

## ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ В СЛАБЫХ ПОЛЯХ И АСИМПТОТИКА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. С. Попов

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

А. В. Сергеев

*Department of Chemistry, Southern Methodist University  
PO Box 750 314, Dallas, Texas, USA*

Поступила в редакцию 19 ноября 1997 г.

Используя метод мнимого времени, мы исследуем структуру рядов теории возмущений (ТВ) в задаче об атоме водорода в электрическом  $\mathcal{E}$  и магнитном  $\mathcal{H}$  полях. Показано, что существует некоторое «критическое» значение отношения  $\gamma = \mathcal{H}/\mathcal{E}$ , при котором ряд ТВ для основного состояния из знакопостоянного (при  $\gamma < \gamma_c$ ) превращается в знакопеременный ( $\gamma > \gamma_c$ ). Этот вывод подтверждается прямым вычислением высших порядков ТВ. Смена режима асимптотики объясняется конкуренцией между вкладами различных комплексных траекторий, описывающих подбарьерное движение электрона. При этом значение параметра  $\gamma_c$  зависит от угла  $\theta$  между электрическим и магнитным полями.

1. Задача об атоме водорода во внешних полях имеет фундаментальное значение для квантовой механики и атомной физики и часто встречается в приложениях (см., например, [1–5] и указанные там ссылки).

Недавно [6–8] была развита квазиклассическая теория ионизации атомов и ионов под действием постоянных и однородных электрического  $\mathcal{E}$  и магнитного  $\mathcal{H}$  полей. При этом для вычисления вероятности ионизации  $w(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  использовался метод мнимого времени [9–11], дающий наглядное описание подбарьерного движения частиц с помощью классических уравнений движения, но с мнимым «временем»<sup>1)</sup>.

Для вероятности ионизации атомного  $s$ -уровня с энергией связи  $|E_0| = \kappa^2/2$  получена формула ( $\hbar = m = e = 1$ , атомные единицы):

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = \kappa^2 R(\gamma, \theta) \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} g(\gamma, \theta) \right\}, \quad (1)$$

которая является асимптотически точной в пределе слабых ( $\epsilon, h \ll 1$ ) полей. Здесь  $\epsilon = \mathcal{E}/\kappa^3 \mathcal{E}_a$  и  $h = \mathcal{H}/\kappa^2 \mathcal{H}_a$  — приведенные значения электрического и магнитного полей,  $\theta$  — угол между полями,  $\mathcal{E}_a = m^2 e^5 / \hbar^4$  и  $\mathcal{H}_a = m^2 c e^3 / \hbar^3$  — атомные единицы для напряженностей поля,  $m$  — масса электрона,  $\gamma = h/\epsilon$ ,

<sup>1)</sup> Метод мнимого времени был развит в теории многофотонной ионизации атомов и ионов полем сильной световой волны [9, 10] (см. также [12], стр. 225 и далее) и использовался также в задаче о рождении электрон-позитронных пар из вакуума в переменном электрическом поле [11, 13]. В работах [14–16] этот метод был применен к исследованию асимптотики высших порядков  $1/n$ -разложения в многомерных задачах квантовой механики, в том числе для задачи двух кулоновских центров (другой подход к этой проблеме см. в [17, 18]).

$$g(\gamma, \theta) = \frac{3}{2}\beta \left[ 1 - \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\gamma} \sin \theta - \frac{1}{3}\beta^2 \cos^2 \theta \right], \quad (2)$$

$\beta = \tau_0/\gamma, \tau_0 = \tau_0(\gamma, \theta)$  — положительный корень уравнения

$$\tau^2 - \sin^2 \theta (\tau \operatorname{cth} \tau - 1)^2 = \gamma^2 \quad (3)$$

и, наконец,  $R$  — предэкспоненциальный множитель (довольно сложного вида), который приведен в [7]:  $R = 2^{2\eta} \epsilon^{1-2\eta} P Q^\eta$  в принятых там обозначениях. Уравнение (3) легко получается с помощью метода мнимого времени, причем  $\tau_0$  имеет простой физический смысл:  $\tau_0 = -i\omega_L t_0$ , где  $\omega_L = |e|\mathcal{H}/mc$  — ларморовская частота, а  $t_0$  — «время» (чисто мнимое) подбарьерного движения электрона. Отметим, что при  $\gamma \rightarrow 0$

$$\beta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{18} \gamma^2 + \dots,$$

