ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 6, стр. 2011–2021

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗДЕЛЕННЫХ ПУЧКОВ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ

*А. С. Десятников, А. И. Маймистов**

Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 августа 1997 г.

Исследована эволюция двух пространственно разделенных пучков света в нелинейной керровской среде, описываемая системой связанных нелинейных уравнений Шредингера. Найдено аналитическое решение уравнений вариационной задачи. Показано, что при взаимодействии скрещивающихся пучков может возникать связанное состояние, в котором расстояние между центрами пучков и их радиусы изменяются периодически. При этом взаимное искривление траекторий центров пучков приводит к закручиванию пучков в спиралеподобную структуру, параметры которой (шаг и диаметр) также являются периодическими функциями. Определена пороговая мощность взаимного захвата и найден период осцилляций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эволюция светового пучка в нелинейной диспергирующей среде является одной из типичных задач нелинейной оптики и исследуется уже два-три десятка лет. Но интерес к этой проблеме не пропадает до сих пор. Примером этого могут служить исследования формирования мелкомасштабных поперечных структур электромагнитного поля (дифракционных автосолитонов), дислокаций волнового фронта и взаимодействия этих дислокаций [1–4]. При возбуждении таким излучением широкополосного нелинейного интерферометра происходит рассеяние автосолитона на дислокации и его захват с установлением вращения вокруг дислокации. В полубесконечной нелинейной среде тот же эффект приводит к вращению структур электромагнитного поля в пространстве по мере распространения излучения в глубь нелинейной среды [3].

Если на начальной стадии этих исследований внимание концентрировалось на изучении одного пучка, то в последнее время изучается система двух пучков [5–9]. Существует ряд работ [10–14], где рассматривались связанные состояния, в которых импульсы с различными состояниями поляризации распространяются в виде двухкомпонентных (векторных) солитонов. Пространственно-временная аналогия позволяет перенести результаты, полученные для импульсов, на описание неколлинеарного взаимодействия волновых пучков [15]. Естественно ожидать, что помимо хорошо известных эффектов самофокусировки и искривления пучков, взаимодействие двух пространственно разделенных световых пучков при объединении эффектов само- и кроссмодуляции может привести к взаимному искривлению траекторий лучей и взаимному захвату. Недавно подобный эффект, названный «увлечением световых пучков» был теоретически

*E-mail: maimistov@pico.mephi.ru

и экспериментально исследован при генерации второй гармоники в квадратичной среде [7, 8].

Следует отметить, что ранее было исследовано взаимодействие неколлинеарных световых пучков в керровской (фокусирующей и дефокусирующей) среде в двумерной геометрии [16, 17]. Там предполагалось, что пучки распространяются либо попутно, либо навстречу друг другу. Также рассмотрен случай отражения пучка от зеркала и найдено нарушение законов Снеллиуса.

Многочисленные исследования пространственных солитонов в фоторефрактивных средах [18–24] являются другим примером активного изучения процесса взаимодействия между пучками электромагнитного излучения.

В настоящей работе рассмотрено взаимодействие (из-за кроссмодуляции показателя преломления) двух пространственно разделенных световых пучков в нелинейной керровской среде. Для упрощения задачи предполагается, что хотя радиусы пучков изменяются, они все время остаются одинаковыми. Так же, как для ортогонально поляризованных соосных пучков [9], найдены монотонный и осцилляционный режимы распространения. В случае скрещивающихся (некомпланарных) пучков осцилляционный режим (взаимозахват) характеризуется пространственным вращением пучков, при этом угловая скорость вращения, определяющая шаг и диаметр спирали, является периодической функцией переменной распространения. Известно, что в керровских средах пучки неустойчивы: они либо испытывают коллапс, либо расплываются. Рассмотренный здесь анализ распространения пучков предполагает, что мощность их незначительно отличается в меньшую сторону от пороговой мощности, требуемой для самофокусировки отдельного пучка. Оценки, приведенные в Заключении, показывают, что можно выбрать параметры пучков, когда дифракционное расплывание пучков является более медленным процессом по сравнению с формированием спирали.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В изотропной керровской среде с мгновенным откликом показатель преломления во многих случаях можно считать линейно зависящим от интенсивности. При некогерентной суперпозиции двух волн,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 u(x,y,z) \exp\{ik\cos(\varphi_1 z) + i\mathbf{k}_{\perp 1}\mathbf{r}_{\perp 1} - i\omega t\} + \text{c.c.},$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 v(x,y,z) \exp\{ik\cos(\varphi_2 z) + i\mathbf{k}_{\perp 2}\mathbf{r}_{\perp 2} - i\omega t\} + \text{c.c.},$$

