

СТРУКТУРА НУЛЕВЫХ МОД В МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО (2 + 1)-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Л. А. Абрамян^а, В. А. Вербус^б, А. П. Протогенов^{а}*

^а *Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия*

^б *Институт физики микроструктур Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 16 февраля 1998 г.

Изучена структура нулевых мод в дискретной (2 + 1)-мерной модели калибровочно-инвариантного нелинейного уравнения Шредингера. Учет компактификации калибровочных полей Черна–Саймонса приводит к устранению трудностей непрерывной модели [1] и предсказанию существования переходной области, характеризующейся иерархической последовательностью коллапсов, которые нумеруются коэффициентом Черна–Саймонса. Используя нулевые моды при вычислении зависимости критической мощности N от коэффициента Черна–Саймонса, мы обнаружили, что переходная область принадлежит интервалу $11.703 \leq N \leq 12.01$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является одной из основных моделей в теории нелинейных волн. Традиционной областью приложения НУШ является нелинейная оптика [2, 3], где оно описывает распространение волновых пучков в диспергирующих нелинейных средах. Временную переменную в этом случае заменяют на аксиальную координату z вдоль пучка в (2 + 1)-мерном НУШ. НУШ также возникает при изучении различных нелинейных волн в гидродинамике и физике плазмы (см., например, [4]). Одной из наиболее важных областей применения в этом случае является проблема детального описания коллапсирующих распределений поля как при использовании НУШ с локальной кубической нелинейностью [5, 6], так и в рамках уравнений Захарова [7]. В случае другого знака нелинейности (отталкивания) НУШ используется, например, для описания вихрей в проблеме бозе-конденсации [8], а также как базисная модель [9] низкоразмерной теории поля.

Недавнее возрастание интереса к НУШ в (2 + 1)-мерных системах было связано с попытками учета топологических особенностей многообразия, на котором определено поле в пространственно-двумерных системах. Это может быть сделано с помощью калибровочного поля и замены в уравнении движения обычных производных на ковариантные. Калибровочное поле удовлетворяет своему уравнению движения с током, определяемым решениями НУШ, и, являясь вспомогательной переменной, описывает дополнительный вклад в нелинейность стандартного НУШ. Основной вклад в инфракрасном пределе в уравнения движения для калибровочного поля в (2 + 1)-мерных системах вносит член Черна–Саймонса (ЧС) в действии рассматриваемой системы. При

* E-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

определенном соотношении констант связи вклад калибровочного поля компенсирует в гамильтониане вклад нелинейности, приводящей к коллапсу. При этом формируются солитонные распределения поля, найденные в работе [10]. Природу этого явления легко понять, если принять во внимание, что член ЧС нарушает в $(2 + 1)$ -мерных системах симметрию относительно \mathcal{P} - и \mathcal{T} -инверсий координат и времени. Выделенное направление вектора в направлении, перпендикулярном плоскости, можно воспринимать как выделенное направление вращения в плоскости, которое приводит к появлению эффективного отталкивания. В ситуации, когда это отталкивание компенсирует притяжение, изначально существовавшее в НУШ, гамильтониан оказывается ограниченным снизу, а его нулевому значению соответствуют самодуальные солитоны ЧС [10]. Эти распределения поля являются решениями уравнений дуальности.

Результаты работ [10–12] стимулировали появление потока работ в этом направлении. Обратим внимание на некоторые из них. В [13] были детально проанализированы структуры полевых конфигураций для такой нелинейной функции в НУШ, которая описывает отталкивание (в отсутствие взаимодействия ЧС), а также учитывает вклад отличного от нуля вакуумного среднего для плотности числа частиц. Формулировка начальной задачи в работе [14] привела авторов к выводу, что при наиболее общих начальных условиях решения уравнений движений для НУШ с учетом калибровочного поля ЧС при отрицательном значении гамильтониана соответствуют режиму коллапса. Однако как пространственная структура коллапсирующей моды, так и критическая мощность для нее (число частиц в моде) в этой работе не анализировались. Проблеме интегрируемости рассматриваемой модели посвящена работа [15]. Ее главный результат заключается в том, что за исключением двух случаев: самодуального предела [10] и ситуации, когда с помощью замены переменных $(2 + 1)$ -мерные уравнения можно свести к $(1 + 1)$ -мерной модели, система не является точно интегрируемой. Побочный, но не менее важный вывод этой работы состоял в том, что решения калибровочно-инвариантного НУШ имеют нестационарные особенности на некоторых кривых в двумерной плоскости. Детальное изучение топологических дефектов в низкоразмерных системах всегда было в значительной степени ключевым для понимания динамики распределений поля. Проблеме изучения так называемых полулокальных топологических дефектов в расширенной модели Черна–Саймонса–Хиггса была посвящена недавно опубликованная работа [16].

Основная причина весьма специфического поведения распределений поля $\Psi(x, y, t)$ в пространственно-двумерных системах состоит в том, что пространство определения комплекснозначных функций, \mathcal{M} , в этом случае является многосвязным. По этой причине фундаментальная гомотопическая группа $\pi_1(\mathcal{M})$, которая определяет аналитические свойства функции Ψ относительно преобразований ее аргументов, в $(2 + 1)$ -мерных системах совпадает не с группой перестановок, а с группой кос. Существует несколько практически эквивалентных способов отразить это обстоятельство в используемых средствах теории. Одним из них является лагранжев подход, включающий в рассмотрение действие ЧС. Член ЧС кодирует в длинноволновом приближении существование и специфику пространственно-двумерных точечных особенностей, содержащихся в бом-аароновских потенциалах калибровочного поля. О дальнедействующем взаимодействии, отраженном с помощью калибровочного поля ЧС, обычно говорят как о статистическом или корреляционном взаимодействии между различными полевыми конфигурациями. Самим распределениям поля Ψ при этом можно придать различную форму в зависимости от представления. Существует так называемое энионное пред-

ставление [17, 18], когда калибровочное поле в явной форме исключено из гамильтониана модели, обеспечивая картину «невзаимодействующих» (при помощи калибровочного поля) конфигураций поля $\Psi(x, y, t)$. Однако в этом случае калибровочное поле оказывается включенным в фазу функции $\Psi(x, y, t)$, содержащую разрез в комплексной плоскости, который обеспечивает многозначность этой функции. Разрез описывает струну, тянущуюся за точечным дефектом (так называемый нелокальный топологический дефект), разделяющую листы в многолистном покрытии двумерного базисного пространства. Как хорошо известно [17, 18], представление, когда калибровочное поле явно присутствует в лагранжиане модели, имеет разный вид в зависимости от четности представления группы перестановок. Однако корреляционные эффекты не зависят от представления, и энионная статистика в этом случае приобретает форму динамики дальнедействующего калибровочного поля. С этой точки зрения подход, основанный на представлении с дробной статистикой полевых конфигураций, идентичен динамическому подходу, когда нас интересует вид полевых распределений, подверженных влиянию «статистического» калибровочного поля.