а при  $\gamma \rightarrow \infty$

$$\beta(\gamma, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \theta} - \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \gamma^{-1} + O(\gamma^{-2}), & 0 \leq \theta < \pi/2, \\ \frac{\gamma}{2}(1 + \gamma^{-2} + \dots), & \theta = \pi/2. \end{cases} \quad (3a)$$

Соответственно, для функции  $g$ , определяющей главный (экспоненциальный) множитель в вероятности ионизации, получаем

$$\begin{aligned} g(\gamma, \theta) &= 1 + O(\gamma^2), \quad \gamma \rightarrow 0, \\ g(\gamma, \theta) &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \gamma^{-1} + \dots, \quad \gamma \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (36)$$

(при  $\theta < \pi/2$ ; для случая  $\theta = \pi/2$  асимптотика имеет иной вид, см. ниже формулу (16)). Функция  $g(\gamma, \theta)$  монотонно возрастает<sup>2)</sup> вместе с  $\gamma$  (рис. 1), поэтому увеличение магнитного поля (при фиксированном  $\mathcal{E}$ ) резко уменьшает вероятность ионизации, стабилизируя атомный уровень [6, 7].

Используя (1)–(3) и применяя те же соображения, что и в [15, 16], можно получить асимптотику высших порядков теории возмущений (ТВ), что является предметом настоящей работы. Заметим, что высшие порядки ТВ исследованы в настоящее время во многих задачах квантовой механики: ангармонический осциллятор [20–22], потенциалы Юкавы и воронки [23–26], эффекты Штарка [27–33] и Зеемана [34–36] в атоме водорода, молекулярный ион водорода и др., а также для  $1/n$ -разложения [14–17]. Рассмотренная ниже задача интересна в том отношении, что здесь при определенном значении параметра  $\gamma = \gamma_c$  происходит смена режима асимптотики: ряд ТВ из знакопостоянного превращается в знакопеременный, что находит свое объяснение при рассмотрении, наряду с обычной подбарьерной траекторией, нового класса комплексных подбарьерных траекторий.

Вопрос об асимптотике высших порядков ТВ представляет интерес с общей точки зрения, а также практически важен при вычислении сдвигов атомных уровней и их

<sup>2)</sup> Отметим, что эта функция впервые вычислена в работе [19].

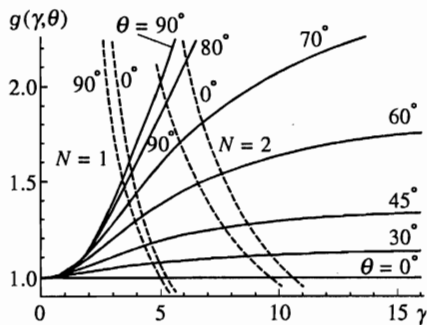


Рис. 1. Функция  $g(\gamma, \theta)$  (сплошные кривые, у которых указано значение угла  $\theta$ ) в зависимости от параметра  $\gamma$ . Штриховые кривые — значения  $|g_c(\gamma, \theta)|$  при  $N = 1$  и  $2$ , отвечающие решению (10)–(12)

ширин  $\Gamma = \hbar w(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  с использованием специальных процедур суммирования расходящихся рядов, таких как методы суммирования Бореля или Паде-Бореля (в этой связи см., например, работы [28–33, 37, 38]).

2. При расчете уровней энергии атомов в электрическом поле  $\mathcal{E}$  стандартным подходом является разложение энергии в ряд ТВ:

$$E(\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \mathcal{E}^k. \tag{4}$$

Согласно аргументу Дайсона [39], нестабильность состояния (комплексная энергия  $E = E_r - i\Gamma/2$ ,  $\Gamma$  — ширина уровня) связана с расходимостью ряда ТВ. Мы изучим поведение высших порядков ТВ в присутствии магнитного поля. Для оценки поведения коэффициентов ТВ  $E_k$  при  $k \rightarrow \infty$  используем дисперсионные соотношения [20, 28, 33]

$$E_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^{k+1}} d\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^{k+1}} d\mathcal{E} \tag{5}$$

(при этом учитываются известные аналитические свойства функции  $E(\mathcal{E})$ , в частности, ее поведение на большом круге [32]:  $|E(\mathcal{E})| \propto (\mathcal{E} \ln \mathcal{E})^{2/3}$  при  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ , для основного состояния атома водорода).

