РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА *ТОМ 113, ВЫПУСК 5*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД *МАЙ, 1998*
МОСКВА «НАУКА»

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННИМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

*А. А. Померанский**, *И. Б. Хриплович*†

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 1997 г.

Рассматривается движение релятивистской частицы с внутренним моментом (спином) во внешних электромагнитном и гравитационном полях в первом приближении по внешнему полю, но в произвольном порядке по спину. Правильный учет влияния спина на траекторию частицы достигается при нековариантном описании спина. Конкретные вычисления проведены с точностью до членов второго порядка по спину включительно. Дан простой вывод гравитационного спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий для релятивистской частицы. Обсуждается гравимагнитный момент, своеобразный спиновый эффект в общей теории относительности. Показано, что для керровской черной дыры гравимагнитное отношение, т. е. коэффициент при гравимагнитном моменте, равен единице (подобно тому как для заряженной керровской дыры гиромагнитное отношение равно двум). Полученные уравнения движения для релятивистской частицы со спином во внешнем гравитационном поле существенно отличаются от уравнений Папапетру.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении частицы с внутренним моментом (спином) во внешнем поле состоит из двух частей: описание прецессии самого спина в этих полях и учет влияния спина на траекторию движения. В низшем неисчезающем порядке по c^{-2} полное решение задачи для случая внешнего электромагнитного поля было дано более 70 лет

*E-mail: pomeransky@vxinpz.inp.nsk.su
†E-mail: khriplovich@inp.nsk.su

назад [1]. Прецессия гироскопа в центрально-симметричном гравитационном поле была рассмотрена в том же приближении еще раньше [2]. Затем, заметно позднее, была описана прецессия спина и для случая гравитационного спин-спинового взаимодействия [3]. Полностью релятивистская задача о прецессии спина во внешнем электромагнитном поле была также решена более 70 лет назад [4], а затем в более удобном формализме, использующем ковариантный вектор спина, в работе [5].

Что же касается второй части задачи, относящейся к влиянию спина на траекторию, то здесь ситуация иная. Ковариантные уравнения движения для релятивистской частицы со спином в электромагнитном поле были написаны в той же работе [4], а для случая гравитационного поля — в [6]. Эти уравнения неоднократно обсуждались впоследствии с разных точек зрения в многочисленных статьях [7–16, 38]. Вопрос о влиянии спина на траекторию частицы во внешних полях имеет не только сугубо теоретический интерес. Он привлекает внимание в связи с описанием движения ультрарелятивистских частиц в ускорителях [17] (см. также недавний обзор [18]). Далее, существуют макроскопические объекты, внутреннее вращение которых влияет на их движение во внешнем гравитационном поле. Речь идет о керровских черных дырах. Эта задача важна, в частности, для расчета гравитационного излучения двойных звезд. В этой связи она рассматривалась в работах [19–22]. Однако, обратившись к этим расчетам, мы обнаружили [23], что используемые там уравнения движения с учетом спина в низшем неисчезающем порядке по c^{-2} уже в более простом случае внешнего поля приводят к результатам, отличным от хорошо известного гравитационного спин-орбитального взаимодействия. Проблема связана по существу с правильным определением координаты центра масс. Более того, оказалось, что и уравнения Папапетру [6] сами по себе в том же c^{-2}-приближении не воспроизводят результат для гравитационного спин-орбитального взаимодействия, восходящий к [2]. Это расхождение было отмечено уже давно в работе [24], однако его объяснение, предложенное там, представляется неудовлетворительным (см. [23]).

В настоящей работе получены уравнения движения релятивистской частицы при нековариантном описании спина. Они согласуются с хорошо известными предельными случаями. Хотя для внешнего электромагнитного поля такие уравнения в линейном по спину приближении были получены ранее [17] (см. также [18]), мы хотели бы начать с замечаний, относящихся к этому приближению в электродинамике.

2. КОВАРИАНТНЫЕ И НЕКОВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Взаимодействие спина с внешним электромагнитным полем описывается с точностью до членов порядка c^{-2} включительно хорошо известным гамильтонианом (см., например, [25])

$$H = -\frac{eg}{2m}(\mathbf{sB}) + \frac{e(g-1)}{2m^2}\mathbf{s}[\mathbf{pE}]. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ — внешние поля, магнитное и электрическое; e, m, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}$ — заряд, масса, спин и импульс частицы, соответственно; g — ее гиромагнитное отношение. Подчеркнем, что структура второго, томасовского, слагаемого в этом выражении не только надежно установлена теоретически, но и подтверждена с высокой точностью экспериментально, во всяком случае, в атомной физике. Заметим также во избежание недоразумений, что в самом общем случае последнее слагаемое в формуле (1) следовало бы переписать в эрмитовой форме (см., например, [26]):

$$[\mathbf{pE}] \to \frac{1}{2}\left([\mathbf{pE}] - [\mathbf{Ep}]\right) = [\mathbf{pE}] + \frac{i}{2}[\nabla\mathbf{E}].$$

Однако нас будет интересовать, главным образом, квазиклассическое приближение, когда во взаимодействии, линейном по спину, производные от полей отбрасываются. (Кроме того, поправка, содержащая $[\nabla\mathbf{E}]$, обращается в нуль в рассмотренном в [25] случае потенциального электрического поля.)