Несмотря на то что причина существования калибровочного взаимодействия носит исключительно топологический (геометрический) характер и не связана с квантовой теорией, это взаимодействие, как правило (за исключением отмеченных выше работ), не принималось во внимание при изучении классической динамики нелинейных моделей с комплексным полем в пространственно-двумерных системах. Топологические особенности, конечно, накладывают дополнительные ограничения на процедуру квантования в такого рода системах [18]. При этом общим существенным свойством является использование как в квантовой, так и в классической теории комплексной функции $\Psi(x, y, t)$ с некоторым распределением ее фазы, которое в классической области приобретает форму фазовой динамики. Роль калибровочного взаимодействия ЧС в этом случае состоит в том, чтобы учесть вихревую часть фазовой динамики, которая обычно не учитывалась в классических системах при использовании модели $(2 + 1)$ -мерного НУШ.

В настоящей работе мы ставим своей задачей выяснить роль и величину топологических эффектов, связанных с нарушением киральной инвариантности в классических $(2 + 1)$ -мерных системах. С этой точки зрения НУШ может рассматриваться как полезный пример для решения этой задачи. Поэтому в настоящей работе продолжены исследования уравнений движения в $(2 + 1)$ -мерной модели калибровочно-инвариантного НУШ, начатые в [14, 15, 1]. В работе [1] основное внимание было уделено изучению структуры коллапсирующего распределения поля, являющегося решением $(2 + 1)$ -мерного НУШ, рассматриваемого в непрерывном пределе. В частности, с помощью численного интегрирования уравнения движения были найдены зависимости критической мощности и эффективной ширины основной моды от коэффициента k перед членом ЧС. Пределом $k \rightarrow \infty$, когда взаимодействие с калибровочным полем пренебрежимо мало, мы воспользовались в качестве теста. В этом случае восстанавливались известные значения мощности и ширины. Однако в области малых значений k используемая схема расчета приводила к расходимости критической мощности. Мы покажем в настоящей работе, что учет непертурбативных значений калибровочного поля позволяет продвинуться в область малых значений коэффициента k . Введение только пространственной решетки позволяет лишь частично учесть вклад конечных по амплитуде калибровочных полей. Поэтому для решения поставленной задачи мы включаем в рассмотрение два момента. Во-первых, рассматриваемая модель размещена на двумерной про-

странственной решетке. Обратим внимание на то, что стабильность солитонов НУШ на решетке без учета калибровочного поля подробно изучалась в недавно опубликованных работах [19, 20]. Во-вторых, мы учитываем дискретность времени. Дискретная эволюция при этом является необходимым условием. Мотивом для введения дискретного времени является требование единообразного описания вклада от больших по амплитуде пространственных и временных компонент калибровочного потенциала. Недавно опубликованные работы по изучению дискретной динамики поддерживают такой подход (см. ссылки в [21]).

Если фаза поля $\Psi(x, y, t)$ полностью описывает продольную часть в калибровочном потенциале, то эволюция полевых конфигураций определяется только временной зависимостью калибровочного поля. В этом случае законы сохранения в системе ЧС: закон Гаусса и закон сохранения числа частиц, эквивалентны уравнениям движения идеальной жидкости в вихревой форме. Эффекты проявления калибровочной связности в классических системах с нетривиальной топологией, в том числе в двумерной гидродинамике, хорошо известны, в частности, при описании плавающих движений при малых числах Рейнольдса [22]. Новым моментом в этой связи является то, что основанием для двумерной турбулентности, базирующейся на уравнениях Эйлера, в данном случае является динамика калибровочного поля ЧС. В этом смысле калибровочно-инвариантное НУШ является полезным инструментом в гидродинамике [23].

О причине появления полей ЧС в проблеме двумерной турбулентности мы хотели бы заметить следующее. Хорошо известно, что действие ЧС с подходящими граничными условиями является средством для классификации конформных теорий [24]. Аппарат конформной теории поля, в свою очередь, может быть применен [25] для изучения двумерной турбулентности. Отмеченное выше наблюдение заключается фактически в том, что в рамках рассматриваемой модели связь между динамикой полей ЧС и двумерной турбулентностью можно установить, минуя использование конформной теории поля.

Настоящая работа построена следующим образом. Для полноты изложения и прояснения всех деталей проблемы во втором разделе мы приводим формулировку задачи и результаты, относящиеся к решениям уравнений движения рассматриваемой модели в непрерывном пределе. Третий раздел посвящен постановке и решению основной задачи настоящей работы: анализу структуры основных мод и их вклада в интегралы движения дискретного варианта модели. В четвертом разделе приведены результаты численного анализа задачи. В последнем, пятом, разделе обсуждаются открытые вопросы, а также области применения полученных результатов.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В непрерывном пределе плотность лагранжиана для рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + i\Psi^*(\partial_t + iA_0)\Psi - \frac{1}{2} |(\nabla - i\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4. \quad (1)$$

Запишем для (1) уравнения движения:

$$i\partial_t\Psi = -\frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{A})^2\Psi + A_0\Psi - g|\Psi|^2\Psi, \quad (2)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{\perp} = -\frac{1}{k} |\Psi|^2, \quad (3)$$

$$\partial_t A_i + \partial_i A_0 = -\frac{1}{k} \varepsilon_{ij} j_j. \quad (4)$$

Здесь g — константа связи и $\mathbf{j} = \text{Im } \Psi^* (\nabla - i\mathbf{A}) \Psi$ — плотность тока, k — коэффициент ЧС. Гамильтониан для (1),

$$H = \frac{1}{2} \int d^2 r (|\nabla - i\mathbf{A} \Psi|^2 - g |\Psi|^4), \quad (5)$$

где потенциал A_{μ} , являющийся вспомогательной переменной, выражен в терминах $|\Psi|^2$ следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \int d^2 r' \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t), \quad (6)$$

$$A_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \int d^2 r' \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (7)$$

Функция Грина $\mathbf{G}(\mathbf{r})$,

$$G_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_{ij} x_j}{r^2}, \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\delta^2(\mathbf{r}), \quad (9)$$

так что A_{μ} является решением уравнений (3) и (4). Поскольку в гамильтоновой формулировке потенциалы однозначно представлены выражениями (6) и (7), калибровочная свобода

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \partial_{\mu} \varphi, \quad (10)$$

$$\Psi \rightarrow e^{i\varphi} \Psi \quad (11)$$

фиксирована. Это достигается выбором кулоновского условия $\text{div } \mathbf{A} = 0$, дополненного граничными условиями

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 A_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi k} \varepsilon_{ij} x_j N, \quad (12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (13)$$

Выбор граничного условия (12) связан с необходимостью удовлетворить интегральному представлению (3) закона Гаусса динамики ЧС:

$$\Phi = \int d^2 r (\text{rot } \mathbf{A})_{\perp} = -\frac{1}{k} \int d^2 r |\Psi|^2. \quad (14)$$

Здесь магнитный поток Φ и число частиц

$$N = \int d^2r |\Psi|^2 \quad (15)$$

являются сохраняющимися величинами, обеспечивающими глобальное ограничение $\Phi = -N/k$, имеющее смысл закона Гаусса для системы ЧС.