Асимптотика высших порядков ТВ определяется шириной уровня  $\Gamma(\mathcal{E})$  в сколь угодно слабом поле, поэтому можно использовать квазиклассическую формулу (1). Уравнение (3) является четным относительно  $\tau$  и имеет пару корней,  $\pm\tau_0$ , для которых значения функции  $g(\gamma, \theta)$  различаются знаком. С учетом этого из (1) и (5) вытекает, что

$$E_k \approx \frac{1 + (-1)^k}{2} k! a^k k^\beta \left( c_0 + \frac{c_1}{k} + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty, \tag{6}$$

$$a = 3 [2\kappa^3 g(\gamma, \theta)]^{-1} \tag{7}$$

(в случае основного состояния нечетные порядки ТВ для энергии  $E(\mathcal{E})$  обращаются в нуль тождественно). Далее мы будем рассматривать лишь четные порядки ТВ, опуская множитель  $[1 + (-1)^k]/2$ . В частности, для эффекта Штарка в атоме водорода [28]

$$E_k \approx -\frac{6}{\pi} k! \left(\frac{3}{2}\right)^k \left[ 1 - \frac{107}{18k} + \frac{7363}{648k^2} + \dots \right], \quad a = \frac{3}{2}, \quad \beta = 0 \tag{6a}$$

(основное состояние:  $E_0 = -1/2$ ,  $\kappa = \sqrt{-2E_0} = 1$ ).

Наряду со штарковским разложением (4) рассмотрим разложение энергии основного состояния по степеням магнитного поля:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k \mathcal{H}^k, \quad \tilde{E}_k = \gamma^{-k} E_k. \tag{8}$$

В случае эффекта Зеемана ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) высшие порядки этого разложения также возрастают факториально [35, 36]:

$$\tilde{E}_k \approx (-1)^{(k+2)/2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{5/2} \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi}\right)^k [1 + O(k^{-1})] \tag{66}$$

( $k$  — четное), что формально отвечает асимптотике (6) с чисто мнимым параметром  $\tilde{a} = a/\gamma = \pm(\pi i)^{-1}$ . В то же время при  $\gamma \gg 1$  в силу уравнений (3б) и (7)

$$\tilde{a} = 3/2\gamma g(\gamma, \theta) \approx \frac{3}{2\gamma} \cos \theta \rightarrow 0,$$

что противоречит предыдущему результату. Это наводит на мысль о существовании других решений (т. е. комплексных подбарьерных траекторий, для которых параметр  $\tilde{a}$  не исчезает в пределе сильного магнитного поля). Покажем, что это действительно так, решая уравнение (3) при  $\gamma \rightarrow \infty$  в комплексной области.

Полагая  $\tau = i\tilde{\tau}$  и  $\gamma = i\tilde{\gamma}$ , перепишем (3) в виде

$$\tilde{\tau}^2 + \sin^2 \theta (1 - \tilde{\tau} \operatorname{ctg} \tilde{\tau})^2 = \tilde{\gamma}^2. \tag{9}$$

При  $\gamma \rightarrow \infty$  есть две возможности: либо  $\tilde{\tau}_0 \rightarrow \pm i\gamma / \cos \theta$  (при этом  $\operatorname{ctg} \tilde{\tau}_0 \rightarrow \mp i$ ), либо  $\tilde{\tau}_0 \rightarrow \pm N\pi$  с целым  $N \neq 0$  ( $\operatorname{ctg} \tilde{\tau}_0 \rightarrow \infty$ ). Первая возможность соответствует рассмотренному выше вещественному решению. Во втором случае получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_0 = N\pi + N\pi \sin \theta \cdot \tilde{\gamma}^{-1} + \frac{1}{2}(N\pi)^3 \sin \theta \left[ \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta\right) \tilde{\gamma}^{-3} + \right. \\ \left. + \sin \theta \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta\right) \tilde{\gamma}^{-4} \right] + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

