использовании метода Кляцкина–Татарского (отметим, что сам этот метод ограничен рамками  $\xi_0 \leq 1$ ). В работе [18], посвященной акустической турбулентности, отсутствие члена с  $\text{div } \mathbf{u}$  обусловлено пренебрежением с самого начала коэффициентом молекулярной диффузии  $D_m$ , хотя получаемое в итоге значение  $D_T$  по порядку величины равно  $D_m$ . Как мы покажем далее, учет члена с  $\text{div } \mathbf{u}$  при малом поглощении может в три раза изменить результат, оставляя, конечно, правильным вывод авторов о малости  $D_T$ . Отметим также, что в случае акустической турбулентности возникновение турбулентной диффузии обусловлено не только поглощением волн в среде, но также и хаотическим сбоем их фаз, о чем не указано в работе [18]. Вообще говоря, эти процессы разные, но приводят к одному и тому же виду коррелятора скоростей. По-видимому, хаотический сбой фаз может быть значительным и при малом поглощении волн, приводя к увеличению турбулентной диффузии в такой среде.

В работе [5] были выведены формально точные, выраженные через точную стохастическую функцию Грина, выражения для коэффициентов турбулентной диффузии, пригодные как для несжимаемых сред, так и для сжимаемых. Они в явном виде содержат корреляторы функции Грина с  $\text{div } \mathbf{u}$ . Эти формулы являются надежным фундаментом для решения проблемы вычисления коэффициентов турбулентной диффузии в сжимаемой среде. Приближения появляются только при том или ином способе нахождения или аппроксимации точной функции Грина. В данной работе выведены расчетные формулы для вычисления  $D_T$ , учитывающие вклады корреляторов второго и четвертого порядков всех степеней, что является прямым следствием нелинейности *DIA*-уравнений. Для определенности рассматривается диффузия примесных частиц в турбулентной среде.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Закон сохранения примесных частиц приводит к следующему уравнению для их концентрации  $n(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2 \right) n(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r}, t)). \quad (1)$$

Здесь  $D_m$  — коэффициент молекулярной диффузии, а  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — поле скоростей турбулентной среды, статистический ансамбль которого считаем однородным, изотропным и стационарным. Член в правой части имеет смысл источника частиц, появляющихся в элементе объема как за счет переноса (конвекции) частиц из мест с большей концентрацией, так и вследствие сжатия самого элемента объема среды (напомним, что  $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \Delta V/V dt$  имеет смысл относительного изменения элемента объема среды в единицу времени).

Решение (1) при заданном лагранжевом поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  при  $D_m = 0$  имеет вид [19, 20]

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)) / D(\mathbf{a}, t) \equiv n(\mathbf{a}, t) / D(\mathbf{a}, t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  и  $\mathbf{a}$  — координата жидкой частицы в начальный момент времени  $t = 0$ . Величина  $n_0(\mathbf{a})$  означает начальную концентрацию примесных частиц. Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{X}(\mathbf{a}, t) \equiv \mathbf{a} + \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{a}, t), \quad (3)$$

$$D_{ij}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \quad D(\mathbf{a}, t) = \det D_{ij}, \quad \dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \frac{\dot{D}}{D} = \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

$$D_{sp} \dot{D}_{pq}^{-1} = -\frac{\partial v_s}{\partial a_q}, \quad d\mathbf{r} = D(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a}. \quad (5)$$

Как обычно, по повторяющимся индексам проводится суммирование. Задание случайного поля лагранжевых скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  определяет ансамбль реализаций турбулентных течений, по которому надо усреднить решение (2), чтобы получить уравнения для средней концентрации  $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle$ . При фиксированных  $\mathbf{r}$  и  $t$  величина  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  является случайной и задача сводится к усреднению известной функции  $n_0(\mathbf{a})$  случайного аргумента  $\mathbf{a}$  со случайным же весовым множителем  $1/D(\mathbf{a}, t)$ . Переход к диффузионному приближению предполагает гладкость  $n_0(\mathbf{a})$  на характерной длине  $R_0 \simeq \sqrt{\langle X^2 \rangle}$  и использование разложения в ряд Тейлора по  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  [3, 9]. В результате получаем точную формулу для коэффициента турбулентной диффузии в лагранжевом представлении:

$$D_T = \frac{1}{3} \int_0^t d\tau \left\langle \frac{\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)\mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau)}{D(\mathbf{a}, t)} \right\rangle, \quad (6)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по ансамблю реализаций скоростей. В отсутствие сжимаемости среды ( $D(\mathbf{a}, t) \equiv 1$ ) формула (6) переходит в известное выражение Тейлора [2].

В эйлеровом представлении, согласно [5], выражение для  $D_T(t)$  имеет вид

$$D_T(t_1) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{R} \int_0^{t_1} dt_2 [\langle u_i(1)G(1,2)u_i(2) \rangle - \langle \mathbf{R}\mathbf{u}(1)G(1,2)\text{div}\mathbf{u}(2) \rangle]. \quad (7)$$

Здесь и далее использованы удобные обозначения:  $f(1) = f(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $f(1-2) = f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$ ,  $dn = d\mathbf{r}_n dt_n$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$  и т.д.,  $G(1,2)$  — функция Грина уравнения (1). Ее формальное выражение в лагранжевых обозначениях имеет вид

$$G(1,2) = \frac{D(\mathbf{a}, t_2)}{D(\mathbf{a}, t_1)} \delta \left( \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \int_{t_2}^{t_1} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \right). \quad (8)$$

Подставляя это выражение в (7) и используя соотношения (4) и (5), вновь получаем формулу (6). Мы видим, что и лагранжева, и эйлерова точные формулы для  $D_T$  содержат в явном виде корреляторы  $\text{div}\mathbf{u}$  (или  $\text{div}\mathbf{v}$ ), что согласуется с качественным рассмотрением во Введении. Далее будем использовать только эйлерову формулу (7), которая в отличие от лагранжевой позволяет учесть и влияние молекулярной диффузии, что просто необходимо делать при рассмотрении акустической турбулентности.