Как следствие (2)–(4), существует уравнение непрерывности

$$\partial_t |\Psi|^2 + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (16)$$

выражающее временную независимость N .

Перейдем для удобства к безразмерным переменным и координатам с помощью замен

$$\Psi = |k|^{3/2} \rho e^{i\varphi}, \quad A_0 = -\frac{k^2}{2} w - \partial_t \varphi, \quad A_x = -k u + \partial_x \varphi, \quad A_y = -k v + \partial_y \varphi, \quad (17)$$

$$t \rightarrow -\frac{2}{k|k|} t, \quad x \rightarrow \frac{x}{|k|}, \quad y \rightarrow \frac{y}{|k|}. \quad (18)$$

Уравнения движения и уравнение непрерывности, выраженные с помощью новых действительных функций $\rho \equiv \rho(x, y, t)$, $u \equiv u(x, y, t)$, $v \equiv v(x, y, t)$, $w \equiv w(x, y, t)$ имеют вид

$$\rho_{xx} + \rho_{yy} = -2C\rho^3 + \rho(u^2 + v^2 - w), \quad (19)$$

$$u_y - v_x = -\rho^2, \quad (20)$$

$$u_t - w_x = -2v\rho^2, \quad (21)$$

$$v_t - w_y = 2u\rho^2, \quad (22)$$

$$\rho^2_t = 2[(u\rho^2)_x + (v\rho^2)_y] \quad (23)$$

с параметром $C = g|k|$ и обозначениями $u_t = \partial_t u$ и т. д.

В случае стандартного НУШ

$$i\partial_t \Psi = -\nabla^2 \Psi - |\Psi|^2 \Psi \quad (24)$$

после подстановки $\Psi = \rho \exp[-i\varphi(x, y, t)]$ получим

$$\rho_{xx} + \rho_{yy} = -\rho^3 + \rho[(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 - \varphi_t], \quad (25)$$

$$(\rho^2)_t = 2[(\varphi_x \rho^2)_x + (\varphi_y \rho^2)_y]. \quad (26)$$

Сравнивая выражения (25), (26) с (19) и (23), обратим внимание на следующие различия. Во-первых, вследствие калибровочной инвариантности в уравнении (19) отсутствуют производные фазы φ , существующие в уравнении (25). Их роль играют скалярный и векторный потенциалы. Поэтому эволюция поля $\rho(x, y, t)$ определяется производными по времени функций $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ в уравнениях (21), (22). Поля u и v ответственны в отличие от уравнения (25) за поперечную динамику фазы поля Ψ . Продольную динамику фазы описывает скалярный потенциал $w(x, y, t)$, который заменяет в уравнении (19) функцию φ_t . Функция $w(x, y, t)$ играет роль множителя Лагранжа, позволяя локально учесть ограничение (20), накладываемое законом Гаусса $\Phi = -N/k$. Во-вторых, уравнение непрерывности (23), заменяющее уравнение (26), является прямым следствием уравнений (20)–(22). Его можно получить, исключая скалярный потенциал w из уравнений (21) и (22), если воспользоваться уравнением (20).

Рассмотрим анзац для поля $\Psi(x, y, t)$, который соответствует обобщенному линзовому преобразованию [6, 14]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\Phi(\zeta, \tau)}{g(\tau)} \exp\left(-\frac{ib(\tau)\zeta^2}{2} + i\lambda\tau\right). \quad (27)$$

Здесь $\zeta = \mathbf{r}/g(\tau)$, $\tau = \int_0^t du [f(u)]^{-2}$ и $b(\tau) = -f_t f = -g_\tau g$. Калибровочный потенциал при такой замене преобразуется [10] следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow [g(\tau)]^{-1} \mathbf{A}(\zeta, \tau), \quad (28)$$

$$A_0(\mathbf{r}, t) \rightarrow [g(\tau)]^{-2} [A_0(\zeta, \tau) - b(\tau)\zeta \mathbf{A}(\zeta, \tau)] \quad (29)$$

при сохранении связи (6), (7), где функция $\rho = |\Phi|$. После этих преобразований уравнение (2) изменяет свой вид:

$$i\partial_\tau \Phi + (\beta\zeta^2 - \lambda)\Phi = -\frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{A})^2 \Phi + A_0\Phi - g|\Phi|^2 \Phi, \quad (30)$$

так как функция $\beta(\tau) = (b^2 + b_\tau)/2 = -f^3 f_{tt}/2$ в случае, когда $\varphi(x, y, t) \sim b(x^2 + y^2)$ и $b(t) \neq t_0 - t$ не равна нулю. Однако если мы будем интересоваться коллапсирующими решениями [26] с $f^2(t) \sim (t_0 - t)/\ln[\ln(t_0 - t)]$, то структура самоподобного нелинейного кора [14] описывается решениями следующего уравнения:

$$-\lambda\Phi = -\frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{A})^2 \Phi + A_0\Phi - g|\Phi|^2 \Phi. \quad (31)$$

С помощью численного интегрирования в работе [1] было найдено локализованное решение (с нулевой энергией) уравнения (31). На рис. 1 приведена зависимость критической мощности (значения числа N , начиная с которого в двумерном случае возникает явление коллапса), найденной с помощью этого решения, от параметра $C = g|k|$. Обратим внимание на то, что нормировка функции ρ^2 и, следовательно, число частиц N на рис. 1 отличаются от нормировки в выражении (17) настоящей работы, а также работы [1] множителем $2C$: $\rho^2 \rightarrow 2C\rho^2$. Эти изменения в обозначениях обусловлены переходом к описанию с помощью величин, которые обычно используются при описании явления самофокусировки. В области $1 < C < 2.83$ мы не смогли провести вычисления в рамках модели с непрерывным распределением полей, так как нарушалась