( $N = 1, 2, \dots$ ), причем  $\tilde{\tau}_0^*$ ,  $-\tilde{\tau}$  и  $-\tilde{\tau}_0^*$  — также решения уравнения (9). Вводя функцию

$$G(\gamma, \theta) = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\pi} g_c(\gamma, \theta) = \frac{2\tilde{\tau}_0^3}{3\pi\tilde{\gamma}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left[ 1 + 3 \operatorname{ctg} \tilde{\tau}_0 \left( \operatorname{ctg} \tilde{\tau}_0 - \frac{1}{\tilde{\tau}_0} \right) \right] \right\} \tag{11}$$

и подставляя сюда (10), после простых, хотя и громоздких вычислений находим

$$\begin{aligned} G(\gamma, \theta) = N \left\{ 1 - 2 \sin \theta \cdot \tilde{\gamma}^{-1} + \left( \sin^2 \theta - \frac{(N\pi)^2}{3} \cos^2 \theta \right) \tilde{\gamma}^{-2} + \right. \\ \left. + (N\pi)^2 \sin \theta \left( \frac{2}{3} \sin^2 \theta - 1 \right) \cdot \tilde{\gamma}^{-3} + (N\pi)^2 \sin^2 \theta \left( \frac{1}{3} \sin^2 \theta - 1 \right) \tilde{\gamma}^{-4} - \right. \\ \left. - (N\pi)^2 \sin \theta \left[ \frac{1}{3} \sin^2 \theta + (N\pi)^2 \left( \frac{2}{15} \sin^4 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right) \right] \tilde{\gamma}^{-5} + \dots \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

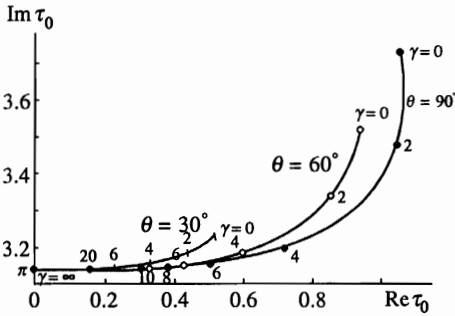


Рис. 2

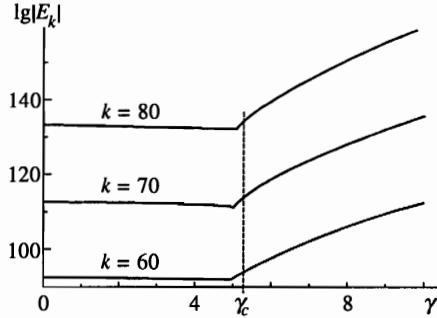


Рис. 3

Рис. 2. Решения уравнения (9) в комплексной плоскости при  $\theta = 30^\circ, 60^\circ$  и  $90^\circ$  ( $N = 1$ ). На кривых отмечены значения параметра  $\gamma = 0, 2, 4, \dots$

Рис. 3. Высшие порядки ТВ (4) для основного состояния атома водорода в параллельных полях

Эти разложения справедливы при  $\gamma \rightarrow \infty$ . С другой стороны, значение  $\tilde{\tau}_0$  при  $\gamma = 0$  определяется из уравнения  $\text{ctg } \tilde{\tau}_0 - 1/\tilde{\tau}_0 = \pm i/\sin \theta$ . Численный анализ уравнения (9) показывает, что с ростом  $\gamma$  точка  $\tau_0 = i \tilde{\tau}_0(\gamma, \theta)$  описывает на комплексной плоскости кривые, приведенные на рис. 2.

