

## ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛОКНИСТЫЕ ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ

*А. Л. Черняков\**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 декабря 1997 г.

На основе гидродинамической теории многократного рассеяния выведена система самосогласованных уравнений, позволяющая определять гидродинамическое сопротивление разреженных волокнистых пористых сред при произвольных малых числах Рейнольдса и произвольной случайной упаковке волокон в этих средах. Полученные уравнения исследованы в случае изотропной упаковки волокон и в анизотропном случае, когда все волокна ортогональны направлению потока жидкости. Выведены и исследованы уравнения, определяющие корреляционную функцию скоростей в случайной волокнистой среде. Вычислены коэффициенты продольной и поперечной диффузии пассивной примеси, помещенной в жидкость.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Различным аспектам гидродинамики гранулированных сред и суспензий посвящена обширная теоретическая литература. Мы сошлемся на последние работы и обзоры, где можно найти подробную библиографию по этой тематике [1–9]. В частности, расчет гидродинамического сопротивления пористой среды, образованной твердыми шарами, методом усреднения содержится в работах [10, 11]. В работе [10] определено также сопротивление пористой среды, состоящей из случайно расположенных параллельных цилиндрических волокон. Однако трехмерным средам, образованным длинными волокнами и, в частности, волокнистым фильтрам, несмотря на важность этой задачи [12, 13], посвящено очень мало теоретических и вычислительных работ. Помимо феноменологической работы [14], основанной на уравнении Бринкмана [15], за последнее время появилось только несколько работ, в которых изучаются трехмерные течения жидкости через пористые среды на основе уравнений Навье–Стокса. В работе [16] впервые численными методами исследуется сопротивление различным трехмерным периодическим решеткам, образованным бесконечно длинными волокнами, в зависимости от плотности среды. В [16] также приводится расчет сопротивления квадратной и гексагональной решеток и содержится обзор теоретических работ по определению сопротивления двумерных периодических и случайных волокнистых сред. В работе [17] обсуждается применение вариационного принципа для вычисления гидродинамического сопротивления трехмерных периодических решеток, образованных волокнами. В работе [18] аналитически исследуется влияние взаимного расположения и ориентации волокон в трехмерной решетке на гидродинамическое сопротивление.

---

\* E-mail: tburinsk@classic.iki.rssi.ru

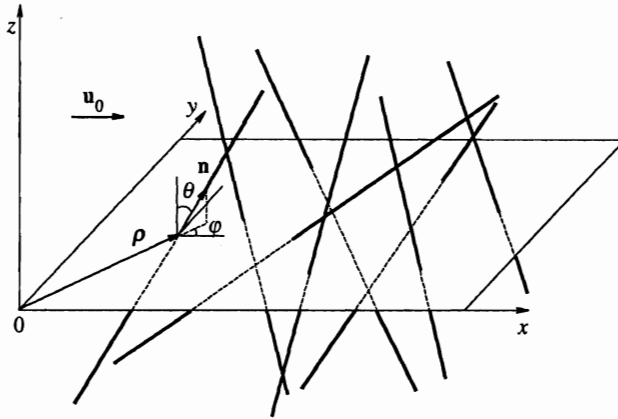


Рис. 1. Модель пористой волокнистой среды

В данной работе исследуются усредненные характеристики гидродинамического течения несжимаемой жидкости через пористую среду, образованную случайно расположенными и случайно ориентированными бесконечно длинными цилиндрическими волокнами различного диаметра. Исходя из уравнений Навье–Стокса выводятся уравнения самосогласованного поля, которые в длинноволновом приближении приводят к уравнению Бринкмана. Исследованы свойства перенормировки вязкости, вычислена корреляционная функция скоростей, найдены коэффициенты диффузии пассивной примеси, помещенной в жидкость.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ВОЛОКНИСТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В качестве модели пористой среды рассмотрим трехмерное пространство, заполненное случайно расположенными бесконечно длинными полидисперсными цилиндрическими волокнами с произвольной ориентацией. Для математического описания геометрии такой волокнистой среды удобно выбрать произвольную плоскость, в которой лежит вектор средней скорости, и положение каждого волокна с радиусом  $a_\alpha$  задавать вектором  $\rho_\alpha$ , определяющим точку пересечения волокна с плоскостью, и единичным касательным вектором  $n_\alpha$ , как показано на рис. 1 для одного волокна. Ось  $x$  в дальнейшем всегда будет направлена по средней скорости потока жидкости, а ось  $z$  по нормали к выбранной плоскости. Статистический ансамбль описанных модельных пористых сред, по которому будет проводиться усреднение, определяется совместными  $N$ -частичными функциями распределения

$$f_N = f_N(\rho_1, n_1, a_1; \rho_2, n_2, a_2; \dots; \rho_N, n_N, a_N).$$

Помимо функций распределения необходимо еще задать меру в пространстве прямых, по которой будет проводиться усреднение. Если задать единичный вектор сферическими углами  $\theta$  и  $\phi$ , то единственная с точностью до постоянного множителя инвариантная относительно группы движений трехмерного пространства  $E_3$  мера запишется в виде [19]

$$d\chi = \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi dx dy. \quad (1)$$

Все усреднения в дальнейшем будут проводиться по этой инвариантной мере. Часто бывает полезно выразить функции распределения через корреляционные функции [20]. В частности, для  $N = 1, 2, 3$  можно написать

$$\begin{aligned} f_1(t_1) &= g_1(t_1), \quad f_2(t_1, t_2) = g_1(t_1)g_1(t_2) + g_2(t_1, t_2), \\ f_3(t_1, t_2, t_3) &= g_1(t_1)g_1(t_2)g_1(t_3) + g_1(t_1)g_2(t_2, t_3) + \\ &+ g_1(t_2)g_2(t_1, t_3) + g_1(t_3)g_2(t_1, t_2) + g_3(t_1, t_2, t_3), \end{aligned}$$

где  $t$  представляет все переменные, характеризующие каждое волокно.

### 3. ОПЕРАТОР РАССЕЙЯНИЯ ОДИНОЧНОГО ВОЛОКНА

Для определения гидродинамического сопротивления исследуемой пористой среды воспользуемся уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в приближении Осена [21]

$$\rho(\mathbf{U}_0 \nabla) \mathbf{V} = \mu \Delta \mathbf{V} - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

которое справедливо при малых числах Рейнольдса  $\operatorname{Re} = U_0 a / \nu \ll 1$ , где  $\rho$  — плотность жидкости,  $U_0$  — средняя скорость,  $a$  — радиус волокна, а  $\mu$  и  $\nu$  — соответственно динамическая и кинематическая вязкости. Эти уравнения должны быть решены при выполнении граничных условий. В частности, если можно пренебречь проскальзыванием, то скорость на каждом из волокон должна быть равна нулю. Прежде чем решать уравнения (2) при случайном расположении волокон, введем аналогично работам [22–25] определение оператора рассеяния для одиночного волокна, помещенного в произвольное внешнее течение, регулярное в этом месте.

Произвольное течение жидкости можно представить в виде разложения Фурье:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (3)$$

При помещении волокна в заданный поток на его поверхности возникают силы, действующие на жидкость таким образом, чтобы изменить поле течения и удовлетворить граничным условиям. При этом индуцированные силы линейным образом зависят от скорости набегающего потока. Для фурье-образов возникших сил и поля течения набегающего потока можно написать линейное соотношение для произвольного волокна  $\alpha$ :

$$F_i^\alpha(k') = \mu \int T_{ij}^\alpha(k', k) V_j(k) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (4)$$

Матрицу  $T_{ij}^\alpha(k', k)$  в работах, посвященных гидродинамике, обычно называют матрицей коэффициентов сопротивления [22], но мы в дальнейшем по аналогии с волновыми задачами будем называть эту матрицу оператором рассеяния на волокне  $\alpha$ .