Попробуем построить ковариантное уравнение движения с учетом спина, которое в том же приближении воспроизводило бы силу

$$\mathbf{f}_m = \frac{eg}{2m}\mathbf{sB}_{,m} + \frac{e(g-1)}{2m}\left(\frac{d}{dt}[\mathbf{Es}]_m - \mathbf{s}[\mathbf{vE}_{,m}]\right), \tag{2}$$

соответствующую гамильтониану (1) (здесь и ниже запятая с индексом означает частную производную). Ковариантная поправка f^μ к силе Лоренца $eF^{\mu\nu}u_\nu$, линейная по тензору спина $S_{\mu\nu}$ и по градиенту тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu,\lambda}$, может зависеть также и от 4-скорости u^μ. Поскольку $u_\mu u^\mu = 1$, эта поправка должна удовлетворять условию $u_\mu f^\mu = 0$. Из указанных величин можно построить лишь две независимые структуры, удовлетворяющие последнему условию. Первая из них,

$$\eta^{\mu\kappa}F_{\nu\lambda,\kappa}S^{\nu\lambda} - F_{\lambda\nu,\kappa}u_\kappa S^{\lambda\nu}u^\mu,$$

сводится в интересующем нас приближении к

$$2\mathbf{s}(\mathbf{B}_{,m} - [\mathbf{vE}_{,m}]),$$

а вторая,

$$u^\lambda F_{\lambda\nu,\kappa}u^\kappa S^{\nu\mu},$$

к

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{sE}]_m.$$

(Заметим, что структуры, содержащие свертку $F_{\nu\kappa,\lambda}S^{\kappa\lambda}$, приводятся к указанным двум в силу уравнений Максвелла и антисимметрии $S_{\kappa\lambda}$.)

Очевидно, никакая линейная комбинация двух указанных структур не может воспроизвести правильное выражение (2) для силы, зависящей от спина.

В несколько менее общем виде это было показано ранее в работе [23]. Там же было отмечено, что координата, входящая в ковариантное уравнение, не совпадает с обычной. Поэтому для получения правильного c^{-2}-приближения к ковариантному уравнению движения требуется дополнительное переопределение координаты:

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} - \frac{1}{2m}[\mathbf{vs}]. \tag{3}$$

В случае спина 1/2 это переопределение тесно связано с преобразованием Фолди–Ваутхойзена [27]. Обобщение указанной подстановки на случай произвольных скоростей предложено в недавней работе [18].

Между тем правильные уравнения движения в электромагнитном поле с учетом спина в первом порядке известны достаточно давно [17]. Напомним, что исходное физическое определение спина нековариантно и относится к собственной системе частицы. Это трехмерный вектор **s** (или трехмерный антисимметричный тензор) внутреннего момента, заданный в этой системе. Ковариантный вектор спина S_μ (или ковариантный антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$) получаются отсюда просто преобразованием Лоренца. Кстати, в таком подходе условия $u^\mu S_\mu = 0$, $u^\mu S_{\mu\nu} = 0$ выполняются тождественно. Частота прецессии спина **s** при произвольной скорости частицы хорошо известна (см., например, [25]):

$$\Omega = \frac{e}{2m}\left\{(g-2)\left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB}) - [\mathbf{vE}]\right] + 2\left[\frac{1}{\gamma}\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma+1}[\mathbf{vE}]\right]\right\}, \tag{4}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Соответствующий лагранжиан взаимодействия (лагранжево описание здесь чуть удобнее, чем гамильтоново) равен, естественно,

$$L_{1s} = \Omega\mathbf{s} = \frac{e}{2m}\mathbf{s}\left\{(g-2)\left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB}) - [\mathbf{vE}]\right] + 2\left[\frac{1}{\gamma}\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma+1}[\mathbf{vE}]\right]\right\}. \tag{5}$$

Уравнение движения для координаты имеет обычный вид:

$$\left(\nabla - \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}\right)L_{tot} = 0, \tag{6}$$

где L_{tot} — полный лагранжиан системы, а уравнение движения для спина в общем виде выглядит так:

$$\dot{\mathbf{s}} = -\{L, \mathbf{s}\}, \tag{7}$$

где $\{\ldots, \ldots\}$ — скобки Пуассона, или

$$\dot{\mathbf{s}} = -i[L, \mathbf{s}] \tag{8}$$

в квантовой задаче.

В заключение этого раздела отметим, что на самом деле заранее отнюдь не очевидно, насколько осмысленны вообще обсуждаемые спиновые поправки к уравнениям движения элементарных частиц, скажем, электрона или протона. Согласно известному соображению Бора (см. [28]), дополнительная лоренцева сила, обусловленная конечным размером волнового пакета заряженной частицы и соотношением неопределенности, превышает соответствующую компоненту силы Штерна–Герлаха. Между тем уже довольно давно было выдвинуто предложение о разделения пучка заряженных частиц по поляризациям в накопителе за счет взаимодействия спина с внешними полями [29]. Хотя это предложение обсуждается довольно активно (см. обзор [18]), до сих пор неясно, насколько оно осуществимо с принципиальной точки зрения.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ. ЭФФЕКТЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ПО СПИНУ

В этом разделе мы укажем общий подход к выводу уравнений движения во внешнем электромагнитном поле в произвольном порядке по спину. По ходу дела мы воспроизведем здесь известный результат (4).