Точное линейное интегральное уравнение для стохастической функции Грина  $G(1,2)$  уравнения (1) имеет вид

$$G(1,2) = G_m(1-2) - \int d3 G_m(1-3) \nabla^{(3)} \mathbf{u}(3) G(3-2), \quad (9)$$

где молекулярная функция Грина  $G_m(1-2) \equiv G_m(\mathbf{R}, \tau)$  имеет простое выражение:

$$G_m(\mathbf{R}, \tau) = \frac{H(\tau)}{(4\pi D_m \tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{R^2}{4D_m \tau} \right], \quad (10)$$

Здесь  $H(\tau) = 1$  для  $\tau > 0$  и  $H(\tau) = 0$  для  $\tau < 0$  — известная функция Хевисайда. Подстановка итераций этого уравнения в (7) приводит к ряду по степеням параметра  $\xi_0 = u_0 p_0 \tau_0$ , являющемуся асимптотически расходящимся рядом, в котором чаще всего имеет смысл удерживать только первый член, так как остальные либо очень велики (акустическая турбулентность), либо просто расходятся (турбулентность с широким спектром, типа колмогоровского). Подробнее об этом см. [12].

Из стохастического уравнения (1) видно, что усредненная концентрация частиц  $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle$  связана с флуктуационной и наоборот. Поэтому попытки написать отдельное замкнутое уравнение только для усредненной функции Грина  $\langle G(1,2) \rangle \equiv G(1-2)$  приводят к иерархии нелинейных уравнений (см. [10, 12]). Уравнение (9) можно написать в перенормированной форме, используя, в частности, и в свободном члене, и в ядре саму усредненную функцию Грина  $G(1-2)$ , точнее, решение какого-либо усеченного уравнения иерархии. Подстановка итераций этого перенормированного уравнения в (7) приводит к хорошо асимптотически сходящемуся ряду, пригодному для вычисления  $D_T$  для любых значений числа Струхала ( $0 < \xi_0 < \infty$ ) (более подробно см. [10, 12]). Простейшим из иерархии нелинейных уравнений является, так называемое DIA-уравнение. Оно имеет следующий вид:

$$G(1-2) = G_m(1-2) + \int d3 \int d4 G_m(1-3) \nabla_i^{(3)} G(3-4) \nabla_j^{(4)} B_{ij}(3-4) G(4-2). \quad (11)$$

Здесь  $B_{ij}(1-2) \equiv \langle u_i(1)u_j(2) \rangle$  — двухточечный коррелятор скоростей. В дальнейшем удобно использовать фурье-преобразование этого коррелятора, а также и самой функции Грина  $G(\mathbf{R}, \tau) \equiv H(\tau)g(\mathbf{R}, \tau)$ :

$$B_{nk}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) \tilde{B}_{nk}(\mathbf{p}, \tau),$$

$$\tilde{B}_{nk}(\mathbf{p}, \tau) = (\delta_{nk}p^2 - p_n p_k) f(p, \tau) + p_n p_k W(p, \tau) + i e_{nkq} p_q D(p, \tau). \quad (12)$$

Выражение (12) является наиболее общим видом двухточечного коррелятора скоростей для однородной, изотропной и стационарной турбулентности [21]. Функция  $D$  описывает спиральность турбулентных движений ( $h = \langle \mathbf{u}(1) \text{rot } \mathbf{u}(2) \rangle \neq 0$ ) и в зеркально-симметричной среде  $D = 0$ . В несжимаемой среде ( $\text{div } \mathbf{u} = 0$ )  $W = 0$ . Следует отметить, что в DIA-уравнение (11) спиральность не входит. Поэтому в отсутствие спиральности в среде это уравнение описывает также диффузию примесного магнитного поля. Обобщенный спектр турбулентности, определяемый выражением

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dp \left[ p^4 f(p, \tau) + \frac{p^4 W(p, \tau)}{2} \right], \quad (13)$$

является суммой спектра несжимаемых движений ( $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ) и сжимаемых, потенциальных ( $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ ) движений. Обозначим их соответственно

$$E_{inc}(p, \tau) = \frac{p^4 f(p, \tau)}{\pi^2}, \quad E_{comp}(p, \tau) = \frac{p^4 W(p, \tau)}{2\pi^2}. \quad (14)$$

Численно удобно решать уравнение для фурье-преобразованной по  $\mathbf{R}$  и лаплас-преобразованной по  $\tau$  функции  $g(\mathbf{R}, \tau)$ , обозначим ее  $\tilde{g}(p, s)$ . Преобразованное таким путем DIA-уравнение принимает следующий вид:

$$\tilde{g}(p, s) = \left\{ s + D_m p^2 + \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau \left[ \frac{(1 - \mu^2) p^2 E_{inc}(q, \tau)}{4} + \frac{\mu p (\mu p - q) E_{comp}(q, \tau)}{2} \right] \tilde{g}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) \exp(-s\tau) \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Здесь  $\mu = \mathbf{p}\mathbf{q}/pq$  — косинус угла между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ ,  $\tilde{g}(p, \tau)$  является фурье-трансформантой по  $\mathbf{R}$  функции  $g(\mathbf{R}, \tau)$ . Ряд итераций этого уравнения представляет собой быстро сходящуюся цепную дробь.

### 3. DIA-ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФфуЗИИ

DIA-формулы для коэффициента турбулентной диффузии  $D_T$  можно получить либо непосредственно из уравнений (11) и (15), переходя в них к диффузионному приближению, либо из общей формулы (7), подставляя в нее вместо точной функции Грина

$G(1, 2)$  ее  $DIA$ -приближение  $G(1 - 2)$ . В результате получаем

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau \left\{ [E_{inc}(p, \tau) + E_{comp}(p, \tau)] \tilde{g}(p, \tau) + E_{comp}(p, \tau) p \frac{\partial}{\partial p} \tilde{g}(p, \tau) \right\}. \quad (16)$$

Здесь и далее мы ограничимся вычислением стационарных значений  $D_T$ , полагая бесконечным верхний предел в интеграле по времени  $\tau$ . Член с производной от функции Грина описывает влияние сжимаемости среды. Именно он отсутствует в формулах работ [17, 18].