Для вычисления оператора рассеяния  $\hat{T}$  выберем вначале систему координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью волокна. Скорость набегающего потока на поверхности волокна радиуса  $a$  представим в виде разложения:

$$\mathbf{V}(z, \phi) = \sum_m \int \mathbf{V}_m(k_3) \exp(ik_3z + im\phi) \frac{dk_3}{2\pi}. \quad (5)$$

Поверхностные гармоники Фурье  $\mathbf{V}_m(k_3)$  выражаются через коэффициенты трехмерного интеграла Фурье для скорости:

$$\mathbf{V}_m(k'_3) = \int \mathbf{V}(\mathbf{k}) i^m J_m(k_\perp a) e^{-im\psi} 2\pi \delta(k'_3 - k_3) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (6)$$

где  $J_m$  — функции Бесселя порядка  $m$ , а  $(k_\perp, \psi, k_3)$  — цилиндрические компоненты вектора  $\mathbf{k}$ . Задавая распределение поверхностных сил в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_n \int \mathbf{F}_n(k_3) \exp(ik_3z + in\phi) \delta(r - a) \frac{dk_3}{2\pi a}, \quad (7)$$

можно вычислить трехмерный спектр Фурье сил, действующих на жидкость со стороны волокна:

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \sum_n (-i)^n 2\pi J_n(k_\perp a) e^{in\phi} \mathbf{F}_n(k_3). \quad (8)$$

Зная спектр поверхностных сил, найдем поле течения  $\mathbf{V}_s$ , вызванное этими силами:

$$\mathbf{V}_s(\mathbf{r}) = \int \hat{G}_0(\mathbf{k}) \mathbf{F}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (9)$$

где через  $\hat{G}_0(\mathbf{k})$  мы обозначили затравочную функцию Грина для свободной жидкости:

$$\hat{G}_0(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\Pi}(\mathbf{k})}{k^2 + \mathbf{k}\mathbf{U}_0/\nu}. \quad (10)$$

Оператор  $\hat{\Pi}(\mathbf{k})$  является проекционным оператором, который в компонентах имеет вид

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (11)$$

При этом мы считаем, что полное поле скоростей непрерывно продолжается внутрь волокна и равно там нулю [22, 23]. Разлагая поле скоростей  $\mathbf{V}_s(\mathbf{r})$  на поверхности волокна в ряд Фурье, получим

$$V_{sm}(k_3) = i^{m-n} K_{ijmn}(k_3) F_{jn}(k_3), \quad (12)$$

где матрица  $K_{ijmn}(k_3)$  определяется равенством

$$K_{ijmn}(k_3) = \int G_{ij}(k_\perp, k_3) J_m(k_\perp a) J_n(k_\perp a) \exp(i(n-m)\psi) \frac{k_\perp dk_\perp d\psi}{(2\pi)^2}. \quad (13)$$

Приравнивая суммарную скорость жидкости  $\mathbf{V} + \mathbf{V}_s$  на поверхности волокна нулю, получим систему уравнений для нахождения всех гармоник поверхностных сил

$$i^{m-n} K_{ijmn}(k_3) F_{jn} = -V_{im}. \quad (14)$$

Если ввести обратную матрицу

$$K_{ijmn}^{-1} K_{jknt} = \delta_{ik} \delta_{mt}, \quad (15)$$

то гармоники силы можно выразить через скорость набегающего потока и получить выражение для оператора рассеяния на одиночном волокне:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -2\pi\delta(k'_3 - k_3) T_{ij}(k_3, k'_\perp, k_\perp) = \\ &= -2\pi\delta(k'_3 - k_3) \sum_{n,m} K_{ijnm}^{-1} J_n(k'_\perp a) J_m(k_\perp a) \exp(in\psi' - im\psi). \end{aligned} \quad (16)$$

В общем случае, когда волокно с номером  $\alpha$  пересекает выбранную плоскость в точке, определяемой вектором  $\rho_\alpha$ , и направлено по вектору  $\mathbf{n}_\alpha$ , легко показать, что оператор рассеяния имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{T}^\alpha(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -2\pi\delta[\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{k}' - \mathbf{k})] \exp(i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \rho_\alpha) \times \\ &\times \sum_{n,m} \hat{K}_{nm}^{-1} J_n(k'_\perp a_\alpha) J_m(k_\perp a_\alpha) \exp(in\psi' - im\psi), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $k_\perp^\alpha$  обозначает поперечную часть вектора  $\mathbf{k}$  по отношению к волокну с номером  $\alpha$ :

$$k_\perp^\alpha = |\mathbf{k} - \mathbf{n}_\alpha(\mathbf{n}_\alpha \mathbf{k})|.$$

Для малых поперечных гармоник при выполнении условия  $k_\perp^2 a^2 \ll 1$  в формулах (16), (17) из всей суммы можно оставить только член с  $n = m = 0$ , а функцию Бесселя  $J_0$  заменить единицей. Выражение (16) для оператора рассеяния в этом случае примет простой вид  $\hat{T} = -(2\pi)\delta(k'_3 - k_3) \hat{K}_{00}^{-1}$ . С той же точностью, пренебрегая членами  $\sim k_\perp^2 a^2$  в интеграле при вычислении  $\hat{K}_{00}$ , одну из функций Бесселя тоже можно считать равной единице. Выражение для матрицы  $\hat{K}_{00}$  в этом случае можно привести к виду

$$\hat{K}_{00} = \int J_0(k_\perp a) \hat{G}(k_\perp, k_3) \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} = \left\langle \int e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}} \hat{G}(\mathbf{k}) \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \right\rangle_a, \quad (18)$$

где угловые скобки означают усреднение по поверхности волокна при  $r = a$ . Таким образом, мы видим, что при условии  $k_\perp^2 a^2 \ll 1$ , общая формула для оператора рассеяния сводится к результату, который может быть получен методом Бюргерса [18, 26, 27].

#### 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Зная гидродинамический оператор рассеяния, можно при вычислении усредненных характеристик течения жидкости в пористой среде использовать ряды по степеням кратности рассеяния, как это обычно делается в задачах многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах [28]. Впервые, по-видимому, на аналогию между

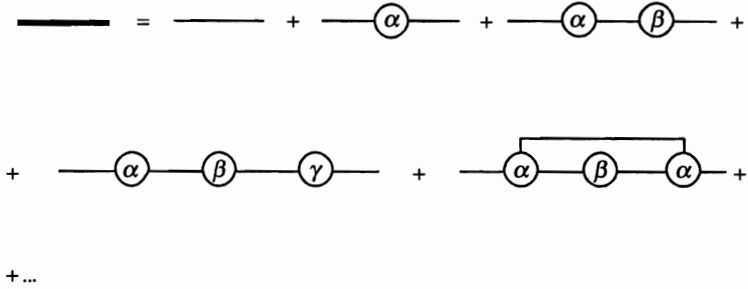


Рис. 2. Ряд теории многократного рассеяния для функции Грина  $\hat{G}$

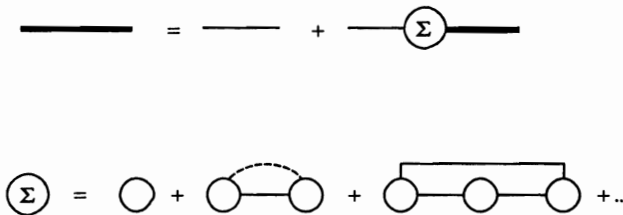


Рис. 3. Уравнение Дайсона для функции Грина  $\hat{G}$  и представление собственной энергии  $\hat{\Sigma}$  в виде ряда