диэлектрическую проницаемость для волны с номером i можно представить в виде [15]

$$\varepsilon_i = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)}|\mathbf{E}_i|^2 + \varepsilon_c^{(2)}|\mathbf{E}_j|^2, \quad i,j = 1,2, \quad i \neq j.$$

Здесь $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon^{(0)}}$, $\mathbf{e}_i$ — орты поляризаций волн, φ_i — углы падения пучков на границу $z = 0$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon_c^{(2)}$ — нелинейные коэффициенты, отвечающие само- и кроссмодуляции соответственно. Далее будем считать, что отклонения направлений распространения пучков от оси z малы. Столь малы, что множители $\exp(i\mathbf{k}_{\perp i}\mathbf{r})$ допустимо включить в медленноменяющиеся огибающие $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$. Будем считать, что размер области изменения электрического поля в поперечном направлении значительно меньше области изменения его в продольном направлении. Следуя стандартной процедуре построения эволюционного уравнения для медленноменяющейся огибающей, можно получить систему связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ):

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma\Delta_\perp u + \mu\left(|u|^2 + \varepsilon|v|^2\right)u = 0, \quad i\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma\Delta_\perp v + \mu\left(|v|^2 + \varepsilon|u|^2\right)v = 0, \tag{1}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2k\cos\varphi_1} \approx \frac{1}{2k\cos\varphi_2}, \quad \mu = \frac{k\varepsilon^{(2)}}{2\varepsilon^{(0)}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_c^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Можно показать[14, 25–27], что система (1) представляется в виде уравнений Эйлера, порождаемых вариационной задачей $\delta S = 0$, где функционал действия определен как

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle L\rangle dz \tag{2}$$

с лагранжевой функцией

$$\langle L\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} L\,dy, \quad L = L_u + L_v + L_{uv},$$

где

$$L_u = \frac{i}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial u^*}{\partial z}\right) - \sigma\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 - \sigma\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + \frac{\mu}{2}|u|^4, \quad L_v = L_u(u \to v), \quad L_{uv} = \mu\varepsilon|u|^2|v|^2.$$

Будем искать решение вариационной задачи в классе пробных функций вида

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= A_1(z)\exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(z)|^2}{2a^2(z)} + i\phi_1(x,y,z)\right), \\
v(x,y,z) &= A_2(z)\exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(z)|^2}{2a^2(z)} + i\phi_2(x,y,z)\right), \\
\phi_i(x,y,z) &= B(z)\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(z)|^2 + C_i(z)\,[x - x_i(z)] + D_i(z)\,[y - y_i(z)] + \alpha_i(z),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y$, $\mathbf{r}_i(z) = \mathbf{e}_x x_i(z) + \mathbf{e}_y y_i(z)$ — радиусы-векторы центров пучков. Выбор пробных функций в виде гауссовых распределений обоснован в [26], и, кроме того, для таких пробных функций проще вычисление $\langle L_{uv}\rangle$. Заметим дополнительно, что фазы $\phi_i(x,y,z)$ учитывают поперечные составляющие волновых векторов несущей волны в исходном представлении напряженностей электрических полей обоих пучков.

Подстановка (3) в (2) и вычисление вариационных производных приводит к уравнениям, определяющим экстремум действия (2) ($i, j = 1, 2$; $i \neq j$):

$$a^2(z)A_i^2(z) = a^2(0)A_i^2(0) = E_i, \tag{4a}$$

$$\frac{da(z)}{dz} = 4\alpha a(z)B(z), \tag{4б}$$

$$2\sum_{k=1}^{2}\left[-2a^2\left(\frac{dB}{dz}+4\sigma B^2\right)+C_k\left(\frac{dx_k}{dz}-\sigma C_k\right)+D_k\left(\frac{dy_k}{dz}-\sigma D_k\right)-\frac{d\alpha_k}{dz}+\frac{\mu}{4}A_k^2\right]\times$$
$$\times A_k^2+\mu\varepsilon A_1^2A_2^2\left(1+\frac{R^2}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right)=0, \qquad (4\text{в})$$