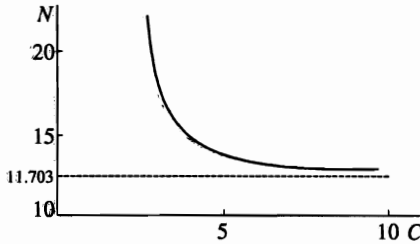


Рис. 1

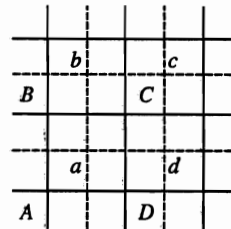


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость числа частиц $N = \int d^2r \rho^2$ от параметра $C = |g|k$ для калибровочно-инвариантного НУШ в непрерывном пределе

Рис. 2. Фрагмент прямой и дуальной решеток с узлами соответственно в точках A, B, \dots, a, b, \dots

сходимость итерационной схемы расчета. Это стало для нас одной из побудительных причин обратиться к дискретной динамике полей. Формальная причина расходимости заключалась в изменении знака правой части уравнения (19) при $C \simeq 1$.

При фиксированном значении параметра C из области $C \geq 2.83$ всегда $N(A_\mu \neq 0) > N(A_\mu = 0)$, как это и следовало ожидать, поскольку калибровочные поля ЧС описывают эффективное отталкивание. Этот результат получен при использовании в вычислениях (в качестве затравочной) функции с гауссовым законом убывания. Обратим внимание на то, что минимальному из возможных значений, равному $C = 1$ (т. е. при $g = 1$ дискретному значению $k = 1$) отвечает самодуальный предел [10]. В этом случае функция ρ имеет степенной характер убывания, и для аксиально-симметричных полей $N = 4\pi = 12.56$. Классической области рассматриваемой теории соответствует предел $k \rightarrow \infty$, когда калибровочное поле отщепляется от поля $\Psi(x, y, t)$ (см. (3)) и критическое значение мощности самофокусировки равно $N = 11.703$.

3. ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИКА

Причина отмеченных в конце предыдущего раздела трудностей при вычислениях N заключается в следующем. При уменьшении параметра задачи $C = |g|k$ вклад от нелинейности, индуцированной калибровочным полем, который эффективно пропорционален ρ^5 , становится сравнимым с вкладом от нелинейной слагаемого НУШ, который пропорционален $2C\rho^3$ (см. (19)). Поскольку итерационная схема расчета в [1] использовала стабилизирующий множитель, включающий оба слагаемых в некоторой степени (определяемой из сравнения степеней однородности функций), то при малых C , когда слагаемые становились одинаковыми по величине, стабилизирующий множитель не стремился к единице.

Для того чтобы решить задачу для значений $C \simeq 1$, обратим внимание на следующее обстоятельство. Уравнение (2) записано в длинноволновом пределе, отвечающем малым по амплитуде значениям калибровочных полей. Подход, включающий в рассмотрение конечные значения калибровочных полей, известен. Это — формулировка теории на решетке с использованием производных

$$\Delta_{\mu}^{+}\rho(\mathbf{r}) \equiv \exp [iA_{\mu}(\mathbf{r})] \rho(\mathbf{r} + \mathbf{e}_{\mu}) - \rho(\mathbf{r}), \quad (32)$$

$$\Delta_{\mu}^{-}\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r}) - \exp [-iA_{\mu}(\mathbf{r})] \rho(\mathbf{r} - \mathbf{e}_{\mu}) \quad (33)$$

и лапласиана

$$\begin{aligned} \Delta(A)\rho_{m,n} &\equiv \Delta^{+}\Delta^{-}\rho_{m,n} = \exp(iA_{m,\hat{n}})\rho_{m,n+1} + \exp(-iA_{m,\hat{n}})\rho_{m,n-1} + \\ &+ \exp(iA_{\hat{m},n})\rho_{m+1,n} + \exp(-iA_{\hat{m},n})\rho_{m-1,n} - 4\rho_{m,n}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь и в последующем мы придерживаемся следующих обозначений. Координаты узла $\mathbf{r} = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ являются пространственной дискретной переменной, индекс μ указывает в (32), (33) направление единичного вектора \mathbf{e}_{μ} на решетке и компоненту калибровочного поля $A_{\mu}(\mathbf{r})$. Для удобства обозначений мы вернулись к координате \mathbf{r} , имея в виду, что уравнение (30) в переменных ζ для описания структуры кора (при $\beta \ll 1$) и уравнение (3) в переменных \mathbf{r} одинаковы. Несколько ячеек прямой и дуальной решеток показаны на рис. 2. В соответствии с правилами калибровочной теории поля на решетке будем считать, что фаза поля $\Psi(\mathbf{r})$ определена на узлах A, B, \dots прямой решетки, калибровочное поле — на звеньях AB решетки, а ротор поля $A_{\mu}(\mathbf{r})$ и плотность ρ^2 — на узлах a, b, \dots дуальной решетки. Обозначение $A_{m,\hat{n}}$ означает, что компонента поля $A_y(m, n)$ определена на звене с координатами концов $(m, n), (m, n+1)$. Соответственно, обозначение $A_{\hat{m},n}$ отвечает определению поля $A_y(m, n)$ на звене $(m, n), (m, n-1)$.

Та же самая причина, которая привела нас к необходимости формулировки теории на пространственной решетке, учитывая немалые значения векторного потенциала, диктует необходимость включить в рассмотрение дискретное время. При этом вид, в котором представлена временная компонента калибровочного потенциала в уравнении движения, должен быть эквивалентен тому, в котором представлены пространственные компоненты калибровочного потенциала. Другими словами, экспоненты (гомологии) Полякова и Вилсона должны быть представлены на равных правах. То обстоятельство, что движение по пространственной решетке диктует необходимость дискретной эволюции, было отмечено для гиперболического оператора в работе [21].

Высказанным требованиям к теории отвечает следующая замена:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - A_0\right)\Psi \rightarrow \frac{i}{2} \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial t} + iA_0\right) - \exp\left(-\frac{\partial}{\partial t} - iA_0\right) \right] \Psi = -\Psi \sin(A_0 + 1). \quad (35)$$

Последнее равенство в (35) справедливо для стационарных состояний $\Psi(\mathbf{r}, t) = \rho_{m,n} \exp(i\lambda t)$, рассмотрением которых мы ограничиваемся в этой работе. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = 1$ (более подробно см. следующий раздел).