Для учета поправок к  $D_T$ , определяемых вкладом не учитываемых в (16) корреляторов четвертого порядка неприводимого типа (см. [13]), представим здесь соответствующие формулы. Имеем

$$D_T = D_T^{(0)} + D_{inc}^{(1)} + D_{comp}^{(1)} + D_{mix}^{(1)} + D_h^{(1)} + \dots$$

Добавочные члены с соответствующими нижними индексами обозначают вклады от спектров несжимаемых, сжимаемых и смешанных движений и вклад от спиральных движений (*helicity*). При вычислении поправок учитывался явный вид второго члена иерархии нелинейных уравнений для средней функции Грина, вполне аналогичный по структуре соответствующему члену в работе [13], посвященной диффузии магнитного поля. При этом мы считали ансамбль скоростей гауссовым, т. е. корреляторы нечетного порядка полагали равными нулю, а четного — выражающимися через всевозможные парные корреляторы:

$$D_{inc}^{(1)} = \frac{1}{24} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 p q \mu (1 - \mu^2) \times \\ \times E_{inc}(q, \tau_1 + \tau_2) E_{inc}(p, \tau_2 + \tau_3) \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2), \quad (17)$$

$$D_h^{(1)} = \frac{1}{24} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 (1 - \mu^2) \times \\ \times E_h(q, \tau_1 + \tau_2) E_h(p, \tau_2 + \tau_3) \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2), \quad (18)$$

$$D_{comp}^{(1)} = -\frac{1}{6} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \mu E_{comp}(q, \tau_1 + \tau_2) E_{comp}(p, \tau_2 + \tau_3) \times \\ \times \{ [2pq + (p^2 + q^2)\mu + pq\mu^2] \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2) + pq(q + p\mu) \times \\ \times [\tilde{g}'(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2) + \mu \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}'(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2) + \\ + (q + p\mu)|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^{-1} \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}'(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2)] \} \quad (19)$$

(здесь  $\tilde{g}'(p, \tau) = \partial \tilde{g}(p, \tau) / \partial p$ ,

$$D_{mix}^{(1)} = -\frac{1}{12} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 p E_{inc}(q, \tau_1 + \tau_2) E_{comp}(p, \tau_2 + \tau_3) \times \\ \times \{ 2(q\mu + p)(1 - \mu^2) \tilde{g}(q, \tau_1) \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2) + pq\mu(1 - \mu^2) \tilde{g}(q, \tau_1) \times \\ \times [\tilde{g}'(p, \tau_3) \tilde{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2) + p|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^{-1} \tilde{g}(p, \tau_3) \tilde{g}'(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2)] \}. \quad (20)$$

В формулах (17)–(20) можно использовать *DIA*-решения  $\tilde{g}(p, \tau)$ , а не решения второго уравнения иерархии нелинейных уравнений, так как различия между ними (в отношении вычисления  $D_T$ ) сказываются только в членах, учитывающих неприводимые корреляторы шестого порядка.

Из этих формул видно, что  $D_h^{(1)} > 0$ , а  $D_{inc}^{(1)} < 0$ . При этом мы считали, что  $\tilde{g}(p, \tau)$  является монотонно убывающей функцией обоих аргументов (в диффузионном приближении это так и есть), и что обобщенные спектры принимают максимальные значения при  $\tau = 0$ . Кажется естественным, что спиральность увеличивает коэффициент турбулентной диффузии скалярной примеси — ее наличие означает добавочную регулярность в турбулентных движениях, что обеспечивает более далекий перенос примеси. Напомним здесь, что под спектром спиральности понимается

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \int_0^\infty dp E_h(p, \tau), \quad E_h(p, \tau) = -\frac{p^4 D(p, \tau)}{\pi^2}. \quad (21)$$

*DIA*-функция Грина  $\tilde{g}(p, \tau)$  при малых  $p$  (большие расстояния) и больших  $\tau$  переходит в функцию Грина уравнения диффузии с коэффициентом диффузии  $D = D_T^{(0)} + D_m$ . С другой стороны, именно крупномасштабные турбулентные движения вносят главный вклад в процесс переноса примесных частиц. Поэтому хорошим приближенным методом оценки величины  $D_T$  является подстановка в (16) вместо точного значения  $\tilde{g}(p, \tau)$  их диффузионного выражения  $\tilde{g}_{diff} = \exp(-D_s p^2 \tau)$  с неизвестным коэффициентом диффузии  $D_s$ . Уравнение (16) становится тогда нелинейным уравнением для нахождения самосогласованного коэффициента диффузии  $D_s$ . По-видимому, впервые этот способ был предложен в работе [22].

Среднее значение  $\langle R^2(t) \rangle$  размытия первоначального точечного источника примесных частиц ( $\langle R^2(t) \rangle = -\nabla_p^2 \tilde{g}(p, t)_{p=0}$ ), согласно *DIA*-уравнению (15), имеет вид

$$\begin{aligned} \langle R^2(t) \rangle &= 6D_m t + 2 \int_0^\infty dp \int_0^t d\tau (t - \tau) \times \\ &\times \left\{ E_{inc}(p, \tau) \tilde{g}(p, \tau) + E_{comp}(p, \tau) \left[ \tilde{g}(p, \tau) + p \frac{\partial \tilde{g}(p, \tau)}{\partial p} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

При  $t \gg \tau_0$  эта формула переходит в известное диффузионное выражение  $\langle R^2(t) \rangle = 6(D_m + D_T^{(0)})t$ . Формула (22) может также служить для проверки правильности выбора каких-либо аппроксимирующих выражений для функции Грина  $\tilde{g}(p, \tau)$ .