гидродинамикой гранулированных сред и теорией многократного рассеяния волн было обращено внимание в работе [29]. Затем эта аналогия многократно использовалась при расчетах вязкости растворов полимеров [30] и различных гидродинамических свойств суспензий, состоящих из твердых сферических частиц [22–25] и стержней [31]. При изучении гидродинамики в пористых волокнистых средах мы воспользуемся диаграммной техникой теории многократного рассеяния, подробно изложенной в обзоре [32]. В частности, функцию Грина уравнений Навье–Стокса в пористой среде, которая определяет скорость течения жидкости в среде, когда к ней приложена дельта-образная сила, можно представить в виде суммы последовательностей процессов рассеяния на различных волокнах. С каждой последовательностью процессов рассеяния можно сопоставить диаграмму. Отметим, что диаграммное представление последовательности процессов взаимодействия при расчете силы сопротивления с помощью «трансфер оператора» использовалось в [33]. Для функции Грина до усреднения по положениям и ориентациям

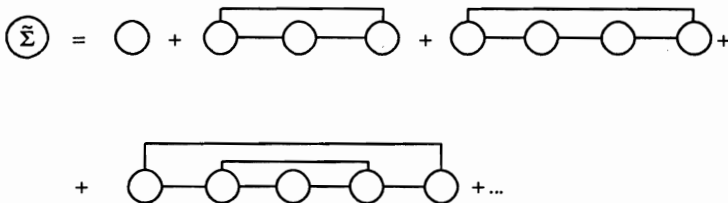


Рис. 4. Диаграммы, входящие в определение самосогласованного оператора собственной энергии

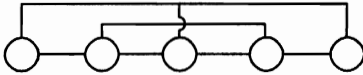


Рис. 5. Пример диаграммы, не дающей вклада в оператор  $\tilde{\Sigma}$

волокон такие диаграммы приведены на рис. 2. Толстой линии соответствует полная функция Грина, тонкая горизонтальная линия обозначает затравочную функцию Грина, кружком с  $\alpha$  посередине обозначен оператор рассеяния на волокне  $\alpha$ . Линией сверху, как показано на последней диаграмме, соединяются волокна с одинаковым номером. Вклад в функцию Грина дают все возможные последовательности процессов рассеяния. После усреднения с функциями распределения, выраженными через корреляционные функции, для функции Грина получается уравнение Дайсона, показанное на рис. 3. В диаграммах для собственно-энергетического оператора  $\Sigma$  штриховая линия обозначает корреляционную функцию. После усреднения каждое независимое волокно вносит в диаграмму множитель  $n$ , который обозначает плотность точек пересечения осей волокон с выбранной произвольно плоскостью. Построенные ряды обычно приводят к расходящимся выражениям, так как используют затравочные функции Грина [6, 32]. Чтобы устранить расходимости в гидродинамических задачах, обычно выделяют класс диаграмм для оператора собственной энергии  $\Sigma$  и суммируют их [31, 34]. Введем самосогласованный оператор  $\tilde{\Sigma}$ , вклад в который вносят все графики без корреляционных функций и диаграммы, не имеющие наверху пересекающихся между собой линий, указывающих на одинаковые волокна, как показано на рис. 4. Диаграммы показанного на рис. 5 типа не входят в определение оператора  $\tilde{\Sigma}$ . Если ввести самосогласованную функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\tilde{G} = G_0 + G_0 \tilde{\Sigma} \tilde{G}, \tag{19}$$

и самосогласованный оператор рассеяния на отдельном волокне  $\tilde{T}^\alpha$ , определяемый соотношением

$$\tilde{T}^\alpha = T^\alpha + T^\alpha G_0 \tilde{\Sigma} \tilde{G} \tilde{T}^\alpha, \tag{20}$$

то оператор собственной энергии  $\tilde{\Sigma}$  простым образом выразится через самосогласованный оператор рассеяния

$$\tilde{\Sigma} = \sum_{\alpha} \langle \tilde{T}^\alpha \rangle, \tag{21}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по положению и ориентации каждого волокна. Система самосогласованных уравнений (19)–(21), определяющих оператор рассеяния и функцию Грина, в графическом виде показана на рис. 6. Все диаграммы для полного собственно-энергетического оператора  $\Sigma$  можно выразить через введенные самосогласованные величины, как это показано на рис. 7.

Аналогичным образом можно вывести уравнение Бете–Солпитера для усредненной двухчастичной функции Грина  $\hat{K}$ , которая определяет корреляционную функцию скоростей [32]. В графическом виде уравнение Бете–Солпитера и ряд для его ядра приведены на рис. 8. Вертикальные линии в диаграммах для ядра уравнения Бете–Солпитера связывают волокна с одинаковым индексом.

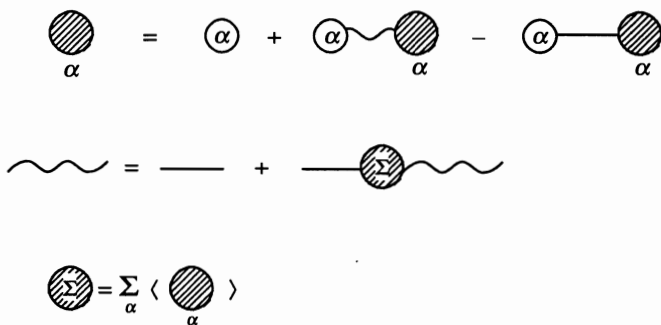


Рис. 6. Система самосогласованных уравнений для функции Грина и перенормированного оператора рассеяния

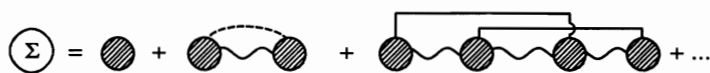


Рис. 7. Диаграммное представление оператора собственной энергии через самосогласованную функцию Грина и перенормированный оператор рассеяния

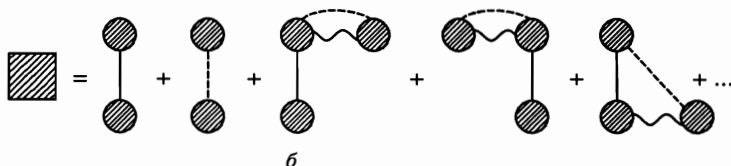
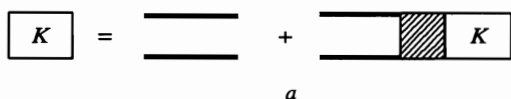


Рис. 8. Уравнение Бете–Солпитера для двухчастичной функции Грина (а). Представление ядра уравнения Бете–Солпитера в виде ряда (б)

### 5. САМОСОГЛАСОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВОЛОКНИСТЫХ СРЕДАХ

Прежде всего исследуем систему самосогласованных уравнений для однородной и изотропной пористой среды. Функция распределения по направлениям волокон  $f(\mathbf{n})$  при этом будет постоянной величиной равной  $1/\pi$ . В этой работе мы ограничимся приближением тонкого волокна,  $ka \ll 1$ . В этом случае затравочный и самосогласованный операторы рассеяния зависят только от продольной составляющей вектора  $\mathbf{k}$  и в системе координат, связанной с волокном, могут быть записаны в виде

$$T_{ij} = 2\pi\delta(k'_3 - k_3)T_{ij}(k_3), \tag{22}$$

$$\tilde{T}_{ij} = 2\pi\delta(k'_3 - k_3)\tilde{T}_{ij}(k_3). \tag{23}$$

Заметим, что при усреднении по положениям волокон в выбранной плоскости оператор рассеяния становится пропорциональным  $\delta(\mathbf{k}'_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})$ . В определение самого оператора