$$2\left[-a^2\left(\frac{dB}{dz}+4\sigma B^2\right)-\frac{\sigma}{a^2}+C_i\left(\frac{dx_i}{dz}-\sigma C_i\right)\right]+$$
$$+2\left[D_i\left(\frac{dy_i}{dz}-\sigma D_i\right)-\frac{d\alpha_i}{dz}+\frac{\mu}{2}A_i^2\right]+\mu\varepsilon A_j^2\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right)=0; \qquad (4\text{г})$$

$$\frac{dx_i}{dz}=2\sigma C_i,\quad \frac{dy_i}{dz}=2\sigma D_i, \qquad (5\text{а})$$

$$\frac{dC_i}{dz}=(-1)^iA_j^2(x_1-x_2)\frac{\mu\varepsilon}{2a^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right),$$
$$\frac{dD_i}{dz}=(-1)^iA_j^2(y_1-y_2)\frac{\mu\varepsilon}{2a^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right), \qquad (5\text{б})$$

здесь $R(z)\equiv|\mathbf{R}(z)|=|\mathbf{r}_1(z)-\mathbf{r}_2(z)|$.

Уравнения (4) после некоторых преобразований приводятся к уравнению для радиуса пучков $a(z)$:

$$\frac{d^2a}{dz^2}=\frac{\sigma}{a^3}\left[4\sigma-\mu W(1-\delta)-\mu\varepsilon W\delta\left(1-\frac{R^2}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right)\right], \qquad (6)$$

где $W=E_1+E_2$ — суммарная мощность пучков, $\delta=2E_1E_2(E_1+E_2)^{-2}$ — безразмерная величина, характеризующая отношение мощностей пучков $0<\delta\leq 0.5$.

Известно [15], что самовоздействие пучков в фокусирующей керровской среде определяется противодействием двух факторов: эффекта дифракции (первое слагаемое в правой части уравнения (6)) и эффекта нелинейного сжатия (второе слагаемое). Слагаемое в уравнении (6), отвечающее взаимодействию между пучками (пропорциональное ε), можно рассматривать как меру (силу) влияния одного пучка на другой. При изменении переменных в области $R<\sqrt{2}a$ эта сила увеличивает нелинейное сжатие, если же $R>\sqrt{2}a$ — ослабляет. В частности, как будет показано ниже, возможны осцилляции радиусов (аналогичные найденным в [9]), что является качественным отличием от случая самовоздействия.

Используя выражение $\mathbf{R}(z)=[x_1(z)-x_2(z)]\,\mathbf{e}_x+[y_1(z)-y_2(z)]\,\mathbf{e}_y$, уравнения (5) можно привести к виду

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dz^2}=-\mathbf{R}\frac{\sigma\mu\varepsilon W}{a^4}\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right). \qquad (7)$$

Уравнение (7) позволяет найти интеграл движения:

$$\left[\mathbf{R}\frac{d\mathbf{R}}{dz}\right]=M\mathbf{e}_z,\quad M=\text{const}. \qquad (8)$$

Из (7) с учетом (8) получается

$$\frac{d^2R}{dz^2} = \frac{M^2}{R^3} - R\frac{\sigma\mu\varepsilon W}{a^4}\exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right). \tag{9}$$

Таким образом, система уравнений первого порядка для параметров пробных функций сводится к системе двух уравнений второго порядка (6) и (9) для радиуса $a(z)$ и расстояния между центрами пучков $R(z)$.

Введем в плоскости x, y полярные координаты:

$$R_x(z) \equiv x_1(z) - x_2(z) = R(z)\cos\psi(z), \quad R_y(z) \equiv y_1(z) - y_2(z) = R(z)\sin\psi(z),$$

тогда из соотношения (8) следует уравнение для $\psi(z)$:

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{M}{R^2(z)}. \tag{10}$$

Полярный угол $\psi(z)$ имеет смысл угла поворота вектора $\mathbf{R}(z)$, соединяющего центры пучков. Когда пучки не взаимодействуют и параллельны ($M = 0$), $\mathbf{R}(z)$ — постоянный вектор. Когда пучки не взаимодействуют и некомпланарны, то этот вектор меняется по направлению и величине, но полный угол поворота вектора $\mathbf{R}(z)$ в плоскости xy не превышает π. Искривление пучков, порождаемое их взаимодействием, меняет максимальное значение полного угла поворота, например, если этот угол превысит 2π, то можно говорить о спиралеобразном характере искривления пучков.