#### 4. АКУСТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Под акустической турбулентностью понимают среду с хаотически распространяющимися акустическими волнами. Такая турбулентность существует, например, в солнечной короне. Если турбулентность стационарна, а именно этот случай мы будем рассматривать, то примесные частицы главным образом совершают периодические колебательные движения вместе с основной жидкостью или газом. Никакой диффузии при этом не происходит, если отвлечься от малой молекулярной диффузии. Источниками дополнительной, помимо молекулярной, диффузии здесь являются три процесса. Во-первых, сама молекулярная диффузия протекает интенсивнее, если частицы не

покоятся, а участвуют в колебательных движениях. Во-вторых, уменьшение амплитуды звуковых волн (поглощение) и хаотический сбой фаз волн, вызванный, например, столкновениями с хаотически движущимися препятствиями, приводят к сдвигам центров колебаний, что нарушает периодичность движения примесной частицы, и ее поведение становится похожим на поведение пьяницы из известной модели стохастического движения, рассмотренной еще Тейлором в его знаменитой работе [2]. Отличие от этой модели, однако, имеется: частица все-таки большую часть времени колеблется, и перескоки — редкое явление. Поглощение волн, обусловленное наличием вязкости [23], мало по величине и описывается коэффициентом поглощения  $\gamma = \kappa p^2 (c^{-1})$ , где  $p$  — волновое число, а  $\kappa$  по порядку величины совпадает с коэффициентом молекулярной диффузии  $D_m$ . Сбой фаз, по-видимому, осуществляется легче, чем истинное поглощение энергии волны, но сильно зависит от конкретной реализации акустической турбулентности. Важно отметить, что в спектр турбулентности он дает функционально такой же вклад, что и истинное поглощение (см. Приложение).

Стационарная однородная и изотропная акустическая турбулентность описывается коррелятором [18]

$$\tilde{B}_{nk}(\mathbf{p}, \tau) = p_n p_k \Phi(p) \cos[\omega(p)\tau] \exp[-\gamma(p)\tau], \quad (23)$$

где  $\omega(p) = cp$  — частота волны,  $c$  — скорость волны. Под  $\tau$  здесь и далее мы подразумеваем абсолютное значение разности времен:  $\tau = |t_1 - t_2|$ . Спектр  $E \equiv E_{comp}(p, \tau)$ , соответствующий (23), имеет вид

$$E_{comp}(p, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} p^4 \Phi(p) \cos[\omega(p)\tau] \exp[-\gamma(p)\tau]. \quad (24)$$

Ввиду заведомо малого значения  $D_T$  примем, как в работе [18],  $\tilde{g}(p, \tau) \simeq \exp(-D_m p^2 \tau)$ , но в отличие от этой работы не положим  $D_m = 0$ , так как сами значения  $D_T$  имеют тот же порядок, что и молекулярный коэффициент диффузии  $D_m$ . Подставляя это значение  $\tilde{g}(p, \tau)$  в общую формулу (16), получим

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^\infty dp E_{comp}(p, 0) \left\{ \frac{\gamma(p) + D_m p^2}{(\gamma + D_m p^2)^2 + c^2 p^2} - \frac{2D_m p^2 [(\gamma + D_m p^2)^2 - c^2 p^2]}{[(\gamma + D_m p^2)^2 + c^2 p^2]^2} \right\}. \quad (25)$$

Мы видим, что второй член в фигурных скобках, учитывающий сжимаемость среды, вообще говоря, имеет тот же порядок величины, что и первый, который только и существовал в работах [17, 18]. Для более конкретных оценок примем, как в работе [18], что затухание коррелятора (23) во времени определяется истинным поглощением энергии волн  $\gamma(p) = \kappa p^2$  с  $\kappa \approx D_m$ , т. е. пренебрежем вкладом в затухание фазовых сбоев. Учтем также, что  $(\kappa + D_m)p/c \approx l/r \ll 1$ , где  $l$  — длина свободного пробега молекулы. Формула (25) в этом случае дает

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3} M^2 (\kappa + 3D_m). \quad (26)$$

Здесь  $M = u_0/c$  — число Маха. Из (26) видно, что неучет молекулярной диффузии в три раза уменьшает величину коэффициента турбулентной диффузии, а также что вклад сжимаемости (точнее, второго члена в формуле (16)), равный  $2D_m$  в скобках, весьма существен. В акустической турбулентности сжимаемость увеличивает коэффициент



турбулентной диффузии в отличие от случая чисто хаотического наложения сжатий и разрежений среды. По-видимому, сжимаемость в этом регулярном волновом движении среды локально, в пределах длины волны, увеличивает градиент концентрации примеси, и молекулярная диффузия осуществляется более эффективно.

Мы здесь не касаемся сложной проблемы точности формул (25) и (26), которая в полной мере может быть решена только получением точного решения *DIA*-уравнения (15) и вычисления поправки (19). Отметим, что решение *DIA*-уравнения с быстроосциллирующей функцией в ядре представляет сложную математическую проблему. То, что все же эти формулы достаточно точны, подтверждается, правда косвенно, двумя обстоятельствами. Во-первых, подстановка  $\tilde{g}_m(p, \tau) = \exp(-D_m p^2 \tau)$  в *DIA*-уравнение (15) приводит к диффузионному решению, близкому по величине к подставленному, что подтверждает хороший выбор  $\tilde{g}_m(p, \tau)$  в качестве начального приближения. Во-вторых, использование самосогласованной процедуры вычисления  $D_T$  приводит к формуле

$$D_s = \left( D_m + \frac{1}{3} M^2 \kappa \right) \frac{1}{1 - M^2}, \quad (27)$$

которая при малых числах Маха дает те же результаты, что и (26) (напомним, что  $D_s$  представляет полный коэффициент диффузии, т. е. сумму молекулярного и турбулентного коэффициентов). Заметим также, что выражение (26) легко получить из (15) и (16) как первый член асимптотического ряда по степеням  $1/(cp)^2$ , используя лишь свойство нормировки  $\tilde{g}(p, 0) = 1$ .