рассеяния, как мы видим из (17), входит дельта-функция  $\delta[\mathbf{n}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})]$  от продольных по отношению к волокну компонент векторов. Произведение этих дельта-функций можно записать в виде

$$\delta(\mathbf{k}'_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})\delta[\mathbf{n}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})] = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\frac{1}{\cos\theta},$$

где  $\theta$  — сферический угол единичного вектора  $\mathbf{n}$  в выбранной нами системе координат. При этом усреднение по мере (1) будет приводить к обычному сферическому интегрированию. С учетом сделанного замечания уравнения самосогласованного поля для оператора рассеяния и функции Грина, приведенные на рис. 6, в этом приближении запишутся в виде

$$\tilde{T}_{ij}(k_3) = T_{ij}(k_3) + T_{il}(k_3) \int (\tilde{G}_{lm} - G_{0lm}) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{T}_{mj}(k_3), \quad (24)$$

$$\tilde{G}_{ij}^{-1}(\mathbf{k}) = G_{0ij}^{-1}(\mathbf{k}) - \tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{k}), \quad (25)$$

$$\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{k}) = n \langle \tilde{T}_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{n}) \rangle. \quad (26)$$

В последнем выражении проводится усреднение по всем ориентациям волокон с функцией распределения  $f(\mathbf{n})$ . Для оператора, обратного к оператору рассеяния, из (24) получим

$$\tilde{T}_{ij}^{-1}(k_3) = T_{ij}^{-1}(k_3) - \int (\tilde{G}_{ij} - G_{0ij}) \frac{d^2k}{(2\pi)^2}.$$

Из этого выражения видно, что перенормированный оператор рассеяния выражается через самосогласованную функцию Грина таким же образом, как и затравочный оператор через затравочную функцию Грина (18):

$$\tilde{T}_{ij}^{-1}(k_3) = - \left\langle \int \exp(i\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{r}) \tilde{G}_{ij} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \right\rangle_a. \quad (27)$$

Для точного решения этих интегральных уравнений необходимо привлекать численные методы. Поэтому мы рассмотрим некоторые приближения, которые позволяют получить простые аналитические ответы. Будем вычислять сначала оператор рассеяния, задавая собственную энергию в виде

$$\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{k}) = -\Pi_{ij}(\mathbf{k})\kappa^2(k^2). \quad (28)$$

Если ограничиться длинноволновым приближением и считать функцию  $\kappa$  постоянной, то такой вид собственно-энергетического оператора соответствует тому, что усредненные течения жидкости удовлетворяют уравнениям Бринкмана [15] с тензором коэффициентов трения Дарси пропорциональным единичному тензору. Функция Грина при этом будет иметь вид

$$\tilde{G}_{ij} = \Pi_{ij}(\mathbf{k}) \frac{1}{k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{k}_* + \kappa^2}, \quad (29)$$

где мы ввели обозначение  $\mathbf{k}_* = U_0/2\nu$ . Подставляя это выражение для функции Грина в (27), получаем интегральное представление для оператора рассеяния. Вычисление оператора рассеяния приведено в Приложении.

При рассмотрении изотропной среды мы ограничимся случаем достаточно высокой плотности упаковки, когда можно пренебречь инерционными эффектами. Оператор рассеяния в этом случае в произвольной системе координат, как показано в Приложении, имеет вид (58)

$$\tilde{T}_{ij} = T_0 \left[ \delta_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_j \right],$$

где

$$T_0 = 4\pi \left[ \ln \frac{\gamma a ((\mathbf{kn})^2 + \kappa^2)^{1/2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{kn})^2}{\kappa^2} \ln \frac{(\mathbf{kn})^2 + \kappa^2}{(\mathbf{kn})^2} \right]^{-1}.$$

На больших масштабах, когда выполнено условие  $k^2/\kappa^2 \ll 1$ , можно написать

$$T_0 = \frac{4\pi}{\ln(\gamma a \kappa/2)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{kn})^2}{\kappa^2 \ln(\gamma a \kappa/2)} \ln \frac{(\mathbf{kn})^2}{\kappa^2} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{kn})^2}{\kappa^2 \ln(\gamma a \kappa/2)} \right].$$

Теперь, усредняя тензор  $\tilde{T}_{ij}$  по всем направлениям вектора  $\mathbf{n}$  и выделяя поперечную часть, получим выражение для собственной энергии:

$$\tilde{\Sigma}_{ij} = \Pi_{ij} \frac{16\pi n}{\ln(\gamma a \kappa/2)} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{17}{300} \frac{k^2}{\kappa^2 \ln(\gamma a \kappa/2)} - \frac{3}{20} \frac{k^2 \ln(k^2/\kappa^2)}{\kappa^2 \ln(\gamma a \kappa/2)} \right\}. \quad (30)$$

Сравнивая это выражение с (28), получаем условие самосогласования:

$$\kappa^2 = -\frac{5}{6} n \frac{16\pi}{\ln(\gamma a \kappa/2)}. \quad (31)$$

Если материал является полидисперсным, то в правой части последнего уравнения необходимо еще усреднить по диаметрам волокон. Зависящую от волнового числа часть собственной энергии можно интерпретировать как уменьшение коэффициента трения в уравнении Бринкмана при уменьшении характерных размеров течения. Выражение для собственной энергии (31) справедливо для бесконечно длинных волокон или, как показано в Приложении, при  $kl \gg 1$ , если учитывать конечную длину волокон  $2l$ . В области больших размеров,  $kl \ll 1$ , используя выражение для оператора рассеяния конечного цилиндра на нулевой угол, полученное в Приложении, можно получить выражение для собственной энергии в этом случае:

$$\tilde{\Sigma}_{ij} = \Pi_{ij} \frac{4\alpha}{a^2 \ln(\gamma a \kappa/2)} \left\{ \frac{5}{6} + \frac{3}{10} \frac{k^2 \ln(2\kappa l/\pi)}{\kappa^2 \ln(\gamma \kappa a/2)} \right\}, \quad (32)$$

где  $\alpha$  обозначает объемную долю волокон в среде. Квадратичное слагаемое в этом выражении часто интерпретируют как перенормировку вязкости. При такой интерпретации в рассматриваемых пористых средах в отличие от суспензий [21, 25, 31] вязкость уменьшается при увеличении плотности упаковки [35].

Теперь рассмотрим анизотропную пористую среду, состоящую из волокон, ориентированных перпендикулярно некоторому выделенному направлению. Будем считать, что в среднем жидкость течет в этом направлении. Такая среда часто рассматривается в качестве модели волокнистых фильтров [14]. Функция распределения по углам для выбранной модели равна

$$f(\mathbf{n}) = \frac{\pi}{2 \sin \theta} \left[ \delta \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (33)$$

где угол  $\phi$  отсчитывается от выделенного направления. Для одноосной анизотропной среды собственную энергию будем искать в виде

$$\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{k}) = -\Pi_{ij}(\mathbf{k})\kappa_{\perp}^2 - \Pi_{i1}\Pi_{1j}(\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2). \quad (34)$$

При этом учитывалось, что в нашей модели пористая среда имеет выделенное направление, совпадающее с осью  $x$ , и что тензор  $\tilde{\Sigma}_{ij}$  должен быть поперечен по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ :

$$k_i \tilde{\Sigma}_{ij} = \tilde{\Sigma}_{ij} k_j = 0.$$

Функция Грина при этом будет иметь вид

$$\tilde{G}_{ij} = \left[ \Pi_{ij}(\mathbf{k}) - \frac{\Pi_{i1}\Pi_{1j}(\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2)}{k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{k}_* + (\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2)\Pi_{11}} \right] \frac{1}{k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{k}_* + \kappa_{\perp}^2}. \quad (35)$$