Уравнения движения в модели дискретного калибровочно-инвариантного НУШ с учетом (34) и (35) имеют вид

$$\begin{aligned} \exp(iA_{m,\hat{n}})\rho_{m,n+1} + \exp(-iA_{m,\hat{n}})\rho_{m,n-1} + \exp(iA_{\hat{m},n})\rho_{m+1,n} + \\ + \exp(-iA_{\hat{m},n})\rho_{m-1,n} - 4\rho_{m,n} = -2C\rho_{m,n}^3 - \rho_{m,n} \sin(w_{m,n} - 1). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$A_{m,\hat{n}} = - \sum_{m',n'} \Delta_1 G(m - m', n - n') \rho_{m',n'}^2, \quad (37)$$

$$w_{m,n} = \sum_{\mathbf{r}'} [(\Delta_2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) (\rho_{m',n'}^2 + \rho_{m',n'+1}^2) A_{m',n'} - (\Delta_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) (\rho_{m',n'}^2 + \rho_{m'+1,n'}^2) A_{\hat{m}',n'}]$$

и

$$\Delta_1 f(\mathbf{r}) \equiv f(\mathbf{r} + \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{r}).$$

Выражения (37) и (38) являются дискретным аналогом формул (6), (7). Сумма по \mathbf{r}' в (37), (38) означает суммирование по всем узлам дуальной решетки. При этом используется соглашение, что координате узла дуальной решетки, где определена плотность ρ^2 (точка a на рис. 2), соответствует определенный (точка A на рис. 2) узел прямой решетки, где находится начало звена, на котором определено калибровочное поле. Функция Грина на решетке, входящая в выражения (37), (38), имеет вид

$$G(m - m', n - n') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp i \{s(m - m') + t(n - n')\}}{4 - 2 \cos s - 2 \cos t} ds dt. \quad (38)$$

Для численного решения задачи перепишем уравнение (36) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{m,n+1} + \rho_{m,n-1} + \rho_{m+1,n} + \rho_{m-1,n} - 4\rho_{m,n} = \\ = 2C\rho_{m,n}^3 + \rho_{m,n} [4 - 2 \cos u_{m,n} - 2 \cos v_{m,n} - \sin(w_{m,n} - 1)]. \end{aligned} \quad (39)$$

При записи нелинейных слагаемых в правой части этого уравнения, связанных с пространственными компонентами калибровочного потенциала, для упрощения численных вычислений мы пренебрегли различием функций в соседних узлах и звеньях. Подчеркнем еще раз во избежание недоразумений, что мы вводим в рассмотрение другую, отличающуюся от (19) модель (40), для того чтобы пройти в область малых значений параметра C . При больших C в непрерывном пределе они совпадают.

Вид уравнения (40) удовлетворяет сформулированным в начале этого раздела требованиям. Действительно, тригонометрические выражения типа $\cos u$ и $\sin(w - 1)$ отражают невозможность большого вклада больших по амплитуде калибровочных полей. Другими словами, регуляризация теории за счет пространственно-временной решетки естественным образом приводит к ее компактификации.

Результаты численного интегрирования этого уравнения, дающие представление о структуре нулевой моды и виде вспомогательных полей $A_\mu(m, n)$, приведены в следующем разделе. Найденные конфигурации поля $\rho(\mathbf{r})$, будучи использованными для вычисления числа частиц N в зависимости от параметра C , позволяют прояснить при малых значениях C детали промежуточного по мощности режима в явлении самофокусировки.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для численного анализа решений уравнения движения (40) мы воспользуемся методом стабилизирующего множителя Петвиашвили [27]. Итерационная схема для уравнения (40) имеет вид

$$\rho_{l+1} = M_l F^{-1} (G(p)F (-2C\rho_l^3 + j\rho_l \{4 - 2\cos u - 2\cos v - [1 + \sin(w-1)]\}_l)) , \quad (40)$$

$$M_l = \left[\int d^2p (F\rho_l)^2 \right]^\alpha \times \left[\int d^2p G(p)F\rho_l F (-2C\rho_l^3 + j\rho_l \{4 - 2\cos u - 2\cos v - [1 + \sin(w-1)]\}_l) \right]^{-\alpha} . \quad (41)$$

Здесь $\rho_l \equiv (\rho_{m,n})_l$, индекс l обозначает номер итерации, F (F^{-1}) — оператор прямого (обратного) преобразования Фурье, $G(p) = - (4 - 2\cos p_x - 2\cos p_y + 1)^{-1}$. Множитель $j = 1$ или $j = 0$ в зависимости от того, учитываем ли мы в численных расчетах нелинейный вклад от калибровочных полей в структуру нулевых мод или мы его игнорируем.

Показатель степени α в стабилизирующем множителе M_l следует выбрать из требования, чтобы $M_l \rightarrow 1$ при $l \rightarrow \infty$. В случае однородных функций и без нелинейного слагаемого $\rho(u^2 + v^2 - w)$ из сравнения степени однородности слагаемых в левой и правой частях уравнения (19) следует, что $\alpha = 3/2$. При малых значениях калибровочных полей, когда нелинейность в уравнении (40) имеет полиномиальный характер типа $-2C\rho^3 + b\rho^5$ (поскольку как слагаемое ρw , так и $\rho(u^2 + v^2)$ пропорциональны ρ^5), показатель α для сходимости итерационной схемы должен принадлежать интервалу $5/4 \leq \alpha \leq 3/2$. Несмотря на то что используемые нами сейчас нелинейные функции неоднородны, в численных вычислениях настоящей работы мы использовали показатель $\alpha = 3/2$, который дает быстрый выход на значение $M_n = 1$ стабилизирующего множителя. При этом в качестве начальных конфигураций поля мы использовали распределения вида $\rho(m, n) = (\gamma/\pi) \exp\{-\gamma(m^2 + n^2)\}$ с $\gamma = 2$. В отличие от непрерывного предела [1] при вычислениях на решетке мы не столкнулись с трудностями, связанными с расходимостью используемых выражений, так как у нас радиус обрезания был равен шагу решетки.

Моделирование осуществлялось на квадратной решетке с шагом, равным единице, и с линейными размерами, максимальный из которых был равен $L_x = L_y = 20$. В качестве теста использовалось решение уравнения движения (40) с $A_\mu = 0$ ($j = 0$) в нормировке $C = 1/2$, дающее хорошо известное значение $N = 11.703$. Кроме того, в непрерывном и дискретном случаях мы сравнивали распределения полей при $C \geq 5$, когда они практически совпадали.

На рис. 3 показаны конфигурации полей ρ , u и w для характерного значения параметра $C = 3$. Представление о функции $v(m, n)$ можно получить, если использовать соотношение $v(m, n) = -u(n, m)$.