## 5. НЕАКУСТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Под этим названием мы понимаем турбулентную среду, где происходят хаотические несжимаемые и (или) сжимаемые движения жидкости или газа без признаков какой-либо периодичности. Такую турбулентность можно рассматривать как противоположный предельный случай по отношению к акустической турбулентности. Такого вида турбулентность наблюдается, например, в областях звездообразования. На практике осуществляются также и промежуточные случаи. Спектры  $E_{comp}(p, \tau)$  и  $E_{inc}(p, \tau)$  в такой турбулентности могут иметь самый разный вид. Для определенности мы ограничимся экспоненциально затухающими со временем  $\tau$  спектрами. Наша задача — сравнить, насколько будут отличаться коэффициенты турбулентной диффузии в предельных случаях чисто несжимаемой и чисто сжимаемой (потенциальной) турбулентных сред, формально описываемых одними и теми же обобщенными спектрами:

$$E_{inc, comp}(p, \tau) = E(p) \exp(-\tau/\tau_0). \quad (28)$$

Для расчетов были выбраны несколько видов спектров  $E(p)$ :

$$E(p) = u_0^2 \delta(p - p_0), \quad (29)$$

$$E(p) = (u_0^2/p_0) 0.65159 x^4 / (1 + x^{17/3}). \quad (30)$$

Спектры (29) и (30) являются предельными — пикообразным и широким (колмогоровским в инерционной области) — спектрами. В спектре (30) и далее  $x = p/p_0$ . Кроме того, были рассмотрены спектры промежуточного вида:

$$E(p) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{u_0^2}{p_0} x^4 \exp(-x^2), \quad (31)$$

$$E(p) = \frac{128}{3} \frac{u_0^2}{p_0} x^4 \exp(-4x), \quad (32)$$

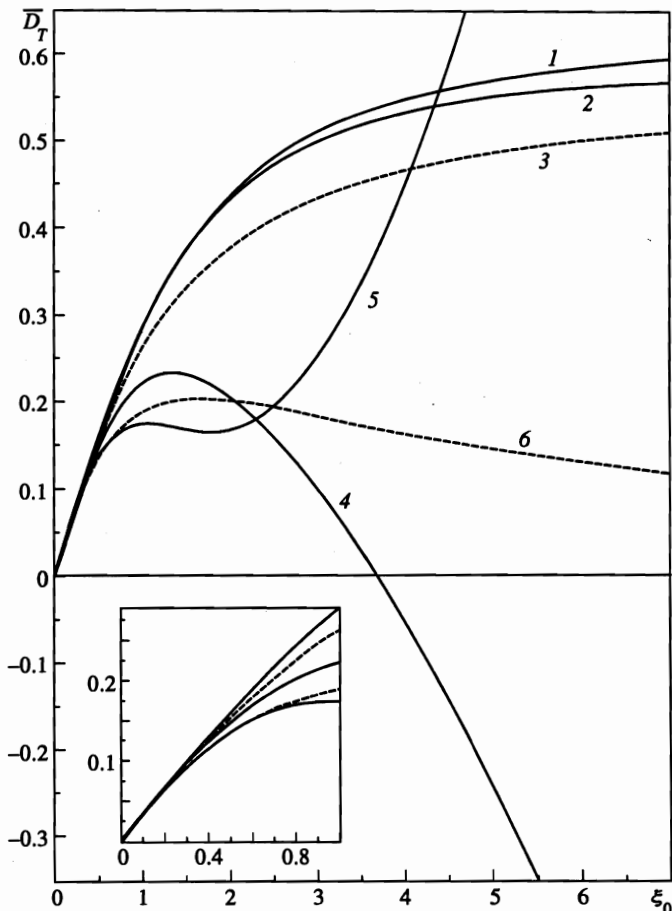
$$E(p) = 5 \frac{u_0^2}{p_0} \frac{x^4}{(1+x)^6}. \quad (33)$$

Функции Грина  $\tilde{g}(p, \tau)$  вычислялись из *DIA*-уравнения (15), а коэффициенты диффузии  $D_T^{(0)}$ ,  $D_{inc}^{(1)}$ ,  $D_{comp}^{(1)}$  — по формулам (16), (17) и (19). Результаты вычислений для безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T$  ( $D_T = (u_0/p_0)\bar{D}_T$ ) представлены на рис. 1–5. Кривые 1, 2, 3 представляют коэффициенты  $\bar{D}_T^{(0)}$ ,  $\bar{D}_T^{(0)} + \bar{D}_{inc}^{(1)}$  и  $\bar{D}_s$  (штриховая линия) для несжимаемой среды. Величина  $\bar{D}_T^{(0)}$  дает несколько завышенные значения коэффициента турбулентной диффузии и отрицательная поправка  $\bar{D}_{inc}^{(1)}$  немного уменьшает эту величину. При  $\xi_0 \rightarrow \infty$  все эти кривые стремятся к конечным пределам [12], соответствующим так называемой замороженной турбулентности, определяемой долгоживущими вихрями. Монотонное увеличение коэффициентов турбулентной диффузии соответствует этому увеличению времени жизни турбулентных вихревых движений.