Функция Грина состоит из изотропного слагаемого (29), в котором  $\kappa$  заменена на  $\kappa_{\perp}$ , и анизотропного, пропорционального разности  $(\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2)$ . Подставляя это выражение для функции Грина в (27), получаем уравнение для определения перенормированного оператора рассеяния в анизотропной среде. Оператор рассеяния в изотропной среде уже вычислен. Вклад анизотропной части функции Грина в оператор рассеяния рассмотрим при  $k_3 = 0$  и малых скоростях течения жидкости  $k_* \ll \kappa_{\perp}$ . Вычисляя простые интегралы, получим диагональный оператор рассеяния с матричными элементами в системе координат, связанной с волокном:

$$\tilde{T}_{11} = 4\pi \left[ \ln \frac{\gamma a}{4} (\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}) + \frac{\kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}} - \frac{1}{2} \right]^{-1},$$

$$\tilde{T}_{22} = 4\pi \left[ \ln \frac{\gamma a}{4} (\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}) - \frac{\kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}} + \frac{1}{2} \right]^{-1},$$

$$\tilde{T}_{33} = 2\pi \left[ \ln \frac{\gamma a}{2} \kappa_{\perp} \right]^{-1}.$$

Усредняя по углам наклона волокон и выделяя затем поперечную к вектору  $\mathbf{k}$  часть усредненного оператора рассеяния, получим выражение для  $\tilde{\Sigma}_{ij}$ :

$$\tilde{\Sigma}_{ij} = 2n\Pi_{ij}(\tilde{T}_{22} + \tilde{T}_{33}) + 2n\Pi_{i1}\Pi_{1j} \left[ 2\tilde{T}_{11} - (\tilde{T}_{22} + \tilde{T}_{33}) \right].$$

Сравнивая это выражение с (34), запишем уравнения для определения  $\kappa_{\perp}$  и  $\kappa_{\parallel}$ :

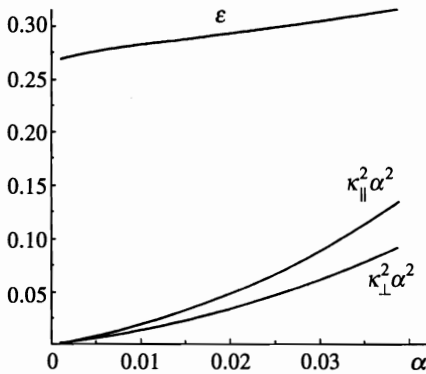


Рис. 9

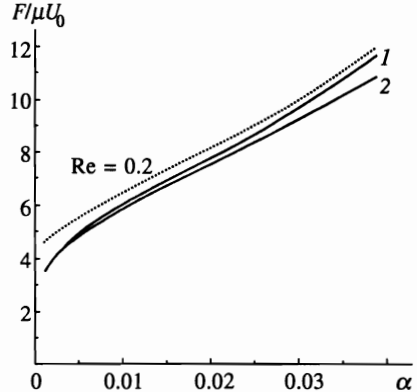


Рис. 10

Рис. 9. Зависимость продольного  $\kappa_{\parallel}^2$  и поперечного  $\kappa_{\perp}^2$  коэффициентов трения, а также анизотропии  $\epsilon$  от плотности упаковки  $\alpha$

Рис. 10. Зависимость силы сопротивления, действующей на единицу длины волокна модельного фильтра, от плотности упаковки. Кривая 1 соответствует расчету без учета анизотропии коэффициентов трения, кривая 2 с учетом анизотропии, а пунктирная линия соответствует учету инерционных эффектов при  $Re = 0.2$

$$\begin{aligned} \kappa_{\parallel}^2 &= -16\pi n \left[ \ln \frac{\gamma a}{4} (\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}) + \frac{\kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}} - \frac{1}{2} \right]^{-1}, \\ \kappa_{\perp}^2 &= -4\pi n \left\{ \left[ \ln \frac{\gamma a}{2} \kappa_{\perp} \right]^{-1} + 2 \left[ \ln \frac{\gamma a}{4} (\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}) - \frac{\kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp} + \kappa_{\parallel}} + \frac{1}{2} \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

В полидисперсном случае правые части этих уравнений должны быть усреднены по радиусам волокон.

Решения этих уравнений приведены на рис. 9 в зависимости от плотности упаковки  $\alpha = 4\pi n a^2$ . Видно, что анизотропия тензора коэффициентов трения в уравнении Бринкмана

$$\epsilon = \frac{\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_{\perp}^2}{\kappa_{\parallel}^2}$$

с увеличением плотности упаковки медленно возрастает, оставаясь на уровне  $\epsilon \sim 0.3$ . На рис. 10 приведены результаты расчетов силы сопротивления в зависимости от плотности упаковки для анизотропной среды с учетом анизотропии функции Грина и без учета. Видно, что пренебрежение анизотропией функции Грина, которое было сделано в работе [14], приводит к несколько большей силе сопротивления.

Если пренебречь анизотропией, то для рассматриваемой модели легко вывести условие самосогласования

$$\kappa^2 = -16\pi n \left[ \ln \frac{\gamma a}{2} (\kappa^2 + k_*^2)^{1/2} - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2k_*^2} \ln \left( 1 + \frac{k_*^2}{\kappa^2} \right) \right]^{-1} \quad (37)$$

и выражение для силы сопротивления, приходящейся на единицу длины волокна,

$$F = -4\pi\mu U_0 \left[ \ln \frac{\gamma a}{2} (\kappa^2 + k_*^2)^{1/2} - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2k_*^2} \ln \left( 1 + \frac{k_*^2}{\kappa^2} \right) \right]^{-1} \quad (38)$$

с учетом инерционных эффектов. При больших скоростях,  $k_*^2 \gg \kappa^2$ , выражение (38) переходит в формулу для силы сопротивления изолированного волокна [36], а в противоположном пределе условие самосогласования (37) совпадает с результатом, полученным в работе [14]. На рис. 10 пунктирной линией показана зависимость силы сопротивления от плотности упаковки при  $Re = 0.2$

## 6. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СКОРОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ ВОЛОКНИСТОЙ СРЕДЕ

Для исследования флуктуаций скорости в случайной среде введем корреляционную функцию скоростей

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int B_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \langle V_i(\mathbf{r}) V_j(0) \rangle, \quad (39)$$

где  $B_{ij}(\mathbf{k}) = \langle V_i(\mathbf{k}) V_j^*(\mathbf{k}) \rangle$  удовлетворяет уравнению Бете–Солпитера [32]. В ядре уравнения Бете–Солпитера для разреженной среды достаточно оставить только член, соответствующий первой диаграмме на рис. 8. В этом приближении для корреляционной функции имеем уравнение

$$B_{ij}(\mathbf{k}) = U_0^2 \delta_{i1} \delta_{j1} \delta(\mathbf{k}) + \tilde{G}_{is}(\mathbf{k}) \tilde{G}_{jp}(\mathbf{k}) n \int \langle \tilde{T}_{sm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \tilde{T}_{pn}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \rangle B_{mn}(\mathbf{k}_1) \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \quad (40)$$