Прежде чем приступить к решению системы (6) и (9), можно без ограничения общности упростить задачу следующим выбором граничных условий.

1. Пусть начало координат в плоскости $z = 0$ на отрезке, соединяющем центры пучков, выбрано из условия $E_1\mathbf{r}_1(0) + E_2\mathbf{r}_2(0) = 0$, а направление оси x выбрано вдоль $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{R}(0)$, тогда $\psi(0) = 0$.

2. Параллельные плоскости, в которых лежат оси падающих на границу $z = 0$ пучков, выберем перпендикулярными границе $z = 0$, тогда эти плоскости станут плоскостями падения пучков.

3. Углы падения пучков φ_1 и φ_2 выберем так, чтобы $E_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = E_2 \operatorname{tg}\varphi_2$.

Физический смысл векторов $\dot{\mathbf{r}}_1(0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(0)$ (начальных значений производных по z от $\mathbf{r}_{1,2}$) ясен из соотношений $|\dot{\mathbf{r}}_1(0)| = \operatorname{tg}\varphi_1$, $|\dot{\mathbf{r}}_2(0)| = \operatorname{tg}\varphi_2$. Выберем направления падения пучков так, чтобы при выполнении второго и третьего условий выполнялось равенство $E_1\dot{\mathbf{r}}_1(0) + E_2\dot{\mathbf{r}}_2(0) = 0$. Тогда явное выражение для константы M можно записать в виде

$$M = R_0R_0' \operatorname{tg}\beta = R_0(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)\sin\beta, \tag{11}$$

здесь $R_0' \equiv dR/dz\big|_{z=0} = (\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)\cos\beta$, β — угол между начальными направлениями векторов $\mathbf{R}$ и производной от $\mathbf{R}$ по z. Для увеличения области взаимодействия пучков следует положить в дальнейшем $R_0' \le 0$, т. е. $\beta \ge \pi/2$.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Система уравнений (6) и (9) имеет два закона сохранения:

$$Wa^2(z) + mR^2(z) = P_2z^2 + P_1z + P_0, \tag{12}$$

$$P_2 = W\left(\frac{da}{dz}\right)^2 + m\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 + \frac{\sigma W\,[4\sigma - \mu W(1-\delta)]}{a^2} + \frac{mM^2}{R^2} - \frac{\sigma\mu\varepsilon W^2\delta}{a^2}\exp\left(-\frac{R}{2a^2}\right), \quad (13)$$

здесь $m = \delta W/2 = E_1E_2(E_1+E_2)^{-1}$, $P_1 = 2Wa_0a_0' + 2mR_0R_0'$, $a_0 = a(0)$, $P_0 = Wa_0^2 + mR_0^2$.

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} Wa^2(z) &= \rho^2(z)t(z), \\ mR^2(z) &= \rho^2(z)\,(1 - t(z)). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (12) и (13) в новых переменных примут вид

$$\rho^2(z) = P_2z^2 + P_1z + P_0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P_2 = \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + \frac{\rho^2}{4t(1-t)}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 + \frac{\sigma W^2\,[4\sigma - \mu W(1-\delta)]}{\rho^2 t} + \\ + \frac{m^2M^2}{\rho^2(1-t)} - \frac{\sigma\mu\varepsilon W^3\delta}{\rho^2 t}\exp\left(\frac{t-1}{\delta t}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Разделяя переменные в уравнении (16), можно получить общее аналитическое решение системы уравнений (6) и (9):

$$2\int_0^z \frac{dz}{p_2z^2 + p_1z + p_0} = \int \frac{dt}{\sqrt{G(t)}}, \quad (17)$$

$$G(t) = st(t_0 - t) + (1-t)\left[\Delta(t_0 - t) + \lambda t + \exp\left(\frac{t-1}{\delta t}\right) - \frac{t}{t_0}\exp\left(\frac{t_0 - 1}{\delta t_0}\right)\right], \quad (18)$$