Совсем другой вид имеют соответствующие зависимости (кривые 4, 5, 6) для сжимаемой (потенциальной) турбулентности. Прежде всего бросается в глаза то, что величины  $\bar{D}_T^{(0)}$  принимают отрицательные значения для острых спектров при  $\xi_0 \geq 3$ , а для широких — при  $\xi_0 \geq 5$ . Означает ли это наличие отрицательной диффузии, т. е. потока примеси в сторону мест с большей концентрацией? Нет, не означает по двум причинам. Прежде всего — по формальной: следующее приближение  $\bar{D}_{comp}^{(1)}$  положительно в области, где  $\bar{D}_T^{(0)} < 0$ , и суммарный результат положителен. Кроме того, видно, что для  $\xi_0 \geq 1$  величину  $\bar{D}_{comp}^{(1)}$  уже нельзя рассматривать как поправку, т. е. для  $\xi_0 \geq 1$  теория непригодна. Вторая причина имеет физическое обоснование и заодно поясняет, почему *DIA*-уравнение «не работает» для области  $\xi_0 \geq 1$ . Дело в том, что рассматривая турбулентность как хаотическую смесь неосциллирующих сжатий и разрежений (наши корреляторы описывают именно такой тип движений), бессмысленно рассматривать случаи с  $\xi_0 \geq 1$  — они не могут реализоваться в природе. Если долгоживущие вихревые движения в несжимаемой среде могут существовать, т. е. случаи с  $\xi_0 \gg 1$  реально имеют место, то объемные неосциллирующие сжатия и разрежения характеризуются временем жизни  $\tau_0$ , которое непосредственно связано со степенью сжатия (или разрежения)  $|\Delta V|/V$ . Для оценки  $\tau_0$  используем известное соотношение

$$\left(\frac{\Delta V}{V\tau_0}\right)^2 \cong \langle \text{div}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv \int_0^\infty dp p^2 E_{comp}(p) \approx u_0^2 p_0^2. \quad (34)$$

Отсюда следует искомое выражение  $\tau_0 \approx \langle |\Delta V/V| \rangle / u_0 p_0$  и, следовательно,  $\xi_0 = u_0 p_0 \tau_0 \approx \langle |\Delta V/V| \rangle$ . Величина среднего относительного изменения объема, определяющая параметр  $\xi_0$ , зависит от конкретных физических условий сжатия и разрежения газа. Так,



**Рис. 1.** Значения безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T = D_T / (u_0 / \rho_0)$  для случая турбулентности с  $\delta$ -образным спектром энергии (29). Кривые 1, 2, 3 — соответственно  $\bar{D}_T^{(0)}$ ,  $\bar{D}_T^{(0)} + \bar{D}_{inc}^{(1)}$  и  $\bar{D}_s$  для случая несжимаемой среды. Кривые 4, 5, 6 — аналогичные величины для сжимаемой турбулентности с тем же спектром энергии. Коэффициент  $\bar{D}_T^{(0)}$  (кривая 4) приобретает отрицательные значения при  $\xi_0 = u_0 \rho_0 \tau_0 > 3$ . На вставке — начальные участки кривых в увеличенном масштабе

для адиабатических процессов [24] выполняется соотношение  $|\Delta V / V| < 2\gamma / (1 + \gamma)$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты ( $p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ ). Для одноатомного газа  $\gamma = 5/3$  и  $|\Delta V / V| < 5/4$ .

Из приведенных рисунков видно, что сжимаемость при неакустической турбулентности существенно уменьшает значение коэффициента турбулентной диффузии  $D_T$  по сравнению со случаем несжимаемой турбулентности, характеризуемой тем же обобщенным спектром в области  $\xi_0 \geq 0.5$ . Это объясняется неэффективностью сжатий и разрежений при переносе примеси из одной точки в другую по сравнению с конвективными движениями в несжимаемой среде.

Отметим, что само появление отрицательных значений  $D_T$  в DIA-решениях для сжимаемой среды весьма естественно, так как именно в такой среде возможно усиление

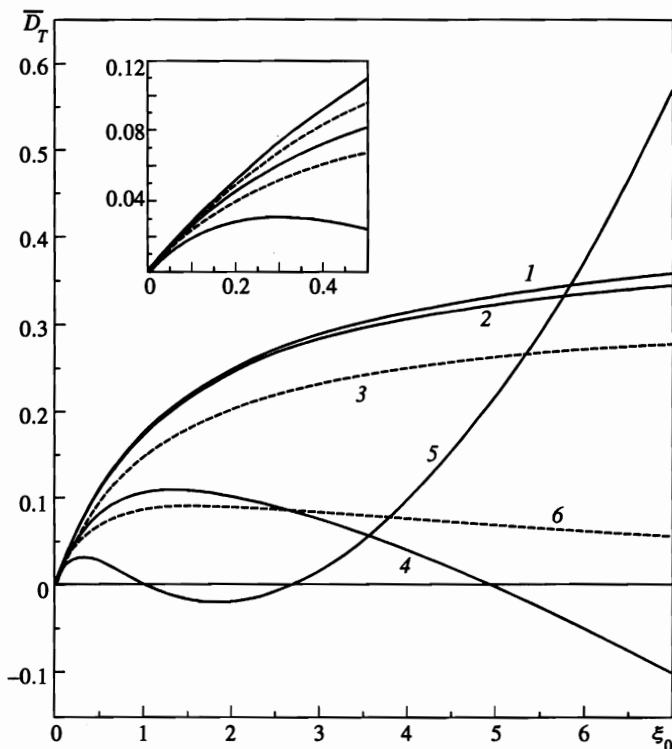


Рис. 2. Значения безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T = D_T/(u_0/p_0)$  для случая турбулентности со спектром энергии (30). Обозначения те же, что и на рис. 1

крупномасштабных структур турбулентностью [25].