С помощью нулевой моды $\rho_{m,n}$ мы вычислили зависимость среднего квадрата эффективной ширины $\langle R^2 \rangle = N^{-1} \sum_{m,n} (m^2 + n^2) \rho_{m,n}^2$ и критической мощности N от параметра C . Результаты вычислений $\langle R^2 \rangle$ приведены в таблице. Зависимость $N(C)$ при $C \geq 1$ показана на рис. 4.

Средний квадрат ширины распределения поля ρ при различных значениях параметра C

C	2	2.5	3	5
$\langle R^2 \rangle$	2.57	2.60	2.64	2.72

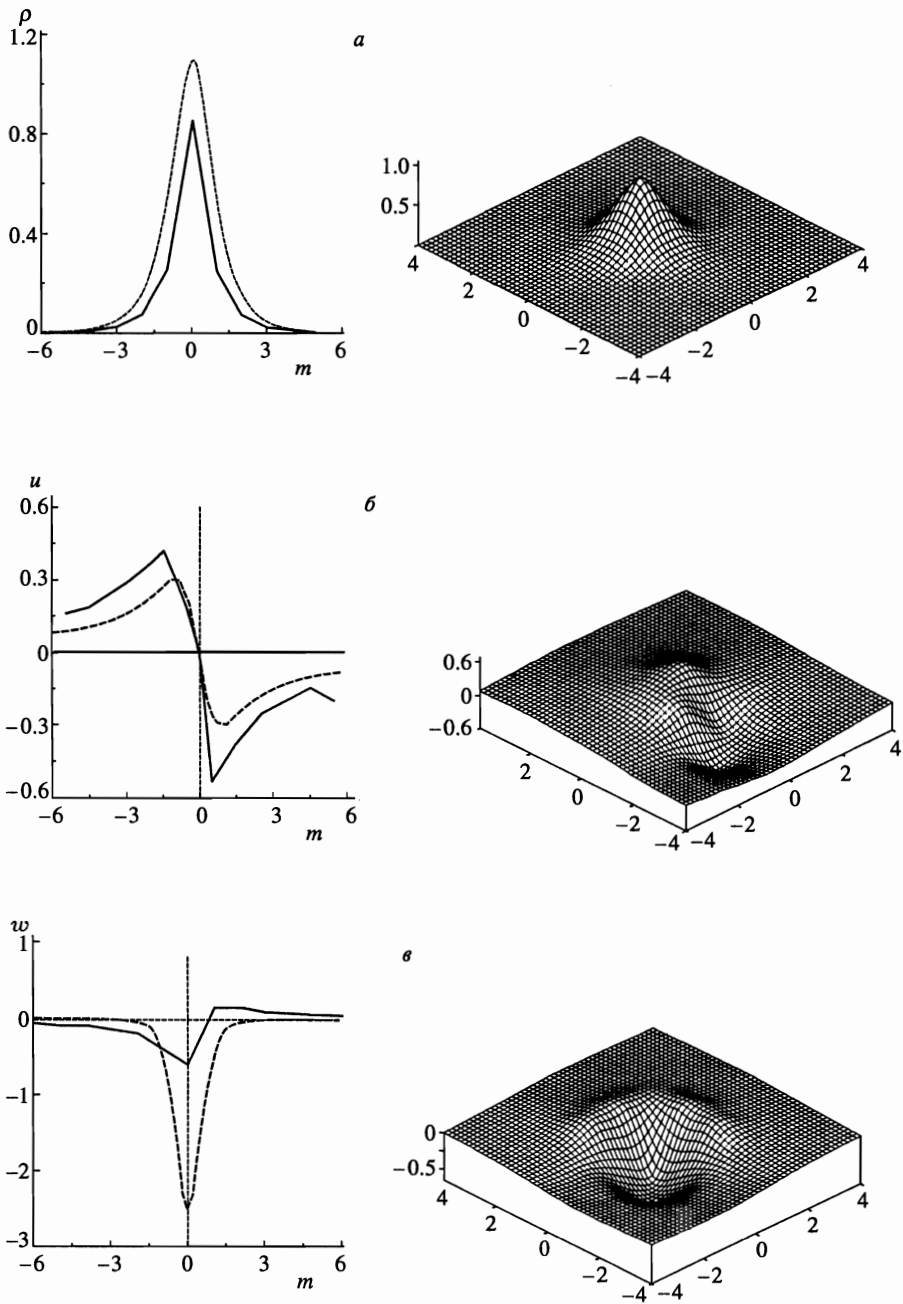


Рис. 3. Зависимости $\rho(m)$, $u(m)$ и $w(m)$ при $C = 3$ приведены соответственно на рис. а, б и в, справа от которых расположены поверхности $\rho(m, n)$, $v(m, n)$ и $w(m, n)$. Функции в непрерывном пределе показаны штрихами. Представленные значения функций u и w в дискретном случае на рис. б и в увеличены в 2π раз

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Представление о величине топологических эффектов ЧС можно получить из рис. 4. Мы видим, что учет компактификации теории приводит к радикальному изменению критического значения мощности в явлении самофокусировки. Корректный учет вклада больших по амплитуде калибровочных полей привел при всех C к уменьшению значения N и позволил вычислить значения критической мощности в области малых значений параметра C . В теории, игнорирующей вклад от калибровочных полей, существует резкая граница $N = 11.703$. Сейчас мы видим, что критические значения мощности N , отвечающие нулевым модам с различным значением коэффициента ЧС k , принадлежат интервалу $11.703 \leq N \leq 12.01$. Точность, с которой мы провели вычисления, по нашим оценкам составляет несколько процентов.

Обратим внимание на то, что если мы учтем с помощью функции $\sin(w - 1)$ дискретный характер движения по времени, оставляя нелинейную функцию $u^2 + v^2$ (т.е. опустив возможность ограничения больших по амплитуде значений пространственных компонент калибровочного потенциала с помощью компактификации теории), то мы приходим к следующему результату. Вплоть до значения $C = 3$ мощность $N = 11.7$, что соответствует значению в отсутствие калибровочного поля (вычисление функций $u(m, n)$ и $v(v, n)$ показывает, что они действительно малы: $\max\{u_{m,n}, v_{m,n}\} \leq 0.1$). И только в области малых значений $C \leq 3$ наблюдается уменьшение N до значений $N < 11.703$.

Естественный вывод, который можно сделать в этом случае, состоит в том, что учет дискретной эволюции должен сопровождаться вполне определенной деформацией вида нелинейных слагаемых. Такое наблюдение можно найти в недавно опубликованных работах [21, 28]. С этой точки зрения учет функции $4 - 2 \cos u - 2 \cos v$ является деформацией нелинейности $u^2 + v^2$ и естественным партнером дискретной эволюции, выраженной с помощью функции $\sin(w - 1)$. Различие в тригонометрических функциях связано с тем, что мы рассматриваем в отличие от [21, 28] уравнение движения с параболическим оператором.