В дальнейшем предположим, что можно пренебречь инерционными эффектами и отличим  $\epsilon$  от нуля. Нас также будет интересовать решение в области  $k \ll \kappa$ , где можно считать оператор рассеяния не зависящим от  $k$ . Будем решать это уравнение разложением по степеням плотности  $n$ . В нулевом приближении решение соответствует невозмущенному потоку. В линейном по плотности приближении получим корреляционную функцию в виде

$$B_{ij} = 4nU_0^2 \tilde{G}_{i1} \tilde{G}_{j1} \int \tilde{T}_{11}^2 \delta(\mathbf{n}\mathbf{k}) f(\mathbf{n}) \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (41)$$

где интегрирование происходит по поверхности сферы. Для изотропной среды

$$\tilde{T}_{11} = 4\pi \left[ \ln \frac{\gamma a \kappa}{2} \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{2} n_1 n_1 \right].$$

Интегрируя по углам, в этом случае приходим к корреляционной функции вида

$$B_{ij} = 4nU_0^2 \frac{(4\pi)^2}{[\ln(\gamma a \kappa / 2)]^2} \Pi_{i1} \Pi_{j1} (k^2 + \kappa^2)^2 \frac{1}{4k} \left[ \left( 1 - \frac{k_1^2}{4k^2} \right)^2 + \frac{k_1^4}{32k^4} \right], \quad (42)$$

где  $k_{\perp}^2 = k^2 - k_1^2$ . Для материала, в котором все волокна ориентированы ортогонально направлению потока, аналогичные вычисления дают

$$B_{ij} = 4nU_0^2 \frac{(4\pi)^2}{[\ln(\gamma a \kappa / 2)]^2} \frac{\Pi_{i1}\Pi_{j1}}{k_{\perp}(k^2 + \kappa^2)^2}. \tag{43}$$

Для этой модели корреляционная функция скоростей в координатном пространстве равна

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = 4nU_0^2 \frac{(4\pi)^2}{[\ln(\gamma a \kappa / 2)]^2} \int \frac{\Pi_{i1}\Pi_{j1}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_{\perp}(k^2 + \kappa^2)^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{44}$$

Если ввести функцию

$$B_0(\kappa, \mathbf{r}) = \int \frac{1}{k_{\perp}(k^2 + \kappa^2)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{4\pi} I_0 \left[ \frac{1}{2} \kappa(r - x) \right] K_0 \left[ \frac{1}{2} \kappa(r + x) \right],$$

то для  $B_{ij}(\mathbf{r})$  можно получить представление в виде

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = 4nU_0^2 \frac{(4\pi)^2}{[\ln(\gamma a \kappa / 2)]^2} \left\{ \delta_{i1}\delta_{j1}B_1 + \left( \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) B_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_3 \right\}. \tag{45}$$

Функции  $B_i$  выражаются через  $B_0$  следующим образом:

$$B_1 = -\frac{\partial}{\partial \kappa^2} B_0,$$

$$B_2 = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial \kappa^2} \left[ \frac{1}{\kappa^2} \left( B_0 - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{4}{\gamma(r+x)} \right) \right],$$

$$B_3 = -\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \kappa^2} \left[ \frac{1}{\kappa^4} \left( B_0 - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{4}{\gamma(r+x)} \right) - \frac{r^2 + x^2}{32\pi\kappa^2} \ln \frac{4}{\gamma(r+x)} \right].$$

В области  $\kappa x \gg 1$  экспоненциально малым вкладом в функции  $B_i$ , возникающим от  $B_0$ , можно пренебречь. Оставшиеся логарифмические члены приводят к тому, что на больших расстояниях корреляции убывают как  $r^{-2}$ . При малых значениях продольной координаты,  $\kappa x \leq 1$ , необходимо добавить вклад от функции  $B_0$ , которая при  $\kappa r \gg 1$  ведет себя как  $r^{-1}$ . Корреляция продольных скоростей в этой области убывает как  $r^{-1}$ . Значение корреляционного тензора в нуле,  $B_{ij}(0)$ , легко найти непосредственно из (44). Тензор оказывается диагональным с компонентами

$$B_{11} = 6B_{22} = 6B_{33} = \frac{3}{32} U_0^2 \left( \ln \frac{2}{\gamma a \kappa} \right)^{-1}.$$

Видно, что кинетическая энергия, содержащаяся в продольных компонентах скорости, в три раза выше, чем в поперечных.

Зная корреляционную функцию скоростей, можно найти коэффициенты продольной и поперечной диффузии пассивной примеси, помещенной в жидкость. Для частицы, находящейся в момент времени  $t = 0$  в точке  $\mathbf{r} = 0$  и движущейся вместе с жидкостью, имеем

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{r}(t')) dt'.$$

Для среднего квадрата компоненты смещения относительно невозмущенной траектории  $x'_i = (x_i - U_{0i}t)$  получим

$$\langle x'^2_i \rangle = \int_0^t \int_0^t \int \langle \tilde{V}_i(\mathbf{k}) \tilde{V}_i^*(\mathbf{k}') \exp [ik_1 U_0 t' - k'_1 U_0 t'' + i\mathbf{k}\mathbf{r}_1(t') - i\mathbf{k}'\mathbf{r}_1(t'')] \rangle \frac{dk dk'}{(2\pi)^6} dt' dt''.$$

Если предположить, что  $\mathbf{r}_1(t)$  описывается винеровским случайным процессом [20] с плотностью вероятности перехода

$$P(\mathbf{r}(t)|\mathbf{r}(t')) = \frac{1}{8D_{\perp} D_{\parallel}^{1/2} [\pi(t-t')]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[x(t) - x(t')]^2}{4D_{\parallel}(t-t')} - \frac{[\mathbf{r}_{\perp}(t) - \mathbf{r}_{\perp}(t')]^2}{4D_{\perp}(t-t')} \right\} \quad (46)$$

и слабо коррелирует с  $\tilde{V}_i(\mathbf{k})$ , то для квадрата смещения найдем

$$\langle x'^2_i(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t \int \langle \tilde{V}_i(\mathbf{k}) \tilde{V}_i^*(\mathbf{k}') \rangle \langle \exp [ik_1 U_0 (t' - t'') + i\mathbf{k}_{\perp} (\mathbf{r}_{1\perp}(t') - \mathbf{r}_{1\perp}(t''))] \rangle \frac{dk}{(2\pi)^3} dt' dt''.$$

Вычисляя среднее от экспоненты с функцией перехода (46), получим, что на больших временах,  $U_0 \kappa t \gg 1$ , квадрат смещения будет подчиняться диффузионному закону  $\langle x'^2_i \rangle = 2D_i t$  с коэффициентами диффузии вдоль и поперек потока равными соответственно

$$2D_{\parallel} = \int \int_{-\infty}^{\infty} B_{11}(\mathbf{k}) \exp (ik_1 U_0 \tau - k_1^2 D_{\parallel} |\tau| - k_{\perp} D_{\perp} |\tau|) d\tau \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (47)$$

$$2D_{\perp} = \int \int_{-\infty}^{\infty} B_{22}(\mathbf{k}) \exp (ik_1 U_0 \tau - k_1^2 D_{\parallel} |\tau| - k_{\perp} D_{\perp} |\tau|) d\tau \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (48)$$

При вычислении продольного коэффициента диффузии в экспоненте (47) можно пренебречь членами, содержащими коэффициенты диффузии

$$D_{\parallel} = \frac{\pi}{U_0} \int B_{11}(\mathbf{k}) \delta(k_1) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = -\frac{\pi}{4} \frac{U_0}{\kappa \ln(\gamma \kappa / 2)}.$$