В реальных условиях сосуществуют и сжимаемые, и несжимаемые турбулентные движения. Вышеприведенные общие формулы позволяют вычислить коэффициенты диффузии и в этих случаях. Более того, в этом смешанном случае сходимость метода последовательных приближений при решении *DIA*-уравнения лучше, чем при чисто потенциальной турбулентности.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведены общие формулы для расчета коэффициентов турбулентной диффузии  $D_T$  в сжимаемой среде, учитывающие вклад всех степеней корреляторов скорости второго и четвертого порядков. Показано также, что неучитывавшийся ранее другими авторами дополнительный член, описывающий корреляцию  $\text{div } \mathbf{u}$  со стохастической функцией Грина, дает существенный вклад в величину  $D_T$ . Впервые полученные численные решения нелинейного *DIA*-уравнения для ряда моделей сжимаемой турбулентности показали, что сжимаемость существенно уменьшает величину  $D_T$  в случае неакустической турбулентности по сравнению со значением  $D_T$  для несжимаемой турбулентности с тем же спектром энергии. Для акустической турбулентности, напротив,

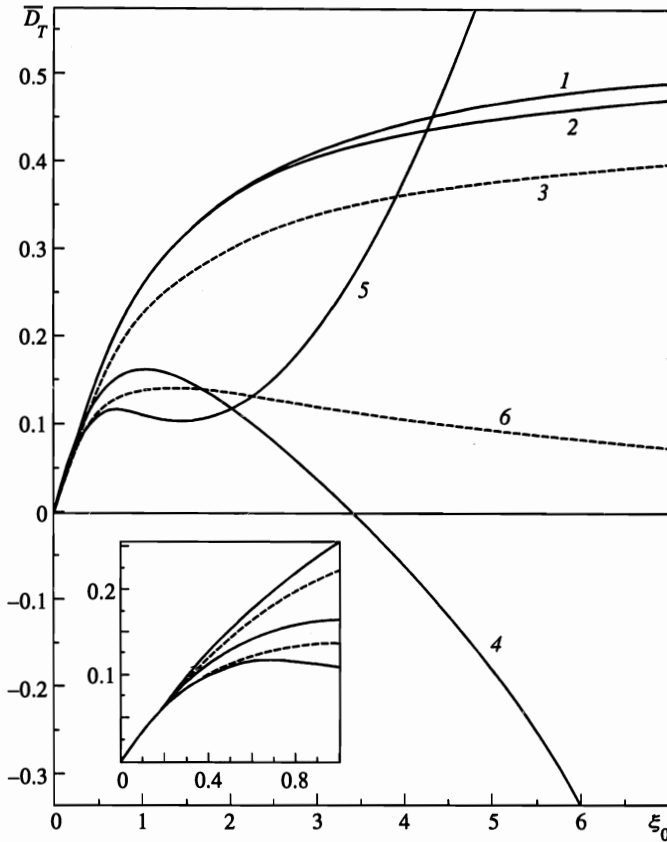


Рис. 3. Значения безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T = D_T/(u_0/p_0)$  для случая турбулентности со спектром энергии (31). Обозначения те же, что и на рис. 1

из-за сжимаемости величина  $D_T$  больше молекулярной  $D_m$ , оставаясь сравнимой с ней по порядку величины, как это было установлено с меньшей точностью другими авторами [18]. Показано также, что DIA-уравнение вполне пригодно для нахождения  $D_T$  в сжимаемых средах, если оставаться в рамках физически допустимых значений параметра  $\xi_0 = u_0 p_0 \tau_0$ . Все результаты, полученные в статье, полностью применимы для коэффициентов турбулентной диффузии также и в случае диффузии магнитного поля в среде без спиральности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем здесь простой вывод коррелятора скоростей в акустической турбулентности и покажем, что затухание во времени коррелятора происходит также из-за случайного сбоя фаз. Имея в виду, что  $u_i(\mathbf{r}, t) = \nabla_i \varphi(\mathbf{r}, t)$ , где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — стохастический потенциал, представим ансамбль хаотических волн в виде [26]

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{p}_n, t) \cos[\mathbf{p}_n \mathbf{r} - \omega_n t + \alpha_{0n} + \alpha_n(t)]. \tag{П.1}$$

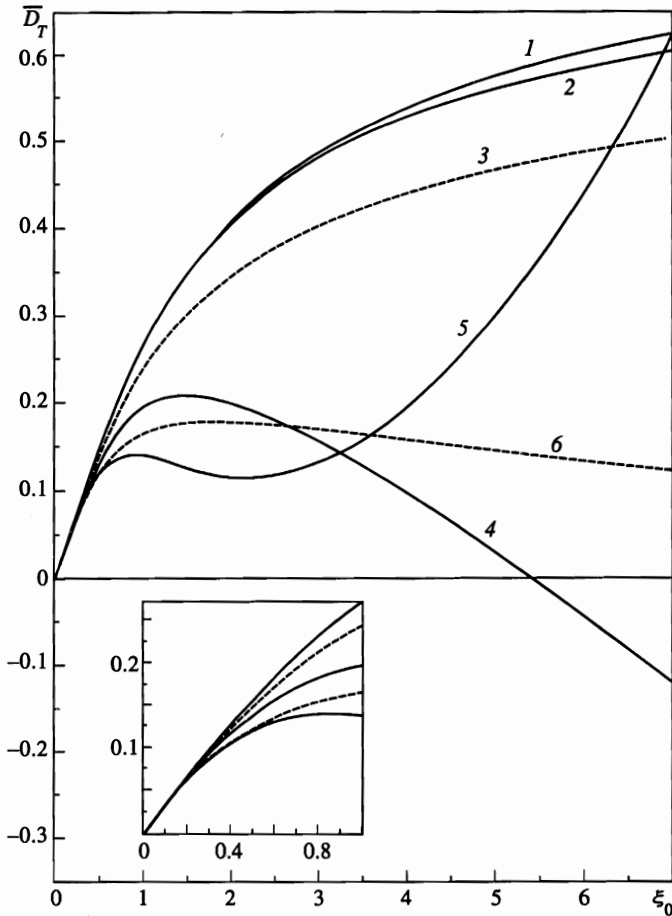


Рис. 4. Значения безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T = D_T/(u_0/p_0)$  для случая турбулентности со спектром энергии (32). Обозначения те же, что и на рис. 1