Наш подход к задаче основан на следующем физически очевидном соображении. Пока и поскольку мы не обсуждаем внутренние возбуждения тела, движущегося во внешнем поле, это тело, пусть даже макроскопическое, может рассматриваться как элементарная частица со спином.

Поэтому лагранжиан взаимодействия спина с внешним полем может быть получен из амплитуды упругого рассеяния

$$-eJ^{\mu}A_{\mu} \tag{9}$$

частицы со спином s на вектор-потенциале A_{μ}. В силу соображений, приведенных в конце предыдущего раздела, учет эффектов, нелинейных по спину, интересующих нас в первую очередь, может иметь физический смысл лишь в классическом пределе $s \gg 1$. Именно это приближение будет в основном использоваться ниже.

Матричный элемент J_{μ} оператора электромагнитного тока между состояниями с импульсами k и k' может быть представлен (при условии P- и T-инвариантности) следующим образом (см. [30, 31]):

$$J_{\mu} = \frac{1}{2\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\left\{p_{\mu}F_e + \Sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\,F_m\right\}\,\psi(k). \tag{10}$$

Здесь $p_{\mu} = (k'+k)_{\mu}$, $q_{\mu} = (k'-k)_{\mu}$.

Волновая функция частицы с произвольным спином ψ может быть записана (см., например, [25, §31]) как

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Оба спинора,

$$\xi = \left\{\xi^{\alpha_1\alpha_2\,..\,\alpha_p}_{\dot\beta_1\dot\beta_2\,..\,\dot\beta_q}\right\}$$

и

$$\eta = \left\{\eta^{\beta_1\beta_2\,..\,\beta_q}_{\dot\alpha_1\dot\alpha_2\,..\,\dot\alpha_p}\right\},$$

симметричны по пунктирным и непунктирным индексам в отдельности, а

$$p + q = 2s.$$

Для частицы с полуцелым спином можно выбрать

$$p = s + \frac{1}{2}, \quad q = s - \frac{1}{2}.$$

В случае целого спина удобно принять

$$p = q = s.$$

Спиноры ξ и η выбраны таким образом, что при отражении координат они переходят друг в друга (с точностью до фазы). При $p \neq q$ это различные объекты, которые принадлежат к разным представлениям группы Лоренца. Если же $p = q$, эти два спинора совпадают. Тем не менее мы будем использовать одно и то же выражение (11) для волновой функции любого спина, т. е. будем формально вводить объект η и для целого спина, имея в виду, конечно, что он выражается через ξ. Это позволяет проводить вычисления единообразно для целых и полуцелых спинов.

В системе покоя и ξ, и η совпадают с нерелятивистским спинором ξ_0, который симметричен по всем индексам; в этой системе нет разницы между пунктирными и непунктирными индексами. Спиноры ξ и η получаются из ξ_0 с помощью преобразования Лоренца:

$$\xi = \exp\{\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,\xi_0\,; \qquad \eta = \exp\{-\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,\xi_0\,. \tag{12}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{\phi}$ направлен вдоль скорости, $\operatorname{th}\phi = v$,

$$\mathbf{\Sigma} = \sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\sigma}_i - \sum_{i=p+1}^{p+q}\boldsymbol{\sigma}_i\,,$$

а $\boldsymbol{\sigma}_i$ действует на i-ый индекс спинора ξ_0 следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}_i\,\xi_0 = (\boldsymbol{\sigma}_i)_{\alpha_i\beta_i}\,(\xi_0)_{\dots\beta_i\dots}\,. \tag{13}$$

В преобразовании Лоренца (12) для ξ после действия оператора $\mathbf{\Sigma}$ на ξ_0 первые p индексов отождествляются с верхними непунктирными индексами, а следующие q индексов отождествляются с нижними пунктирными индексами. Для η ситуация обратная.

Заметим, что во внешнем поле компоненты скорости $\mathbf{v}$ (а вместе с ними и компоненты $\boldsymbol{\phi}$), вообще говоря, не коммутируют. Однако в интересующем нас приближении взаимодействия, линейного по внешнему полю, этой некоммутативностью, которая сама пропорциональна полю, можно пренебречь. Кроме того, нас будет интересовать, главным образом, классический предел конечного ответа, где подобные коммутаторы несущественны, так как они содержат лишнюю степень $\hbar$. Поэтому мы будем считать $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\phi}$ обычными численными параметрами.