При вычислении поперечного коэффициента диффузии в экспоненте (48) необходимо сохранить член, содержащий коэффициент продольной диффузии

$$D_{\perp} = \int B_{22}(\mathbf{k}) \frac{D_{\parallel}}{U_0^2 + D_{\parallel}^2 k_1^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Интегрируя и учитывая, что  $D_{\parallel} \kappa \ll U_0$ , получим

$$D_{\perp} = -D_{\parallel} \frac{1}{8 \ln(\gamma a \kappa / 2)}.$$

Коэффициент поперечной диффузии в рассматриваемой модели оказывается значительно меньше, чем коэффициент продольной диффузии. Отметим, что коэффициент продольной диффузии для анизотропной среды лишь численным множителем отличается от аналогичного коэффициента, полученного в работе [37] для изотропной волокнистой среды.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе диаграммная техника теории многократного рассеяния, развитая для исследования волновых полей в случайных средах, применена для изучения гидродинамики трехмерных волокнистых пористых сред. Подобно задачам о гидродинамике суспензий выведена система самосогласованных уравнений (24)–(26) для функции Грина в пористой среде и перенормированной матрицы коэффициентов трения, аналогичной оператору рассеяния для волновых задач. Показано, что ряды теории многократного рассеяния можно частично просуммировать таким образом, что все диаграммы будут содержать только перенормированные самосогласованные функции Грина и оператор рассеяния. Теория самосогласованного поля применена для исследования усредненных уравнений течения жидкости в изотропной среде и в анизотропном волокнистом фильтре. Получено выражение, определяющее перенормировку вязкости в изотропной волокнистой среде в зависимости от плотности упаковки и геометрических размеров волокон (32). Вычислена корреляционная функция скоростей (45) и найдены коэффициенты продольной и поперечной диффузии пассивной примеси, движущейся вместе с жидкостью.

Автор благодарен А. А. Веденову, А. А. Киршу, В. И. Ролдугину, И. Б. Стечкиной, С. В. Худякову за полезные обсуждения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

В Приложении мы вычислим оператор рассеяния для волокна, расположенного перпендикулярно направлению средней скорости. Для вычисления оператора рассеяния с использованием формулы (27) необходимо сначала вычислить два интеграла

$$I_1 = \int \frac{e^{i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}}}{k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{k}_{*} + \kappa_{\perp}^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}, \tag{49}$$

$$I_2 = \int \frac{e^{i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}}}{k^2(k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{k}_{*} + \kappa_{\perp}^2)} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}. \tag{50}$$

Используя представление

$$x^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} d\alpha$$



для знаменателя в интеграле  $I_1$  и беря затем интеграл Гаусса по гармоникам Фурье, получим

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} e^{rk_*} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \exp \left\{ -(k_3^2 + \kappa_\perp^2 + k_*^2) \left[ \alpha + \frac{r^2}{4\alpha(k_3^2 + \kappa_\perp^2 + k_*^2)} \right] \right\} = \frac{1}{2\pi} e^{rk_*} K_0(r\lambda), \quad (51)$$

где  $\lambda^2 = (k_3^2 + \kappa_\perp^2 + k_*^2)$  и было использовано интегральное представление для функций Бесселя мнимого аргумента [38]:

$$\int_0^\infty \exp \left[ -\frac{x}{2} \left( t + \frac{z^2}{t} \right) \right] t^{-\nu-1} dt = 2z^{-\nu} K_\nu(xz). \quad (52)$$

Аналогичным образом интеграл  $I_2$  можно привести к виду

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\eta e^{rk_* \eta} \frac{r}{\lambda(\eta)} K_1[r\lambda(\eta)], \quad (53)$$

где  $\lambda^2(\eta) = k_3^2 + \kappa_\perp^2 \eta + k_*^2 \eta^2$ . Используя для функций Бесселя разложения при малых значениях аргумента [38]

$$K_0(x) \approx -\ln \frac{\gamma x}{2}, \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \ln \frac{\gamma x}{2} - \frac{x}{4}, \quad (54)$$

где  $\gamma = 1.781$  — постоянная Эйлера, для первого интеграла получим

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma r \lambda}{2}, \quad (55)$$

а интеграл  $I_2$ , приводится к виду

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{r^2}{2} \left( \ln \frac{\gamma r \lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 \frac{1 + (k_* x - \kappa^2 r^2 / 4) \eta - k_*^2 y^2 \eta^2 / 2}{k_3^2 + \kappa^2 \eta + k_*^2 \eta^2} d\eta \right\}. \quad (56)$$

Этот интеграл легко берется, но различные предельные случаи проще вычислять непосредственно из (56). Искомые матричные элементы выражаются через интегралы  $I_1, I_2$  и производные по координатам от  $I_2$  с последующим усреднением по поверхности цилиндра радиусом  $r = a$ . В результате мы получаем выражения для матрицы  $\bar{T}_{ij}^{-1}$  в приближении тонкого волокна. В случае разреженной среды или высоких гармоник, когда выполнено условие  $\kappa^2 \ll k_3 k_*$ , вычисления приводят к матричным элементам для обратного оператора, совпадающего в этом случае с затравочным:

$$\begin{aligned} T_{11}^{-1} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ -\ln \frac{\gamma a (k_3^2 + k_*^2)^{1/2}}{2} + \frac{1}{2} \right], \\ T_{22}^{-1} &= T_{11}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \left[ -1 + \frac{k_3}{k_*} \operatorname{arctg} \left( \frac{k_3}{k_*} \right) \right], \\ T_{33}^{-1} &= 2T_{11}^{-1} + \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \frac{k_3}{k_*} \operatorname{arctg} \left( \frac{k_3}{k_*} \right) \right], \\ T_{13}^{-1} &= T_{31}^{-1} = -\frac{i}{2} \frac{k_3}{k_*} \ln \frac{(k_3^2 + k_*^2)}{k_3^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

В противоположном случае,  $\kappa^2 \gg k_3 k_*$ , можно рассмотреть две различные возможности. Сначала мы полностью пренебрежем инерционными эффектами, считая  $k_* = 0$ . Для матричных элементов диагонального в этом случае обратного оператора рассеяния получим

$$\tilde{T}_{11}^{-1} = \tilde{T}_{22}^{-1} = \frac{1}{2} \tilde{T}_{33}^{-1} = -\frac{1}{4\pi} \left[ -\ln \frac{\gamma a (k_3^2 + \kappa^2)^{1/2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{k_3^2}{\kappa^2} \ln \frac{(k_3^2 + \kappa^2)}{k_3^2} \right]. \quad (58)$$

В случае  $k_3 = 0$  с учетом инерционных членов установим, что оператор опять является диагональным

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{33}^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma a (k_*^2 + \kappa^2)^{1/2}}{2}, \\ \tilde{T}_{11}^{-1} &= \frac{1}{2} \tilde{T}_{33}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_*^2} \ln \frac{(k_*^2 + \kappa^2)}{\kappa^2} \right], \\ \tilde{T}_{22}^{-1} &= \frac{1}{2} \tilde{T}_{33}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_*^2} \ln \frac{(k_*^2 + \kappa^2)}{\kappa^2} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Обращая полученные матрицы, найдем оператор рассеяния при рассматриваемых условиях.