где согласно (11) и (13)

$$\begin{aligned} &s = \frac{a_0^2(R_0')^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta}{2\sigma\mu\varepsilon W t_0}, \quad t_0 \equiv t(0) = \frac{Wa_0^2}{Wa_0^2 + mR_0^2}, \quad \Delta = \frac{\mu W(1-\delta) - 4\sigma}{\mu\varepsilon W\delta t_0}, \\ &\lambda = \frac{\left(a_0R_0' - r_0a_0'\right)^2}{2\sigma\mu\varepsilon W}, \quad p_j = \frac{P_j}{\sqrt{\sigma\mu\varepsilon W^3\delta}}, \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Описание динамики системы станет полным после интегрирования уравнения (10):

$$\psi(z) = \frac{M}{4}\sqrt{\frac{\delta}{\sigma\mu\varepsilon W}}\int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{G(t)}}, \quad (20)$$

здесь мы использовали (14) и (17).

Уравнения (17) и (20) являются точным решением вариационной задачи. Однако для дальнейшего аналитического исследования (17) и (20) представляются малопригодными, так как интегралы справа с подкоренным выражением (18) не выражаются через какие-либо известные функции.

В следующем разделе путем качественного анализа уравнений (17) и (20) в общих чертах описан монотонный режим распространения пространственно разделенных световых пучков и уделено основное внимание осцилляционному режиму. Найдены приближенные решения уравнений (17) и (20), описывающие связанное состояние (осцилляционный режим), и аналитически определена область параметров, в которой данное состояние реализуется.

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Как показывает изучение интегралов в (17) и (20), динамика пучков качественно определяется поведением функции $\rho^2(z)$ и значениями нулей функции $G(t)$ (18).

Если суммарная мощность пучков W меньше критической величины $W_{cr} = 4\sigma[\mu(1-\delta)]^{-1}$, то параметр $\Delta < 0$, нули t_1 и t_2 функции $G(t)$ лежат в следующих пределах: $0 < t_2 < t_0 < t_1 < 1$, и так как в этом случае $P_2 > 0$, то реализуется монотонный режим дифракционного уширения пучков. При этом взаимодействие приводит к незначительному взаимному отклонению пучков.

В случае, когда суммарная мощность превышает критическую, $\Delta > 0$ и один из нулей функции $G(t)$ становится отрицательным. Если $t_0 \in (0, t_1)$, где t_1 — нуль функции $G(t)$, то при достижении значения $t = 0$ в соответствии с (14) происходит коллапс световых пучков на конечном расстоянии z_{coll}, определяемом из условия $t(z_{coll}) = 0$.

Эти результаты соответствуют хорошо известным закономерностям самофокусировки световых пучков, поэтому в дальнейшем сосредоточим внимание на изучении осцилляционного режима распространения и на определении параметров пространственного вращения пучков. Из выше приведенных рассуждений следует, что периодическое изменение $t(z)$ принципиально возможно лишь в случае, когда $G(t)$ имеет на промежутке $(0, 1)$ три нуля и начальное значение t_0 попадает в промежуток, не содержащий точку $t = 0$. Если суммарная мощность значительно превышает критическую, так что $P_2 < 0$, то функция $\rho^2(z)$ обращается в нуль на конечном расстоянии, что соответствует коллапсу и «слипанию» пучков. Поэтому еще одним условием существования периодического решения является $\rho^2 = \text{const}$.

Условие $\rho^2 = \text{const}$ эквивалентно трем следующим: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $\rho^2 = P_0$. Поскольку

$$P_1 = 0 \to a_0' = -\frac{\delta}{2}\frac{R_0}{a_0}R_0', \tag{21}$$

и так как предполагается, что $R_0' \le 0$, то необходимо положить $a_0' \ge 0$, т. е. на границе среды пучки должны иметь положительную кривизну волнового фронта. Это означает внешнюю дефокусировку пучков.

Используя (21), соотношение для s (19) переписываем как

$$s = \lambda t_0 \operatorname{tg}^2\beta = \frac{a_0^2 (R_0')^2 \operatorname{tg}^2\beta}{2\sigma\mu\varepsilon W t_0}, \tag{22}$$

тогда условие $P_2 = 0$ можно представить в явном виде:

$$W = W_{thr} \equiv W_{cr}\left[1 + \frac{\delta a_0^2(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)^2}{8\sigma^2}\left(1 + \frac{1-t_0}{t_0}\cos^2\beta\right)\right]. \tag{23}$$

Выражение (23) определяет пороговую величину мощности W_{thr}, при которой происходит взаимный захват пучков, так как при $W < W_{thr} \to P_2 > 0$, $W > W_{thr} \to P_2 < 0$, что соответствует обсужденным выше случаям.