При переходе от уравнения (36) к (40) для реализации численной схемы, основанной на методе стабилизирующего множителя Петвиашвили, мы предположили, что в нелинейных слагаемых $\rho_{m,n\pm 1} = \rho_{m\pm 1,n} = \rho_{m,n}$ и $A_{m,\hat{n}\pm 1} = A_{m,\hat{n}}$, $A_{\hat{m}\pm 1,n} = A_{\hat{m},n}$. Косвенное подтверждение этой гипотезы мы нашли в расчетах, когда варьировали основную нелинейность $-2C\rho_{m,n}^3$, используя предложения работ [29, 21].

Пространственные распределения полей $\rho(m, n)$, $u(m, n)$ и $w(m, n)$ при $C = 3$ показаны на рис. 3. Из них видно уменьшение амплитуды полей $\rho(m, n)$ по сравнению с непрерывным случаем. При вычислении функции $\rho(m, n)$ наблюдался эффект быстрой изотропизации первоначально анизотропного гауссовского распределения. Поэтому в

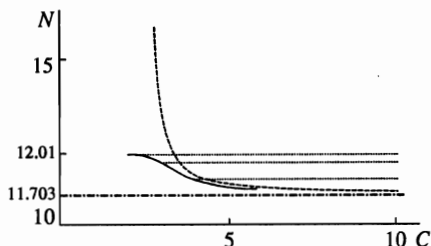


Рис. 4. Зависимость числа частиц N от параметра C в дискретной модели. Функция $N(C)$, полученная в непрерывном пределе, показана штрихами. Отмечены также значения N , отвечающие дискретным k при $g = 1$ (пунктир). Штрихпунктир соответствует $k = \infty$.

дальнейших численных расчетах в качестве затравочного использовалось изотропное распределение поля $\rho(m, n) = (\gamma/\pi) \exp\{-\gamma(m^2 + n^2)\}$ с $\gamma = 2$. Результаты вычислений среднего квадрата эффективной ширины $\langle R^2 \rangle$ функции $\rho_{m,n}$ и ее зависимости от параметра C приведены в таблице. В отличие от непрерывной модели (19) мы наблюдали выход на несимметричное по оси x распределение поля w_m . Это явление возникало только при малых $C \leq 4$, когда функция w_m становилась похожей на функцию $-u_m$.

При сравнении результатов следует иметь в виду, что соотношение между амплитудой функции ρ , параметром C , пространственным масштабом L при произвольном значении λ (которые обозначены тильдой), с одной стороны, и теми же величинами при $\lambda = 1$ (обозначенными чертой), с другой, имеет вид

$$\tilde{\rho}^2 = \sqrt{\lambda} \bar{\rho}^2, \quad \tilde{C} = \sqrt{\lambda} \bar{C}, \quad \tilde{L}^2 = \lambda^{-1} \bar{L}^2.$$

Поэтому имеет место следующая цепочка соотношений

$$\tilde{N}_{j \neq 0} = \bar{N}_{j \neq 0} / \sqrt{\lambda} = \bar{N}_{j=0} / 2\sqrt{\lambda} \bar{C} = \bar{N}_{j=0} / 2\tilde{C}.$$

Эти соотношения полезны при анализе вклада в нелинейность различных слагаемых в правых частях уравнений (19) и (40), если $\lambda \neq 1$.

Представление о некоторых новых возможностях, которые следуют из проведенных вычислений, также можно получить из рис. 4. Они связаны с возможными значениями коэффициента k . Пусть $g = 1$. В случае абелевого калибровочного поля целочисленность коэффициента ЧС k является открытым вопросом, интенсивно обсуждающимся в текущей литературе. В неабелевом случае, когда k является целым или дробным числом (равным отношению двух взаимно простых чисел), абелевы калибровочные поля можно рассматривать как присоединенные представления, отвечающие центру неабелевой группы. Поэтому мы встречаемся с интересной возможностью сопоставить (с помощью рис. 4) значениям коэффициента k дискретные значения критической мощности, классифицируя нулевые моды по значениям этого коэффициента.

Обычная трактовка ленгмюровской турбулентности, основанной на использовании решений НУШ, базируется на представлениях о возникновении каскада самоподобных коллапсирующих решений. Сейчас мы можем придать этой картине следующее содержание. Из рис. 4 видно, что спектр критических значений мощности сгущается с увеличением k . Это ведет к иерархической картине коллапса, в котором участвуют нулевые моды, различающиеся значениями k , и как следует из выражения (18), пространственными масштабами и характерными временами.

Коэффициент k имеет смысл числа зацеплений мировых линий, которые описывают эволюцию точечных особенностей двумерного пространства. Малым значениям $C = 2, 3$ при $g = 1$, когда нами наблюдались существенные отличия от классических ответов, соответствуют однократно ($k = 2$) и двукратно ($k = 3$) зацепленные мировые линии. Подчеркнем еще раз, что эти замечания относятся к пространству вырожденных по k основных состояний. Описание полной динамики полевых конфигураций выходит за рамки настоящей работы, однако уже сейчас мы можем заключить, что рассматриваемая нами дискретная эволюция нулевых мод является необходимым элементом полного описания полей.

При условии $\operatorname{div} \mathbf{A} = -u_x - v_y + \Delta\varphi = 0$, когда фаза φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$, фрагмент этой полной картины в непрерывной модели обсуждался в работе [1]. В этом случае фаза $\varphi(x, y, t)$ является линейной функцией $\varphi = \alpha x + \beta y$, что с точки зрения

НУШ соответствует (локально при малых t) постоянному направлению распространения лучей, задаваемому вектором $\mathbf{p} = (\alpha, \beta)$. В случае самофокусировки это несправедливо, и фаза $\varphi(x, y, t)$, не удовлетворяя уравнению $\Delta\varphi = 0$, порождает дополнительный «продольный» вклад в потенциалы $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ (см. (17), (27), (30)). Вопрос о том, какая из возможностей реализуется, связан с граничными условиями задачи.