Нас в основном будет интересовать случай  $N = 1$ , когда функция  $G(\gamma, \theta)$  минимальна по модулю. Значения  $|g_c| = |(3\pi/2\tilde{\gamma})G(\gamma, \theta)|$  для  $N = 1$  и 2 изображены на рис. 1 штриховыми линиями. Для достаточно больших  $\gamma$ , когда  $|g_c| < g$ , параметр асимптотики  $a$  находится по формуле (7) с заменой  $g$  на  $g_c$ . Из-за существования пары комплексно-сопряженных решений,  $\tilde{\tau}_0$  и  $\tilde{\tau}_0^*$ , асимптотика высших порядков ТВ имеет теперь вид

$$\tilde{E}_k \sim (-1)^{k/2} \text{Re}(CA^k) k! k^\beta, \quad A = i\tilde{a} = 3/2|g_c(\gamma, \theta)|, \quad (13)$$

поэтому ряд ТВ является при достаточно больших  $k$  знакопеременным.

В пределе  $\theta \rightarrow 0$  (параллельные поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ) разложение (12) обрывается на третьем члене, поэтому решение можно получить в аналитическом виде:

$$G(\gamma, 0) = N \left[ 1 - \frac{(N\pi)^2}{3\tilde{\gamma}^2} \right], \quad g_c(\gamma, 0) = i \frac{3N\pi}{2\gamma} \left[ 1 + \frac{(N\pi)^2}{3\gamma^2} \right]. \quad (14)$$

Условие  $|g_c(\gamma, 0)| = g(\gamma, 0) = 1$  определяет «критическое» значение параметра  $\gamma$  [6]:

$$\gamma_c = \pi \left[ \left( (1 + \sqrt{2})^{1/3} - (1 + \sqrt{2})^{-1/3} \right)^{-1} \right]^{-1} = 5,270495\dots, \quad N = 1 \quad (15)$$

(см. Приложение). При  $\gamma < \gamma_c$ , т. е. в достаточно сильном электрическом поле, доминирующий вклад в асимптотику  $E_k$  дает подбарьерная траектория с вещественным  $\tau_0$ , отвечающая функции  $g(\gamma, 0)$ , и ряд ТВ — знакопостоянный. Однако если  $\gamma > \gamma_c$ , то

$a_c = 1.5|g_c|^{-1} > a = 1.5|g|^{-1}$ , поэтому знаки у высоких порядков ТВ должны чередоваться в соответствии с (13). Таким образом, при  $\gamma = \gamma_c$  меняется структура ряда ТВ.

Мы проверили это прямым вычислением коэффициентов ТВ  $E_k$  вплоть до  $k = 80$ , см. таблицу (при  $k \leq 10$  результаты наших расчетов согласуются с работой [40], а при  $\gamma = 0$  — с [28–33]). Часть полученных результатов представлена на рис. 3. Было показано, что между  $\gamma = 5$  и  $5.5$  действительно меняется чередование знаков<sup>3)</sup> у коэффициентов  $E_k$ . Кроме того, при  $\gamma < \gamma_c$  коэффициенты  $E_k(\gamma)$  — все одного порядка величины (поскольку  $g(\gamma, 0) \equiv 1$  и параметр асимптотики  $a = 3/2$  не зависит от  $\gamma$ ), а при  $\gamma > \gamma_c$  начинается их дополнительный (и очень быстрый!) рост в соответствии с уменьшением  $|g_c(\gamma)|$ , что наглядно видно на рис. 3 (см. также формулу (П.4)).

### Высшие порядки ТВ (атом водорода в параллельных полях)

$k$	$-E_k(\gamma)$				
	$\gamma = 0$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 5.5$	$\gamma = 10$
0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.5000
2	2.250	1.2500	-4.000	-5.3125	-22.750
4	55.547	40.089	1.039(2)	1.578(2)	2.319(3)
6	4.908(3)	3.351(3)	-6.448(3)	-1.437(4)	-9.358(5)
8	7.942(5)	5.201(5)	1.195(6)	2.930(6)	6.971(8)
10	1.945(8)	1.232(8)	-2.232(8)	-8.027(8)	-7.817(11)
20	1.121(22)	6.574(21)	1.033(22)	1.015(23)	8.114(28)
30	7.898(37)	4.529(37)	3.485(37)	-1.405(39)	-9.211(47)
40	1.478(55)	8.389(54)	5.674(54)	5.015(56)	2.642(68)
50	3.279(73)	1.850(73)	-3.502(72)	-2.054(75)	-8.726(89)
60	5.282(92)	2.968(92)	9.221(91)	6.026 (97)	2.054(112)
66	3.973(104)	2.228(104)	-6.181(101)	-6.445(106)	-1.217(126)
68	4.084(108)	2.289(108)	5.568(107)	7.450(110)	5.355(130)
70	4.449(112)	2.493(112)	5.862(110)	-9.115(114)	-2.497(135)
72	5.130(116)	2.873(116)	6.295(115)	1.181(119)	1.232(140)
74	6.250(120)	3.499(120)	1.558(119)	-1.614(123)	-6.420(144)
76	8.033(124)	4.496(124)	8.981(123)	2.329(127)	3.528(149)
78	1.088(129)	6.085(128)	3.728(127)	-3.537(131)	-2.042(154)
80	1.550(133)	8.667(132)	1.598(132)	5.654(135)	1.243(159)