Теперь следует найти соотношения между параметрами, при выполнении которых функция $G(t)$ имеет три нуля $t_{1,2,3}$: $0 < t_3 < t_2 < t_1 < 1$ и $t_0 \in (t_2, t_1)$. С учетом (21), (22) и (23) выражение (18) для $G(t)$ преобразуется к виду

$$G(t) = s(t_0 - t) + (1-t)\left[\lambda t_0 + \exp\left(\frac{t-1}{\delta t}\right) - \frac{t}{t_0}\exp\left(\frac{t_0 - 1}{\delta t_0}\right)\right]. \tag{24}$$

Анализ этого выражения показывает, что желаемая ситуация реализуется только при $\delta > 0.4$ (что соответствует E_1/E_2 (либо E_2/E_1) < 2), т. е. мощности пучков должны быть близкими по значению. При выполнении этого условия выражение (24) хорошо может быть аппроксимировано степенной функцией:

$$G_a(t) = \lambda t_0(1-t) + (t_0 - t)\left[s - t^2(1-t)\right], \tag{25}$$

для которой, в отличие от точного выражения (24), удается аналитически определить искомую область параметров s, t_0, β.

Пусть выполняются неравенства

$$s < \frac{2}{27}, \quad t_0 > t^*, \quad \mathrm{tg}^2\,\beta > \frac{1}{t_0 - t'}\left(\frac{t'}{s} - \frac{1}{1-t'}\right)^{-1}, \tag{26}$$

где t^* — корень трехчлена $s - t^2(1-t)$, ближайший к нулю справа, и t' — точка локального минимума функции $(t_0 - t)\left[s - t^2(1-t)\right]$. Тогда многочлен четвертой степени $G_a(t)$ (25) имеет четыре действительных корня $t_{1,2,3,4}$: $t_4 < 0 < t_3 < t_2 < t_0 < t_1 < 1$.

Заметим, что ограничение на t_0 снизу приводит к ограничению сверху для отношения R_0/a_0:

$$\frac{R_0}{a_0} = \sqrt{\frac{2(1-t_0)}{\delta t_0}} < \sqrt{\frac{2(1-t^*)}{\delta t^*}}.$$

Условием применимости метода пробных функций в подобных задачах является достаточная удаленность пучков друг от друга. Чтобы пучки считать различимыми, следует положить $R_0 > 2a_0$, что дает ограничение величины t_0 сверху: $t_0 < (1+2\delta)^{-1}$. В конце данного раздела будут приведены численные оценки, показывающие возможность удовлетворить двум этим требованиям. Добавим, что последнее неравенство в (26) возможно удовлетворить всегда, выбирая угол β достаточно близким к $\pi/2$. Соотношения (21), (22), (23) и (26) определяют область параметров, в которой реализуется осцилляционный режим.

Заменяя точное выражение в (17) и (20) приближенным $G_a(t)$, получаем приближенное решение задачи:

$$\begin{aligned} &R(z) = R_0\sqrt{\frac{1-t(z)}{1-t_0}}, \quad a(z) = a_0\sqrt{\frac{t(z)}{t_0}}, \\ &\psi(z) = \frac{\sqrt{s(1-t_0)}}{1-t_3}\left\{F(\varphi(z),k) - F(\varphi_0,k) + \frac{t_2-t_3}{1-t_2}\left[\Pi(\varphi(z),\nu,k) - \Pi(\varphi_0,\nu,k)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$t(z) = \frac{t_2(t_1-t_3) - t_3(t_1-t_2)\,\mathrm{sn}^2\,w(z)}{(t_1-t_3) - (t_1-t_2)\,\mathrm{sn}^2\,w(z)}, \quad w(z) = F(\varphi_0,k) + \frac{\sqrt{(t_1-t_3)(t_2-t_4)}}{p_0}\,z,$$