Если поля u и v не содержат потенциальной части, то уравнение непрерывности (23) и закон Гаусса (20) эквивалентны уравнению движения идеальной жидкости Эйлера в вихревой форме. Для функции тока $a(x, y)$ это уравнение имеет вид

$$k \frac{\partial}{\partial t'} \Delta a + \frac{D(\Delta a, a)}{D(x, y)} = 0.$$

Здесь Δ — лапласиан, $D(\Delta a, a)/D(x, y)$ — якобиан. Время $t' = kt$ в этом уравнении приведено к безразмерному виду с помощью коэффициента k аналогично пространственным координатам x и y (см. (18)). В пределе $k \rightarrow \infty$, или, что эквивалентно, $\Delta t' \rightarrow 0$, якобиан равен нулю. Последнее означает существование функциональной связи между Δa и a . Поэтому в случае малых значений k мы с необходимостью сталкиваемся с нестатической ситуацией.

В наглядной форме ее можно представить, рассматривая эволюцию зацепленных контуров. Эффект зацепления замкнутых линий тока в контексте настоящей работы отражает переплетение мировых линий точечных особенностей с образованием зацеплений после проекции мировых линий на двумерное пространство. Стохастизация вблизи точек зацепления контуров в рамках формулировки двумерной гидродинамики идеальной жидкости в терминах контурных переменных [30, 31] была обнаружена в работе [32]. Такого рода случайное поведение имеет универсальный характер. Оно характеризуется произволом в положении вдоль оси времени точки переплетения мировых линий и, следовательно (что эквивалентно), случайным расположением в плоскости места зацепления замкнутых контуров. При этом индекс k числа зацеплений оказывается скрытым параметром, не входящим в явном виде в уравнения Эйлера. Сказанное означает, что учет специфики пространственно-двумерных систем, отраженной с помощью калибровочных полей ЧС, может привести к традиционной картине турбулентности, связанной с уравнениями Эйлера. Факт существования тесной аналогии между состояниями с постоянным потоком в турбулентности и аномалией ЧС, выраженной уравнением (20), был использован при описании спектров турбулентности в работе [25].

Одной из сред, в которой такой механизм турбулентности может иметь место, является оптическая среда со случайным неоднородным распределением отражающих поверхностей в канале. Отражаясь от поверхностей, волновые фронты приобретают случайные направления распространения, при которых нелинейные набеги фазы не успевают развиться.

Итак, мы изучили влияние калибровочного поля ЧС, отражающего специфику размерности нашей проблемы, на структуру нулевых мод в модели дискретного калибровочно-инвариантного НУШ. Мы показали, что корректный учет больших по величине калибровочных полей ЧС существен при $1 < k < 3$. При этом мы обнаружили существование переходного режима в явлении самофокусировки, характеризующегося конечным интервалом $11.703 \leq N \leq 12.01$ критической мощности.

Мы хотели бы поблагодарить С. Н. Власова, А. В. Гапонова-Грехова, Е. А. Кузнецова, А. Г. Литвака, В. А. Миронова, В. И. Таланова, Г. М. Фраймана и А. Д. Юнаковского

за многочисленные стимулирующие дискуссии и полезные замечания. Численные расчеты были выполнены на рабочей станции, предоставленной Комиссией Европейского Союза DG III/ESPRIT — проект СТИАС 21042. Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 96-02-19272 (В. А. В.) и № 98-02-16237 (Л. А. А., В. А. В., А. П. П.)).

Литература

1. L. A. Abramyan and A. P. Protogenov, Письма в ЖЭТФ **64**, 807 (1996); L. A. Abramyan, V. I. Berezhiani, and A. P. Protogenov, Phys. Rev. E **56**, 6026 (1997).
2. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
3. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов. Радиофизика **14**, 1453 (1971).
4. *Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, ed. by R. E. Caflisch and G. C. Papanicolaou, NATO ASI ser., Vol. C404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London (1993); A. G. Litvak, *Dynamic nonlinear electromagnetic phenomena in plasma*, in *Review of Plasma Physics*, Vol. 10, ed. by M. A. Leontovich, Consultants Bureau, New York (1986).
5. A. G. Litvak, V. A. Mironov, and A. M. Sergeev, Phys. Scr. T **30**, 57 (1990).
6. J. J. Rasmussen and K. Rypdal, Phys. Scr. **33**, 481 (1986).
7. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1749 (1972).
8. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978), с. 145.
9. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицин, ЖЭТФ **94**, 119 (1988).
10. R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **64**, 2969 (1990); **66**, 2682 (1991); Phys. Rev. D **42**, 3500 (1990); Prog. Theor. Phys. Suppl. **107**, 1 (1992).
11. J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990).
12. R. Jackiw and E. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990); R. Jackiw, K. Lee, and E. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990).
13. I. V. Barashenkov and A. O. Harin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1575 (1994); Phys. Rev. D **52**, 2471 (1995).
14. L. Bergé, A. de Bouard, and J. C. Saut, Phys. Rev. Lett. **74**, 3907 (1995).
15. M. Knecht, R. Pasquier, and J. Y. Pasquier, J. Math. Phys. **36**, 4181 (1995).
16. W. G. Fuertes and J. M. Guilarte, J. Math. Phys. **37**, 554 (1996).
17. *Fractional statistics and anyon superconductivity*, ed. by F. Wilczek, World Scientific, Singapore (1990).
18. А. П. Протогенов, УФН **162**, 1 (1992).
19. E. W. Laedke, K. H. Spatschek, V. K. Mezentsev, S. L. Musher, I. V. Ryzhenkova, and S. K. Turitsyn, Письма в ЖЭТФ **62**, 652 (1995).
20. E. W. Laedke, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, Phys. Rev. Lett. **73**, 1055 (1994).
21. L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz Works for Integrable Model*, Les-Houches lectures, hep-th/9605187.
22. A. Shapere and F. Wilczek, J. Fluid Mech. **198**, 557 (1989).
23. А. Шварцбург, в сб. *Нелинейная электродинамика*, под ред. П. Л. Е. Усленфи, Мир, Москва (1980), с. 107.
24. G. Moore and N. Seiberg, Phys. Lett. B **212**, 451 (1988); **220**, 422 (1989).
25. А. М. Polyakov, Nucl. Phys. B **396**, 367 (1993).
26. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
27. В. И. Петвиашвили, Физика плазмы **2**, 469 (1976).
28. V. Bazhanov, A. Bobenko, and N. Reshetikhin, Commun. Math. Phys. **175**, 377 (1996).
29. M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, Stud. Appl. Math. **55**, 213 (1976).
30. N. J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts, J. Comp. Phys. **30**, 96 (1979).
31. А. А. Мигдал, в сб. *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации*, под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича, Наука, Москва (1987).
32. М. Е. Агинштейн, А. А. Мигдал, в сб. *Проблемы кибернетики*, т. 107, под ред. Р. Е. Сагдеева и А. А. Мигдала, Научный Совет по проблемам кибернетики, Москва (1987), с. 114.