Здесь  $\mathbf{p}_n$  — волновой вектор  $n$ -ой волны,  $\omega_n = c p_n$  — частота волны. Из-за поглощения волны в среде амплитуда  $\varphi_n$  зависит от времени  $t$ ,  $\alpha_{0n}$  — случайная начальная фаза волны,  $\alpha_n(t)$  — текущая фаза при прохождении волны в среде (считается, что она слабо изменяется за время равное периоду волны). Коррелятор скоростей есть  $B_{ij}(\mathbf{R}, \tau) = -\nabla_i \nabla_j W(\mathbf{R}, \tau)$ , где  $W(\mathbf{R}, \tau) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t') \rangle$  — коррелятор потенциала,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\tau = t - t'$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t') \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \langle \varphi_n \varphi_m \rangle \times \\
 &\times \left\{ \cos [\mathbf{p}_n \mathbf{r} + \mathbf{p}_m \mathbf{r}' - \omega_n t - \omega_m t' + \alpha_{0n} + \alpha_{0m} + \alpha_n(t) + \alpha_m(t')] + \right. \\
 &\left. + \cos [\mathbf{p}_n \mathbf{r} - \mathbf{p}_m \mathbf{r}' - \omega_n t + \omega_m t' + \alpha_{0n} - \alpha_{0m} + \alpha_n(t) - \alpha_m(t')] \right\}. \tag{П.2}
 \end{aligned}$$

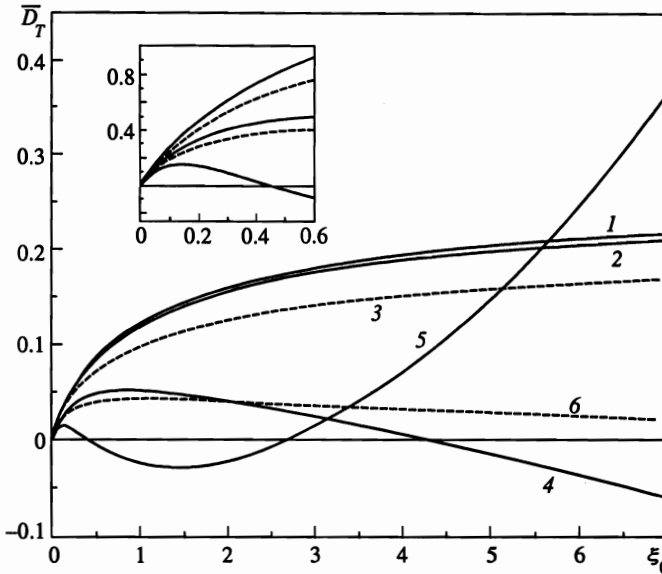


Рис. 5. Значения безразмерных коэффициентов турбулентной диффузии  $\bar{D}_T = D_T/(u_0/p_0)$  для случая турбулентности со спектром энергии (33). Обозначения те же, что и на рис. 1

Усреднение с весом  $1/2\pi$  по независимым начальным фазам  $\alpha_{0n}$  и  $\alpha_{0m}$  приводит к равенству  $n = m$ , а усреднение амплитуд дает в стационарном случае  $\langle \varphi_n(t)\varphi_n(t') \rangle = 2\Phi(p_n, \tau)$ . Выражение для  $W(\mathbf{R}, \tau)$  приобретает вид

$$W(\mathbf{R}, \tau) = \sum_n \Phi(p_n, \tau) \langle \cos [\mathbf{p}_n \mathbf{R} - \omega_n \tau + \alpha_n(t) - \alpha_n(t')] \rangle. \tag{П.3}$$

Предполагаем, что  $\alpha_n(t)$  является стационарным гауссовским процессом, т. е. выполняется равенство  $\langle \alpha_n(t)\alpha_n(t+\tau) \rangle = \alpha_0^2 \alpha(|\tau|)$ , где функция  $\alpha(\tau)$  равна единице при  $\tau = 0$  и затухает во времени, скажем, как  $\exp(-\tau/\tau_0) \approx 1 - \tau/\tau_0$ . Как известно [26],

$$\langle \exp \{ \pm i [\alpha_n(t) - \alpha_n(t')] \} \rangle = \exp \{ -\alpha_0^2 [1 - \alpha(\tau)] \} \simeq \exp (-\alpha_0^2 \tau / \tau_0). \tag{П.4}$$

В результате (П.3) приобретает свой окончательный вид:

$$W(\mathbf{R}, \tau) = \sum_n \Phi(p_n, \tau) \cos(\mathbf{p}_n \mathbf{R} - \omega_n \tau) \exp \left( -\frac{\alpha_0^2 \tau}{\tau_0} \right). \tag{П.5}$$

Переходя от суммы к интегралу по волновым векторам, получаем выражение эквивалентное соотношению (23) в тексте статьи.

### Литература

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика, Том 2*, Наука, Москва (1967).

2. G. I. Taylor, Proc. Lond. Math. Soc. A **20**, 196 (1921).
3. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **65**, 1 (1974).
4. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **75**, 657 (1976).
5. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **63**, 139 (1992).
6. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
7. P. H. Roberts, J. Fluid Mech. **11**, 257 (1961).
8. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **13**, 22 (1970).
9. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **77**, 753 (1976).
10. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **101**, 1216 (1992).
11. N. A. Silant'ev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **75**, 183 (1994).
12. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **111**, 871 (1997).
13. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **112**, 1312 (1997).
14. K. O. Eschrich, Astron. Nachr. **299**, 137 (1978).
15. Н. А. Силантьев, Письма в АЖ **16**, 860 (1990).
16. N. A. Silant'ev and M. D. Korolkov, Astron. Nachr. **311**, 107 (1990).
17. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике*, Наука, Москва (1980).
18. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **88**, 487 (1985).
19. P. H. Roberts, *An introduction to magnetohydrodynamics*, Elsevier, London (1967).
20. E. N. Parker, *Cosmical magnetic fields*, Clarendon Press, Oxford (1979).
21. G. K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge (1953).
22. R. Phythian and W. D. Curtis, J. Fluid Mech. **89**, 241 (1978).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
24. J. I. Katz, *High energy astrophysics*, Addison-Wesley, Massachusetts (1987).
25. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, Г. А. Хоменко, В. В. Яновский, ЖЭТФ **85**, 1979 (1983).
26. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чуркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).