Далее,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь I — сумма единичных 2×2-матриц, действующих на все индексы спиноров ξ и η. Компоненты матрицы $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$ выглядят так:

$$\Sigma_{0n} = \begin{pmatrix} -\Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\Sigma_{mn} = -2i\epsilon_{mnk}\begin{pmatrix} s_k & 0 \\ 0 & s_k \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2s}\boldsymbol{\sigma}_i.$$

Скалярные операторы $F_{e,m}$ зависят от двух инвариантов, $t = q^2$ и $\tau = (S^\mu q_\mu)^2$. Ковариантный вектор спина S_μ определен, например, для состояния с импульсом k_μ и получается с помощью преобразования Лоренца из вектора спина $(0, \mathbf{s})$ в системе покоя:

$$S^\mu = (S_0, \mathbf{S}), \quad S_0 = \frac{(\mathbf{sk})}{m}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{s} + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{ks})}{m(\epsilon + m)}. \tag{16}$$

В разложении по электрическим мультиполям

$$F_e(t, \tau) = \sum_{n=0}^{N_e} f_{e,2n}(t)\tau^n$$

высшая степень N_e, очевидно, равна s и $s - 1/2$ для целого и полуцелого спинов соответственно. В магнитном мультипольном разложении

$$F_m(t, \tau) = \sum_{n=0}^{N_m} f_{m,2n}(t)\tau^n$$

высшая степень N_m составляет $s-1$ и $s-1/2$ для целого и полуцелого спинов. Нетрудно видеть, что

$$f_{e,0}(0) = 1, \quad f_{m,0}(0) = \frac{g}{2}.$$

Заметим, наконец, что выбор нековариантной нормировки для амплитуды (9) обусловлен тем, что нас интересует лагранжиан, относящийся к мировому времени t, а не к собственному времени τ.

Воспроизведем теперь в используемом подходе хорошо известный результат (5) для случая постоянного внешнего поля. Начнем с членов, пропорциональных g-фактору. Соответствующее слагаемое в амплитуде рассеяния может быть записано так:

$$\frac{eg}{4\epsilon}\, \xi_0'^\dagger \left\{ \left[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}(\mathbf{sB})\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\} + \exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}(\mathbf{sB})\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\left[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\} - \exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\right] \right\} \xi_0. \tag{17}$$

Существенно, что в рассматриваемом случае постоянного внешнего поля можно положить $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\phi}' = \boldsymbol{\phi}$, поскольку $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ соответствует градиенту поля.

Дальнейшие вычисления используют известное тождество

$$\exp\{\hat{A}\}\hat{B}\exp\{-\hat{A}\} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] + \dots,$$

а также соотношения

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = 4i\epsilon_{ijk}s_k, \quad [\Sigma_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k, \tag{18}$$

$$\operatorname{ch}\phi = \gamma, \quad \operatorname{sh}\phi = v\gamma. \tag{19}$$

После достаточно простых алгебраических преобразований выражение (17) приводится к виду

$$\frac{eg}{2m}\,\mathbf{s}\left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB}) - [\mathbf{vE}]\right]. \tag{20}$$

Перейдем теперь к вкладу конвективного слагаемого

$$-\frac{e}{2\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\psi(k)\,p^{\mu}A_{\mu}. \tag{21}$$

Представим произведение экспонент в выражении

$$\bar{\psi}(k')\psi(k) = \frac{1}{2}\xi_0'^{\dagger}\left[\exp\left\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\right\}\exp\left\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\right\} + \exp\left\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\right\}\exp\left\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\right\}\right]\xi_0 \tag{22}$$

в виде

$$\exp\left\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\right\}\exp\left\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\right\} = \\ = \prod_p \exp\{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\prod_q \exp\{-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}. \tag{23}$$

Рассмотрим типичный множитель в этой формуле:

$$\exp\{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\phi}/2\} = \operatorname{ch}(\phi'/2)\operatorname{ch}(\phi/2) - (\mathbf{n}'\mathbf{n})\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2) + \\ +\boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{n}'\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{ch}(\phi/2) - \mathbf{n}\operatorname{ch}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2)\right] - i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}'\mathbf{n}])\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2), \tag{24}$$

здесь $\mathbf{n}' = \mathbf{v}'/v'$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$. Поскольку градиенты нас интересуют, только если они входят вместе со спином, в первом слагаемом $\operatorname{ch}(\phi'/2)\operatorname{ch}(\phi/2) - (\mathbf{n}'\mathbf{n})\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2)$ полагаем $\phi' = \phi$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$, после чего это слагаемое становится равным единице. Сейчас мы обсуждаем взаимодействие, линейное по спину, так что произведение (23) сводится к

$$1 + \boldsymbol{\Sigma}\left[\mathbf{n}'\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{ch}(\phi/2) - \mathbf{n}\operatorname{ch}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2)\right] - 2i\,(\mathbf{s}[\mathbf{n}'\mathbf{n}])\operatorname{sh}(\phi'/2)\operatorname{sh}(\phi/2).$$

При подстановке его в формулу (22) слагаемые, пропорциональные $\boldsymbol{\Sigma}$, взаимно сокращаются. Ограничиваясь затем линейными по $\mathbf{q}$ членами, сводим зависящую от спина часть выражения (21) к виду

$$-e\,\frac{p^{\mu}}{2\epsilon}\,\frac{i(\mathbf{s}[\mathbf{kq}])}{m(\epsilon+m)}\,A_{\mu}.$$

Заметим далее, что поскольку $p^{\mu}q_{\mu} = 0$, имеет место тождество

$$p^{\mu}q_{\alpha}A_{\mu} = p^{\mu}(q_{\alpha}A_{\mu} - q_{\mu}A_{\alpha}) = p^{\mu}iF_{\alpha\mu}. \tag{25}$$

Теперь уже можно положить $p_{\mu} \to 2mu_{\mu}$, где u_{μ} — четырехмерная скорость. В результате мы приходим к следующему выражению:

$$-\frac{e}{2m}\,\mathbf{s}\left[2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{B} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{vB}) - \frac{2\gamma}{\gamma+1}[\mathbf{vE}]\right]. \tag{26}$$

Выражения (20), (26) в сумме дают формулу (5). Таким образом, мы воспроизвели известный результат для взаимодействия, линейного по спину, исходя из релятивистского волнового уравнения для произвольного спина.