$\varphi(z) = \mathrm{am}(w(z))$ — амплитуда, а $\mathrm{sn}(w(z))$ — эллиптический синус Якоби; $F(\varphi,k)$, $\Pi(\varphi,\nu,k)$ — неполные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего родов соответственно;

$$k^2 = \frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\,\frac{t_3-t_4}{t_2-t_4}, \quad \nu = \frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\,\frac{1-t_3}{1-t_2}, \quad \varphi(t_2) = 0,$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \equiv \arcsin\sqrt{\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}\,\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_3}}, \quad \varphi(t_1) = \frac{\pi}{2}.$$

Приближенное решение (27) качественно определяет динамику системы: расстояние между центрами пучков (диаметр спирали) изменяется периодически в пределах от $R_{min} = R_0\sqrt{(1-t_1)/(1-t_0)}$ (при этом $a_{max} = a_0\sqrt{t_1/t_0}$) до $R_{max} = R_0\times \times\sqrt{(1-t_2)/(1-t_0)}$ ($a_{min} = a_0\sqrt{t_2/t_0}$), а угол поворота неравномерно увеличивается за период z_p на величину ψ_p, т. е. шаг спирали также является периодической функцией. Для численных оценок параметров периодической структуры z_p, ψ_p можно использовать точные выражения:

$$z_p = p_0 \int\limits_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{dt}{\sqrt{G(t)}}, \quad \psi_p = \sqrt{s(1-t_0)} \int\limits_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{G(t)}}\,. \tag{28}$$

Здесь t_{max}, t_{min} — нули функции $G(t)$ (24), соответствующие корням t_1, t_2 многочлена $G_a(t)$ (25).

Используя описанную выше процедуру (21)–(23), (26) и (28), можно оптимизировать задаваемые параметры. Выбирая $s \simeq 0.03$, $t_0 \simeq 0.3$, $\beta \simeq 100°$, получим $\psi_p \simeq \pi$, т. е. полный оборот ($\psi = 2\pi$) происходит на расстоянии $z_{2\pi} \simeq 2z_p$. Интегрирование ведется в пределах от $t_{min} \simeq 0.288$ ($t_2 \simeq 0.271$) до $t_{max} \simeq 0.978$ ($t_1 \simeq 0.968$); переменные изменяются в пределах $1.01 \geq R/R_0 \geq 0.18$, $0.98 \leq a/a_0 \leq 1.81$ при начальном соотношении $R_0 \simeq 3.3a_0$. Величина z_p при заданных s, t_0, β определяется величиной a_0 и составляет ~ 10 см для $a_0 \sim 10$ мкм. Начальная расходимость пучков (внешняя дефокусировка) a_0' порядка 10^{-3}, что соответствует дифракционной расходимости гауссовых пучков. Для оценок мы положили коэффициенты ε, $\varepsilon^{(0)}$ равными единице и частоту несущей волны излучения $\nu \approx 10^{15}$ с$^{-1}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе использован вариационный метод, в рамках которого изучено взаимное влияние двух пространственно разделенных пучков света, вызванное кроссмодуляцией показателя преломления кубично-нелинейной среды. Взаимодействие носит характер притяжения и приводит к искривлению траекторий лучей. При определенных здесь условиях происходит захват скрещивающихся пучков в связанное состояние, что приводит к их пространственному вращению. Так как скорость вращения является осциллирующей функцией, пространственные параметры спиральной структуры (шаг, диаметр) изменяются периодически.

В рассмотренной модели осцилляционный режим, не ограниченный коллапсом, реализуется при равных или близких по величине мощностях пучков. Это свойство, видимо, является следствием предположения об одинаковом поведения радиусов пучков, т. е. присуще только выбранной модели. Если, используя вариационный метод, положить в пробных функциях радиусы пучков различными, то вместо системы двух уравнений (6) и (9) возникает система трех уравнений второго порядка для радиусов и расстояния между центрами пучков. Аналитическое решение такой системы найти не удается.

Мы не останавливались здесь на изменении фаз каждого из пучков, хотя в использованных пробных функциях (3) эти величины учитываются. Вариационная задача дает уравнения, определяющие эволюцию фаз ϕ_1 и ϕ_2 вдоль оси z и в плоскости xy, которые не связаны с рассмотренными здесь уравнениями (4). Имея, однако, решения системы (4), можно было бы вычислить ϕ_1 и ϕ_2 путем непосредственного интегрирования. Эта задача может оказаться весьма привлекательной, если интересоваться топологическими свойствами волнового фронта, например, при исследовании дислокаций волнового фронта [4, 5, 28–30]. Роль разности фаз соседних пучков весьма существенна при их распространении в квадратичных средах [7, 8], когда уравнения (4) приобретают дополнительные слагаемые, учитывающие параметрическое взаимодействие пучков.