*Примечание.* В таблице приведены коэффициенты ряда ТВ (4) для основного состояния атома водорода, взятые с обратным знаком;  $k$  — порядок ТВ,  $a(b) \equiv a \cdot 10^b$ .

В рассмотренном случае ( $\theta = 0$ ) критическое значение параметра  $\gamma = h/\epsilon$  удастся найти аналитически. Интересно изучить структуру рядов ТВ и в более общем случае, в

<sup>3)</sup> Как показывают численные расчеты,  $\text{sign } E_{2k} = (-1)^{k+1}$  при  $\gamma \geq 5.5$  и  $2k \leq 80$ . С другой стороны, при  $\gamma \leq 5$  коэффициенты  $E_{2k} < 0$  для достаточно больших  $k \geq k_0$ , причем значение  $k_0$  зависит от  $\gamma$  и быстро возрастает по мере приближения его к  $\gamma_c$ . Так,  $2k_0 = 0, 0, 4$  и  $68$  соответственно для  $\gamma = 0, 2, 4$  и  $5$  (см. таблицу).

частности для взаимно перпендикулярных полей. Значение  $\gamma_c$ , определяющее момент перестройки ряда ТВ, можно найти из условия  $g = |g_c|$ , где<sup>4)</sup>

$$g\left(\gamma, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\gamma(1 + 2\gamma^{-2} + \gamma^{-4} + \dots), \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad (16)$$

$$G\left(\gamma, \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \gamma^{-2} - \frac{2\pi^2}{3}\gamma^{-4} - \frac{2i}{\gamma}\left[1 - \frac{\pi^2}{6}\gamma^{-2} + \frac{\pi^2}{6}\left(1 + \frac{3\pi^2}{20}\right)\gamma^{-4}\right] + \dots, \quad (17)$$

откуда

$$|g_c\left(\gamma, \frac{\pi}{2}\right)| = \frac{3\pi}{2\gamma}\left[1 + 2\gamma^{-2} - \left(\frac{8\pi^2}{3} - 1\right)\gamma^{-4} + O(\gamma^{-6})\right] \quad (17a)$$

и  $\gamma_c \approx 3.54$ . Эта простая оценка хорошо согласуется с численными расчетами (см. на рис. 1 точку пересечения сплошной и штриховой ( $N = 1$ ) кривых при  $\theta = 90^\circ$ ).

Аналогично можно рассчитать  $\gamma_c$  для произвольного угла  $\theta$ . Было бы интересно подтвердить смену режима асимптотики при  $\gamma = \gamma_c(\theta)$  прямым вычислением высших порядков ТВ, как это сделано выше в случае параллельных полей.

3. Итак, при  $\gamma = \gamma_c$  меняется характер асимптотики высших порядков ТВ<sup>5)</sup>. При переходе от одного асимптотического режима к другому ряд ТВ из знакопеременного становится (при  $k \geq k_0$ ) знакопостоянным, что сказывается на положении ближайшей к нулю особенности трансформанты Бореля и, соответственно, на выборе эффективного метода суммирования (ср. с [17, 33, 37]).