В дальнейшем мы будем неоднократно использовать тождества типа (25). На классическом языке подобное преобразование соответствует отбрасыванию в лагранжиане (или добавлению к нему) полной производной по времени. Действительно,

$$u^{\mu}q_{\mu} \to u^{\mu}\partial_{\mu} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right) = \gamma\,\frac{d}{dt}.$$

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. ЭФФЕКТЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ ПО СПИНУ

Перейдем теперь к взаимодействию, квадратичному по спину. «Затравочное» явно квадрупольное взаимодействие, содержащееся в выражениях (9), (10), составляет

$$-e\,\frac{p^\mu}{2\epsilon}\,f_{e,2}(S^\alpha q_\alpha)^2 A_\mu. \tag{27}$$

Используя тождество (25) и соотношения (16), сводим его к виду

$$-e\,f_{e,2}\,\gamma\left\{(\mathbf{vs})\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{v}\nabla)\right]+\frac{1}{\gamma}(\mathbf{s}\nabla)\right\}\left[(\mathbf{sE})-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vE})+(\mathbf{s}[\mathbf{vB}])\right].$$

Отбрасывая полную производную по времени $\partial/\partial t+\mathbf{v}\nabla$, приходим к выражению

$$L_{2s}=-e\,f_{e,2}\left[(\mathbf{s}\nabla)-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)\right]\left[(\mathbf{sE})-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vE})+(\mathbf{s}[\mathbf{vB}])\right]. \tag{28}$$

Как нетрудно убедиться, используя уравнения Максвелла и добавляя полную производную по t, структура этого выражения такова, что тензор s_is_j в нем можно переписать в неприводимой форме:

$$s_is_j\to s_is_j-(1/3)\delta_{ij}\mathbf{s}^2.$$

Теперь из нерелятивистского предела формулы (28) видно, что она действительно описывает взаимодействие с внешним полем квадрупольного момента

$$Q_{ij}=-2e\,f_{e,2}\,(3\,s_is_j-\delta_{ij}\mathbf{s}^2),\quad Q=Q_{zz}|_{s_z=s}=-2e\,f_{e,2}\,s(2s-1). \tag{29}$$

В асимптотике при $\gamma\to\infty$ взаимодействие (28) стремится к константе

$$L_{2s}=-e\,f_{e,2}\,[(\mathbf{s}\nabla)-(\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)]\,[(\mathbf{sE})-(\mathbf{sv})(\mathbf{vE})+(\mathbf{s}[\mathbf{vB}])]. \tag{30}$$

Хорошо известно, что даже в отсутствие затравочного квадрупольного члена, т. е. при $f_{e,2}=0$, квадрупольное взаимодействие возникает в нерелятивистском пределе за счет конвективного и магнитного слагаемых во взаимодействии (9). Значение этого индуцированного квадрупольного момента при произвольном спине частицы было получено в работе [31][1)]:

$$Q_1=-e\,(g-1)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\begin{cases}s, & \text{целый спин,}\\ s-1/2, & \text{полуцелый спин.}\end{cases} \tag{31}$$

В этой формуле явно выделена постоянная Планка $\hbar$, чтобы продемонстрировать, что индуцированный квадрупольный момент Q_1 исчезает в классическом пределе $\hbar\to 0$, $s\to\infty$, $\hbar s\to\mathrm{const}$. Поэтому квадратичное по спину взаимодействие, пропорциональное Q_1, не сказывается реально на уравнениях движения классической частицы (хотя и играет роль в атомной спектроскопии [31]).

---

1) Авторами этой работы допущена опечатка в ответе для индуцированного квадрупольного момента, в результате которой его значение, приведенное в [31], вдвое меньше правильного.

Между тем конвективное и магнитное слагаемые в выражении (9) индуцируют взаимодействие, квадратичное по спину, которое имеет классический предел и потому представляет интерес для нашей задачи. Здесь удобно начать со взаимодействия конвективного тока. Вернемся к формуле (24). По-прежнему полагаем в ней

$$\mathrm{ch}(\phi'/2)\,\mathrm{ch}(\phi/2) - (\mathbf{n}'\mathbf{n})\,\mathrm{sh}(\phi'/2)\,\mathrm{sh}(\phi/2) = 1,$$