Полученные выражения справедливы для бесконечно длинных волокон. Для того чтобы оценить влияние ограниченности волокон, рассмотрим цилиндр длиной  $2l$ , расположенный вдоль оси  $z$ . Будем считать, что его нижнее основание лежит в плоскости  $z = 0$ . Так как сила, действующая на жидкость со стороны волокна, теперь отлична от нуля только при  $0 < z < 2l$ , ее на этом интервале можно разложить в ряд Фурье

$$\mathbf{F}(z) = \sum_n \mathbf{F}_n \sin k_n z,$$

где  $k_n = \pi n / 2l$ . Аналогичное разложение можно написать и для скорости внешнего течения жидкости на этом отрезке оси  $z$ :

$$\mathbf{V}(z) = \sum_n \mathbf{V}_n \sin k_n z.$$

Коэффициенты рядов Фурье  $\mathbf{F}_n$  и  $\mathbf{V}_n$  связаны с коэффициентами интегрального преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n(k_3) &= \sum_n f^*(k_n, k_3) \mathbf{F}_n, \\ \mathbf{V}_n &= \frac{1}{l} \int f(k_n, k_3) \mathbf{V}(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \end{aligned}$$

где введена функция

$$f(k_n, k_3) = \int_0^{2l} \sin k_n z e^{-ik_3 z} dz = ie^{ik_3 l} \left[ e^{-ik_n l} \frac{\sin(k_3 - k_n)l}{(k_3 - k_n)} - e^{ik_n l} \frac{\sin(k_3 + k_n)l}{(k_3 + k_n)} \right].$$

Распределение сил вдоль волокна должно определяться из условия равенства нулю полной скорости на его поверхности:

$$V_i(z) = \frac{1}{\mu} \int \tilde{T}_{ij}^{-1} F_j(k_3) \frac{dk_3}{2\pi}. \quad (60)$$

Подставляя в это равенство на отрезке  $0 < z < 2l$  представление для скорости и силы в виде рядов Фурье, получим

$$V_{in} = \int \tilde{T}_{ij}^{-1}(k_3) Q_n(k_3, k_n) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F_{jn}}{\mu}, \quad (61)$$

где

$$Q_n(k_3, k_n) = \left[ \frac{\sin(k_3 - k_n)2l}{k_3 - k_n} + \frac{\sin(k_3 + k_n)2l}{k_3 + k_n} \right].$$

Для изотропной среды при малых скоростях течения оператор рассеяния бесконечно длинного волокна является диагональным. В этом случае мы можем явно из (61) выразить силу сопротивления через поле течения и получить выражение для диагональных компонент оператора рассеяния ограниченного цилиндра:

$$\tilde{T}_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{l} \sum_n \frac{f^*(k_n, k_3) f(k_n, k'_3)}{\int \tilde{T}_i^{-1}(k'_3) Q_n(k'_3, k_n) dk'_3 / 2\pi}. \quad (62)$$

При условии  $\kappa l \gg 1$  функцию  $Q_n(k_3, k_n)$  можно заменить на  $2\pi\delta(k_3 - k_n)$ . Для коротких по сравнению с длиной волокна возмущений,  $(k_3 l, k'_3 l) \gg 1$ , основной вклад в сумму (62) дают большие значения  $n$ , при которых сумму можно заменить интегралом по  $k_n$ . Учитывая, что функция  $f(k_n, k_3)$  при  $k_n l \gg 1$  пропорциональна  $\pi\delta(k_n - k_3)$ , получим в этом пределе оператор рассеяния

$$\tilde{T}_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 2 \frac{\sin[(k_3 - k'_3)l]}{(k_3 - k'_3)} \exp(i(k'_3 - k_3)l) \tilde{T}_i(k_3).$$

В области длинных волн,  $(k_3 l, k'_3 l) \ll 1$ , основной вклад в сумму (62) идет от малых значений  $n$ . В частности, для оператора рассеяния на нулевой угол получим выражение

$$\tilde{T}_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{\tilde{T}_i(0)}{l} \sum_n |f(k_n, 0)|^2 + \frac{k_3^2}{2l} \sum_n \tilde{T}_i(k_n) \frac{\partial^2}{\partial k_3^2} |f(k_n, 0)|^2. \quad (63)$$

Вычисляя суммы по  $n$ , получим выражение для диагональных компонент оператора рассеяния в длинноволновом пределе:

$$\tilde{T}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \tilde{T}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 2\tilde{T}_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{8\pi l}{\ln(\gamma\kappa a/2)} \left[ 1 + \frac{k_3^2 \ln(2\kappa l/\pi)}{\kappa^2 \ln(\gamma\kappa a/2)} \right]. \quad (64)$$

## Литература

1. H. Cheng and G. Papanicolaou, *J. Fluid Mech.* **335**, 189 (1997).
2. B. Cichocki and K. Hinsen, *Phys. Fluids* **2**, 285 (1995).
3. B. Cichocki, B. U. Felderhof, K. Hinsen et al., *J. Chem. Phys.* **100**, 3780 (1994).
4. I. L. Claey and J. F. Brady, *J. Fluid Mech.* **251**, 411; **443**, 479 (1993).
5. T. Tran-Cong and N. Phan-Thien, *Phys. Fluids A* **1**, 453 (1989).
6. J. F. Brady and G. Bossis, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20**, 111 (1988).
7. В. Н. Покровский, *Статистическая механика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
8. D. J. Jeffrey and A. Acrivos, *AIChE. J.* **22**, 417 (1976).
9. G. K. Batchelor, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **6**, 227 (1974).
10. I. D. Howells, *J. Fluid Mech.* **64**, 449 (1974).
11. E. J. Hinch, *J. Fluid Mech.* **83**, 695 (1977).
12. G. W. Jackson and D. F. James, *Can. J. Chem. Eng.* **64**, 364 (1986).
13. A. A. Kirsch and I. B. Stechkina, in *Fundamentals of Aerosol Sci.*, ed. by D. T. Shaw, J. Wiley & Sons, New York (1978), p. 165.
14. L. Spielman and S. L. Goren, *Envir. Sci. and Tech.* **2**, 279 (1968).
15. H. C. Brinkman, *Appl. Sci. Res. A* **1**, 27 (1947).
16. J. J. L. Higdon and G. D. Ford, *J. Fluid Mech.* **308**, 341 (1996).
17. R. C. Brown, *Filtr. and Sep.* № 3, 165 (1997).
18. А. Л. Черняков, А. А. Кириш, *Коллоидный журнал* **59**, 698 (1997).
19. Л. Сантало, *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*, Наука, Москва (1983).
20. Н. Г. Ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, Высшая школа, Москва (1990).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, изд. 3, Наука, Москва (1986).
22. B. U. Felderhof, *Physica A* **151**, 1 (1988).
23. P. Mazur, *Faraday Discuss. Chem. Soc.* **83**, 33 (1987).
24. K. F. Freed and M. Muthukumar, *J. Chem. Phys.* **68**, 2088 (1978).
25. M. Muthukumar and K. F. Freed, *J. Chem. Phys.* **70**, 5875 (1979).
26. J. M. Burgers, in *Second Report on Viscosity and Plasticity*, Kon. Ned. Akad. Wet., Verhand (1938), (Eerste sectie), Dl XVI, № 4, p. 113.
27. Д. Хаппель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, Москва (1976).
28. А. Исмиару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981), т. 2.
29. C. K. W. Tam, *J. Fluid Mech.* **38**, 537 (1969).
30. K. F. Freed and S. F. Edwards, *J. Chem. Phys.* **61**, 3626 (1974).
31. E. S. G. Shaqfen and G. H. Fredrickson, *Phys. Fluids A* **2**, 7 (1990).
32. U. Frisch, in *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, ed by A. T. Barucha-Reid, Academic Press, New York (1968), Vol. 1, p. 76.
33. S. Childress, *J. Chem. Phys.* **56**, 2527 (1972).
34. C. R. Gochmour, H. C. Anderson, and M. D. Fayer, *J. Chem. Phys.* **70**, 4254 (1979).
35. J. Koplik and H. Levine, *Phys. Fluids* **26**, 2864 (1983).
36. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва (1947).
37. D. L. Koch and J. F. Brady, *AIChE. J.* **32**, 575 (1986).
38. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).