Интерес к пространственным оптическим структурам основан на принципиальной возможности использования их в целях обработки информации [31, 32]. Рассмотренный в работе эффект вращения оптических пучков, видимо, может быть использован для реализации простых схем оптических переключателей, так как для его функционирования не требуется создания специальных условий (например, обратной связи). Дальнейшее исследование упомянутой модели с нетождественными радиусами пучков представляется полезным с точки зрения изучения взаимного влияния пучков на процесс коллапса или с более общей точки зрения — управления светом с помощью света [33].

Литература

1. Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, ЖЭТФ **70**, 2060 (1976).
2. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **72**, 447 (1992).
3. Н. Н. Розанов, А. В. Федоров, С. В. Федоров, Г. В. Ходова, ЖЭТФ **107**, 376 (1995).
4. М. Я. Даршт, Б. Я. Зельдович, И. В. Катаевская, И. Д. Кундикова, ЖЭТФ **107**, 1464 (1995).
5. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **82**, 820 (1997).
6. J. U. Kang, G. I. Stegeman, and J. S. Aitchison, Opt. Lett. **20**, 2069 (1995).
7. W. E. Torruellas, Z. Wang, L. Torner, and G. I. Stegeman, Opt. Lett. **20**, 1949 (1995).
8. L. Torner, W. E. Torruellas, G. I. Stegeman, and C. R. Menyuk, Opt. Lett. **20**, 1952 (1995).
9. А. М. Гончаренко, В. Г. Кукушкин, Весцi АН БССР, сер. физ.-мат. №6, 32 (1990).
10. C. R. Menyuk, IEEE J. Quant. Electron. **QE-25**, 2674 (1989).
11. Ю. С. Кившарь, В. В. Конотоп, КЭ **17**, 1599 (1990).
12. Ю. С. Кившарь, КЭ **17**, 1603 (1990).
13. Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
14. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, J. Mod. Opt. **39**, 2193 (1992).
15. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
16. С. Д. Куницын, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов, Изв. РАН, сер. физ. **57**, 172 (1993).
17. С. Д. Куницын, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов, Письма в ЖТФ **19**, 39 (1993).
18. B. Crosignani, M. Segev, and D. Engin, J. Opt. Soc. Amer. B **10**, 446 (1993).
19. M. Segev, B. Crosignani, and A. Yariv, Phys. Rev. Lett. **68**, 923 (1992).
20. D. N. Christodoulides and M. I. Carvalho, J. Opt. Soc. Amer. B **12**, 1628 (1995).
21. M. Morin, G. Duree, G. Salamo, and M. Segev, Opt. Lett. **20**, 2066 (1995).
22. M. Segev, G. C. Valley, S. R. Singh, M. I. Carvalho, and D. N. Christodoulidis, Opt. Lett. **20**, 1764 (1995).
23. D. N. Christodoulides, S. R. Singh, M. I. Carvalho, and M. Segev, Appl. Phys. Lett. **68**, 1763 (1996).
24. Z. Chen, M. Segev, T. H. Coskun, and D. N. Christodoulides, Opt. Lett. **21**, 1436 (1996).

25. D. Anderson and M. Lisak, Phys. Rev. A **27**, 1393 (1983).
26. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
27. D. Anderson, M. Karlsson, M. Lisak, and A. Sergeev, Phys. Rev. E **47**, 3617 (1993).
28. В. И. Круглов, Р. А. Власов, В. М. Волков, Изв. АН СССР, сер. физ. **53**, 1182 (1989).
29. J. W. Grantham, H. M. Gibbs, G. Khitrova, J. F. Valley, and Xu Jiajin, Phys. Rev. Lett. **66**, 1422 (1991).
30. L. M. Pismen, Phys. Rev. Lett. **75**, 228 (1995).
31. *Новые физические принципы оптической обработки информации*, под ред. С. А. Ахманова, Наука, Москва (1990).
32. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988).
33. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах*, Наука, Москва (1997).