Найденные выше комплексные решения уравнения (3) соответствуют комплексным подбарьерным траекториям, которые, таким образом, могут быть существенными для определения асимптотики высших порядков ТВ. Их физический смысл можно пояснить на примере параллельных полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Как известно, асимптотика высших порядков ТВ непосредственно связана с вероятностью туннелирования частицы в потенциале с «неправильным» знаком константы связи, например,  $g \rightarrow -g$  в случае ангармонического осциллятора

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + g\frac{x^4}{4}$$

(феномен Дайсона [39, 20]). В нашей задаче роль  $g$  играет  $\mathcal{H}^2$ . Переходя к чисто мнимым значениям магнитного поля ( $\mathcal{H} = i\tilde{\mathcal{H}}$ ), мы получаем потенциал  $\propto -(1/8)\tilde{\mathcal{H}}^2\rho^2$ , который неограниченно убывает при  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ . Очевидно, что в таком потенциале туннелирование возможно не только вдоль электрического поля (ось  $z$ ), но и в перпендикулярном направлении. Комплексные решения (10)–(12) отвечают, по-видимому, аналитическому продолжению таких «поперечных» подбарьерных траекторий из области чисто мнимых значений магнитного поля в область вещественных  $\mathcal{H}$ .

<sup>4)</sup>Первое разложение следует из уравнений (2) и (3), второе — из (12) при  $N = 1$ . Параметром этих разложений является  $\gamma^{-2}$ , причем  $\gamma_c^{-2} \sim 0.08 \ll 1$ .

<sup>5)</sup>Аналогичное явление имеет место для  $1/n$ -разложения в задаче двух кулоновских центров [14–16]. Роль параметра  $\gamma$  в этом случае играет межъядерное расстояние  $R$ .

Авторы благодарны В. М. Вайнбергу и В. Д. Муру за обсуждение работы и полезные замечания. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 95-02-05417 и № 98-02-17007).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты ТВ (4) для энергии основного состояния атома водорода являются полиномами от  $\gamma^2$ :

$$E(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = \sum_{i,j} c_{ij} \epsilon^{2i} h^{2j} = \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k}(\gamma) \epsilon^{2k}, \tag{П.1}$$

$$E_{2k}(\gamma) = \sum_{j=0}^k c_{k-j,j} \gamma^{2j}, \tag{П.2}$$

где  $2k$  — порядок ТВ,  $\gamma = h/\epsilon = \alpha \mathcal{H}/\mathcal{E}$ ,  $\alpha = e^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры. Несколько первых порядков ТВ известны точно, т.е. в виде рациональных дробей:

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{1}{2}, \quad E_2 = -\frac{1}{4}(9 - \gamma^2), \quad E_4 = -\frac{1}{64} \left( 3555 - 318\gamma^2 + \frac{53}{3}\gamma^4 \right), \\ E_6 &= -\frac{1}{512} \left( 2\,512\,779 - 254\,955\gamma^2 + \frac{49195}{3}\gamma^4 - \frac{5581}{9}\gamma^6 \right), \\ E_8 &= -2^{-12} \cdot \left( \frac{13\,012\,777\,803}{4} - \dots - \frac{12\,368\,405}{9}\gamma^6 + \frac{21\,577\,397}{540}\gamma^8 \right), \end{aligned} \tag{П.3}$$

и были использованы для контроля численного счета. Крайние в (П.2) коэффициенты  $c_{k0}$  и  $c_{0k}$  соответствуют эффектам Штарка [27–31] и Зеемана [34], а перекрестные ( $1 \leq j \leq k - 1$ ) члены взяты из работ [40, 41]. При этом  $c_{k-j,j} = 2^{-3j} \epsilon^{(k-j,j)}$ , где  $\epsilon^{(ij)}$  — коэффициенты, табулированные (в случае параллельных полей) в [40].

Асимптотику высших порядков ТВ можно записать в виде

$$E_k(\gamma) \approx -k! \left\{ \frac{6}{\pi} c_0 a^k + (-1)^{k/2} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{5/2} c_1 a_c^k k^{1/2} \right\}, \tag{П.4}$$

где

$$a = \frac{3}{2}, \quad a_c = \frac{\gamma}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi^2}{3\gamma^2} \right)^{-1}, \tag{П.5}$$

$c_0 = \gamma/\text{sh } \gamma$ , а для  $c_1$  мы получили (численно)  $c_1 \approx 1 - 12.03\gamma^{-2}$  при  $\gamma \gg 1$ . Условие  $a = a_c$  дает кубическое уравнение, решение которого (по формуле Кардано) приводит к (15).