а в остальных членах, линейных по $\boldsymbol{\sigma}$, сохраняем лишь первую степень $\mathbf{q} \to -i\hbar\nabla$ в надежде на то, что в окончательный ответ, в произведение (23), $\hbar$ войдет в комбинации $\hbar s \to \mathrm{const}$. Тем не менее сами по себе эти члены малы по сравнению с единицей, и поэтому в классическом пределе выражение (24) можно записать так:

$$\exp\left\{\boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{n}'\,\mathrm{sh}(\phi'/2)\,\mathrm{ch}(\phi/2) - \mathbf{n}\,\mathrm{ch}(\phi'/2)\,\mathrm{sh}(\phi/2)\right] - i\,(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}'\mathbf{n}])\,\mathrm{sh}^2(\phi/2)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что в произведении (23) операторы $\boldsymbol{\sigma}$, стоящие при $\mathbf{n}'\,\mathrm{sh}(\phi'/2)\,\mathrm{ch}(\phi/2) - \mathbf{n}\,\mathrm{ch}(\phi'/2)\,\mathrm{sh}(\phi/2)$, собираются в показателе результирующей экспоненты в оператор $\boldsymbol{\Sigma}$, а он исчезает в классическом пределе. В этом пределе выживают лишь те операторы $\boldsymbol{\sigma}$, которые стоят при $[\mathbf{n}'\mathbf{n}]\,\mathrm{sh}^2(\phi/2)$; они собираются в $2\mathbf{s}$. Таким образом, в классическом пределе произведение (23) сводится с учетом второго тождества (19) к

$$\exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\right\}. \tag{32}$$

Заметим, что действие оператора (32) на любую функцию координат, будь то вектор-потенциал или напряженность поля, сводится к сдвигу ее аргумента:

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \frac{1}{m}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,[\mathbf{s}\mathbf{v}].$$

Любопытно, что именно эта подстановка предложена в работе [18] для перехода от ковариантных уравнений движения, линейных по спину, к нековариантным. Ее частный случай в c^{-2}-приближении — формула (3).

Теперь, учитывая второй член разложения экспоненты (32) и вновь используя тождество (25), без труда получаем следующее выражение для квадратичного по спину взаимодействия, возникающего от конвективного тока:

$$-\frac{e}{2m^2}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\left[\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{s}\mathbf{B}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{B}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\mathbf{E}])\right]. \tag{33}$$

Перейдем к вкладу в обсуждаемый эффект, обусловленному магнитным моментом. Интересующее нас слагаемое в амплитуде рассеяния, пропорциональное g-фактору, теперь удобно записать так:

$$\begin{aligned}
&(eg/4\epsilon)\,\xi_0'^{\dagger}\,\Big\{\big[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,(\mathbf{s}\mathbf{B})\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\; + \\
&\quad + \exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,(\mathbf{s}\mathbf{B})\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\big] + \\
&\quad + (i/2)\,\big[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\; - \\
&\quad - \exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}'/2\}\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\,(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}/2\}\big]\Big\}\,\xi_0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Используя на этот раз первый член разложения экспоненты (32), приходим к следующему выражению для вклада, пропорционального магнитному моменту:

$$\frac{eg}{2m^2}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\left[(\mathbf{sB})-\frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-(\mathbf{s}\,[\mathbf{vE}])\right]. \tag{35}$$

Полный ответ для индуцированного взаимодействия, квадратичного по спину, имеет вид

$$L^i_{2s}=\frac{e}{2m^2}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{s}[\mathbf{v}\nabla])\left[\left(g-1+\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{sB})-(g-1)\,\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-\right.$$
$$\left.-\left(g-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)(\mathbf{s}\,[\mathbf{vE}])\right]. \tag{36}$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе индуцированное взаимодействие с магнитным полем стремится к нулю как v/c, а с электрическим — как $(v/c)^2$. Более того, та часть взаимодействия (36), которая не связана с g-фактором, не является неприводимой по спину; иными словами, структура $s_i s_j$ в ней не сводится к неприводимому тензору $s_i s_j - (1/3)\delta_{ij}\mathbf{s}^2$. Взаимодействие (36) вообще не является квадрупольным. Представляет интерес, однако, его асимптотическое поведение при $\gamma\to\infty$. В этом пределе

$$L^i_{2s}=\frac{e}{2m^2}\,(g-1)\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\,[(\mathbf{sB})-(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-(\mathbf{s}\,[\mathbf{vE}])]. \tag{37}$$

Поразительным образом асимптотики (30) и (37) совпадают с точностью до множителя и до полной производной по времени. Для доказательства этого факта удобно ввести ортонормированную тройку векторов

$$\mathbf{v};\quad \boldsymbol{\rho}=\frac{[\mathbf{vs}]}{|[\mathbf{vs}]|},\quad \boldsymbol{\zeta}=[\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}].$$

Используя полноту этого базиса и уравнение $\dot{\mathbf{E}}=[\nabla\mathbf{B}]$, а также отбрасывая полную производную по t, нетрудно проверить, что

$$[(\mathbf{s}\nabla)-(\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)]\,[(\mathbf{sE})-(\mathbf{sv})(\mathbf{vE})+(\mathbf{s}[\mathbf{vB}])]=[\mathbf{vs}]^2\,(\boldsymbol{\zeta}\nabla)[(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{E})+(\boldsymbol{\rho}\mathbf{B})]$$

действительно совпадает с

$$(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\,[(\mathbf{sB})-(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-(\mathbf{s}\,[\mathbf{vE}])]=-[\mathbf{vs}]^2\,(\boldsymbol{\rho}\nabla)\,[(\boldsymbol{\rho}[\mathbf{vB}])+(\boldsymbol{\rho}\mathbf{E})].$$

Таким образом, имеется выделенное значение затравочного квадрупольного момента (29)

$$Q=-2(g-1)\,\frac{es^2}{m^2},\quad \text{или}\quad f_{e,2}=(g-1)\,\frac{1}{2m^2} \tag{38}$$

(напомним, что мы сейчас рассматриваем классическую ситуацию, когда $s\gg 1$), при котором полное взаимодействие, квадратичное по спину, $L_{2s}+L^i_{2s}$, асимптотически уменьшается с ростом энергии.

Ситуация сходна с той, которая имеет место для взаимодействия, линейного по спину. Хорошо известно (см., например, [11, 32, 33]), что имеется выделенное значение

g-фактора, $g = 2$, при котором линейное по спину взаимодействие убывает при $\gamma \to \infty$. Это непосредственно видно из формулы (5) для лагранжиана первого порядка. Таким образом, полагая дополнительно $g = 2$, мы получаем

$$Q = -2\frac{es^2}{m^2}, \quad \text{или} \quad f_{e,2} = \frac{1}{2m^2}. \tag{39}$$

Заметим, что выбор $g = 2$ для затравочного магнитного момента является необходимым (но не достаточным) условием перенормируемости в квантовой электродинамике [11, 32, 33]. Это условие выполнено не только для электрона, но и для заряженного векторного бозона в перенормируемой теории электрослабых взаимодействий.

Однако в определенном отношении ситуация с выделенными значениями (38), (39) квадрупольного момента отличается от ситуации с g-фактором. Условия (38), (39) в отличие от условия $g = 2$ не универсальны, они имеют место только для больших спинов, $s \gg 1$, иными словами, относятся лишь к классическим объектам с внутренним моментом. В частности, у заряженного векторного бозона перенормируемой электрослабой теории затравочное квадрупольное взаимодействие вообще отсутствует, $f_{e,2} = 0$. Квадрупольный момент этой частицы имеет (на нашем языке) индуцированную природу, он дается формулой (31) при $s = 1$ и $g = 2$.

5. ПРЕЦЕССИЯ СПИНА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы дадим простой и общий вывод уравнений прецессии спина в гравитационном поле. Этот подход не только позволяет легко воспроизвести и обобщить известные результаты для спиновых эффектов. Прослеженная здесь замечательная аналогия между гравитационным и электромагнитным полями дает возможность без особых затруднений перенести результаты двух предыдущих разделов на случай внешнего гравитационного поля.

Из сохранения момента импульса в плоском пространстве-времени в сочетании с принципом эквивалентности следует, что 4-вектор спина S^μ параллельно переносится вдоль мировой линии частицы. Параллельный перенос вектора вдоль геодезической $x^\mu(\tau)$ означает равенство нулю его ковариантной производной:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = 0. \tag{40}$$

(В этом разделе мы ограничиваемся эффектами, линейными по спину.) Перейдем к естественному для описания спина тетрадному формализму. В силу соотношения (40) уравнение для тетрадных компонент спина $S^a = S^\mu e^a_\mu$ выглядит так:

$$\frac{DS^a}{D\tau} = \frac{dS^a}{d\tau} = S^\mu e^a_{\mu;\nu} u^\nu = \eta^{ab}\gamma_{bcd} u^d S^c. \tag{41}$$

Здесь

$$\gamma_{abc} = e_{a\mu;\nu} e^\mu_b e^\nu_c = -\gamma_{bac} \tag{42}$$

— коэффициенты вращения Риччи [34]. Разумеется, уравнение для тетрадных компонент 4-скорости выглядит точно так же:

$$\frac{du^a}{d\tau} = \eta^{ab}\gamma_{bcd}u^d u^c\,. \tag{43}$$

Смысл уравнений (41), (43) ясен: тетрадные компоненты обоих векторов меняются одинаково, лишь за счет вращения локального лоренцева репера.

Точно так же четырехмерные спин и скорость заряженной частицы с гиромагнитным отношением $g = 2$ одинаково прецессируют во внешнем электромагнитном поле в силу уравнения Баргмана, Мишеля, Телегди [5, 25] (при $g = 2$) и уравнения Лоренца:

$$\frac{dS_a}{d\tau} = \frac{e}{m}F_{ab}S^b, \quad \frac{du_a}{d\tau} = \frac{e}{m}F_{ab}u^b.$$

Таким образом, имеет место очевидное соответствие:

$$\frac{e}{m}F_{ab} \leftrightarrow \gamma_{abc}u^c. \tag{44}$$

Оно позволяет получить частоту прецессии $\boldsymbol{\omega}$ трехмерного вектора спина $\mathbf{s}$ во внешнем гравитационном поле из выражения (4) с помощью простой замены

$$\frac{e}{m}B_i \to -\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\gamma_{klc}u^c, \quad \frac{e}{m}E_i \to \gamma_{0ic}u^c. \tag{45}$$

Эта частота равна

$$\omega_i = -\epsilon_{ikl}\left(\frac{1}{2}\gamma_{klc} + \frac{u^k}{u^0+1}\gamma_{0lc}\right)\frac{u^c}{u^0_w}\,. \tag{46}$$