## Литература

1. Н. А. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One-and-Two- Electron Systems*, Hand. Physik, Vol. 35/1, Springer, Berlin (1957), p. 88.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва (1974).
3. Б. М. Смирнов, *Физика атома и иона*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
4. В. С. Лисица, УФН **153**, 379 (1987).
5. V. D. Mur and V. S. Popov, *Laser Phys.* **3**, 462 (1993).
6. В. С. Попов, А. В. Сергеев, Письма в ЖЭТФ **63**, 398 (1996).
7. V. S. Popov, V. M. Karnakov, and V. D. Mur, *Phys. Lett. A* **229**, 306 (1997).
8. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **65**, 391 (1997).
9. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
10. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
11. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **13**, 261 (1971); ЖЭТФ **61**, 1334 (1971).
12. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
13. М. С. Маринов, В. С. Попов, ЯФ **15**, 1271 (1972); *Fortschr. Physik* **25**, 373 (1977).
14. В. С. Попов, А. В. Сергеев, А. В. Щеблыкин, ЖЭТФ **102**, 1453 (1992).
15. V. S. Popov and A. V. Sergeev, *Phys. Lett. A* **172**, 193 (1993); В. С. Попов, А. В. Сергеев, ЖЭТФ **105**, 568 (1994).
16. V. S. Popov, in *New Methods in Quantum Theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1996), p. 149.
17. M. Lopez-Cabrera, D. Z. Goodson, D. R. Herschbach, and J. D. Morgan, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1992 (1992).
18. S. Kais and D. R. Herschbach, *J. Chem. Phys.* **98**, 3990 (1993).
19. Л. П. Котова, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **54**, 1151 (1968).
20. C. M. Bender and T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 461 (1971); *Phys. Rev. D* **7**, 1620 (1973).
21. A. D. Dolgov and V. S. Popov, *Phys. Lett. B* **79**, 403 (1978); А. Д. Долгов, В. С. Попов, ЖЭТФ **75**, 2010 (1978).
22. H. J. Silverstone, J. G. Harris, J. Cizek, and J. Paldus, *Phys. Rev. A* **32**, 1965 (1985).
23. В. М. Вайнберг, В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ЖЭТФ **81**, 1567 (1981).
24. А. В. Сергеев, А. И. Шерстюк, ЖЭТФ **82**, 1070 (1982).
25. V. Privman, *Phys. Lett. A* **81**, 326 (1981).
26. E. R. Vrscaj, *Phys. Rev. A* **33**, 1433 (1986).
27. H. J. Silverstone, *Phys. Rev. A* **18**, 1853 (1978).
28. H. J. Silverstone, B. G. Adams, J. Cizek et al., *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1498 (1979).
29. В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ДАН СССР **250**, 74 (1980).
30. S. P. Alliluev, V. L. Eletsy, and V. S. Popov, *Phys. Lett. A* **73**, 103 (1979); *A* **78**, 43 (1980).
31. V. Privman, *Phys. Rev. A* **22**, 1833 (1980).
32. L. Benassi, V. Grecchi, E. Harrell, and B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 704, 1430 (1979).
33. С. П. Аллилуев, В. М. Вайнберг, В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ЖЭТФ **82**, 77 (1982).
34. A. Galindo and P. Pascual, *Nuovo Cim. B* **34**, 155 (1976).
35. B. G. Adams, J. E. Avron, J. Cizek et al., *Phys. Rev. Lett.* **43**, 691 (1979); *Phys. Rev. A* **21**, 1914 (1980).
36. В. М. Вайнберг, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, ЖЭТФ **113**, 550 (1998).
37. V. Franceschini, V. Grecchi, and H. J. Silverstone, *Phys. Rev. A* **32**, 1338 (1985).
38. V. S. Popov, V. D. Mur, A. V. Sergeev et al., *Phys. Lett. A* **149**, 418 (1990).
39. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).
40. B. R. Johnson, K. F. Scheibner, and D. Farrelly, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2280 (1983).
41. P. Lambin, J. C. van Hay, and E. Kartheuser, *Amer. J. Phys.* **46**, 1144 (1978).