Общий множитель $1/u^0_w$ в этом выражении связан с переходом в левой части уравнения (41) к дифференцированию по мировому времени t:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = u^0_w\frac{d}{dt}.$$

Величина u^0_w снабжена индексом w, с тем чтобы подчеркнуть, что это мировая, а не тетрадная компонента 4-скорости. Все остальные индексы в выражении (46) тетрадные, $c = 0, 1, 2, 3$; $i, k, l = 1, 2, 3$. Соответствующая поправка к лагранжиану, зависящая от спина, равна

$$L_{1sg} = \mathbf{s}\boldsymbol{\omega}\,. \tag{47}$$

В качестве иллюстрации формул (46), (47) применим их к случаям спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий. Мы ограничимся, как это делается обычно в обсуждаемых задачах, линейным приближением по гравитационному полю. Однако в нашем подходе, в отличие от стандартных, обе задачи элементарно решаются при произвольной скорости частицы.

Тетрады $e_{a\mu}$ связаны с метрикой соотношением

$$e_{a\mu}e_{b\nu}\eta^{ab} = g_{\mu\nu}.$$

В линейном приближении можно положить $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и не делать различия между тетрадным и мировым индексами в $e_{a\mu}$. Неоднозначность в выборе тетрад исключим, приняв симметричную калибровку $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$. Тогда

$$e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\,.$$

Используя выражение (42) для коэффициентов Риччи, находим в линейном приближении

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(h_{bc,a} - h_{ac,b})\,. \tag{48}$$

Начнем со спин-орбитального взаимодействия. В центрально-симметричном поле, которое создается массой M, метрика имеет вид

$$h_{00} = -\frac{2kM}{r}, \quad h_{mn} = -\frac{2kM}{r}\delta_{mn}. \tag{49}$$

Отличные от нуля коэффициенты Риччи здесь таковы:

$$\gamma_{ijk} = \frac{kM}{r^3}(\delta_{jk}r_i - \delta_{ik}r_j), \quad \gamma_{0i0} = -\frac{kM}{r^3}r_i\,. \tag{50}$$

Их подстановка в формулу (46) дает следующее выражение для частоты прецессии:

$$\boldsymbol{\omega}_{ls} = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}\,\frac{kM}{r^3}\,[\mathbf{vr}]. \tag{51}$$

В пределе малых скоростей, $\gamma \to 1$, ответ переходит в классический результат [2].

Перейдем к спин-спиновому взаимодействию. Пусть спин центрального тела равен $\mathbf{s}_0$. Линейные по $\mathbf{s}_0$ компоненты метрики, ответственные за спин-спиновое взаимодействие, таковы:

$$h_{0i} = 2k\,\frac{[\mathbf{s}_0\mathbf{r}]_i}{r^3}\,.$$

Здесь отличные от нуля коэффициенты Риччи равны

$$\gamma_{ij0} = k\left(\nabla_i\frac{[\mathbf{s}_0\mathbf{r}]_j}{r^3} - \nabla_j\frac{[\mathbf{s}_0\mathbf{r}]_i}{r^3}\right), \quad \gamma_{0ij} = -k\nabla_i\frac{[\mathbf{s}_0\mathbf{r}]_j}{r^3}\,. \tag{52}$$

Частота спин-спиновой прецессии составляет

$$\boldsymbol{\omega}_{ss} = -k\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{s}_0\nabla)\nabla\frac{1}{r} + k\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,[\mathbf{v}(\mathbf{s}_0\nabla) - \mathbf{s}_0(\mathbf{v}\nabla) + (\mathbf{vs}_0)\nabla]\,(\mathbf{v}\nabla)\,\frac{1}{r}\,. \tag{53}$$

В пределе малых скоростей эта формула также переходит в соответствующий классический результат [3].

В заключение этого раздела заметим, что и в случае внешнего гравитационного поля не существует ковариантного выражения для силы, линейной по спину частицы. Иными словами, отклонение траектории частицы с внутренним моментом от геодезической не описывается тензором Римана. В этом случае возможная ковариантная структура вообще единственна с точностью до множителя (в работе [6] он равен $-1/2m$): $R_{\mu\nu ab}u^\nu S^{ab}$. Как уже отмечалось во Введении, это ковариантное описание (в отличие от наших формул (46), (47)) противоречит классическим результатам в пределе малых скоростей.

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Уравнения движения во внешнем гравитационном поле в произвольном порядке по спину строятся аналогично уравнениям движения в случае электромагнитного поля.

Начнем с амплитуды упругого рассеяния в слабом внешнем гравитационном поле $h_{\mu\nu}$. Мы используем ее лишь в качестве наводящего соображения, а затем выйдем за рамки линейного приближения. Эта амплитуда равна

$$-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}h^{\mu\nu}. \tag{54}$$

Матричный элемент $T_{\mu\nu}$ тензора энергии-импульса между состояниями с импульсами k и k' может быть записан следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\left\{p_\mu p_\nu\,F_1 + \frac{1}{2}\,(p_\mu\Sigma_{\nu\lambda} + p_\nu\Sigma_{\mu\lambda})\,q^\lambda\,F_2 + \right.$$
$$\left. + \,(\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,F_3 + [S_\mu S_\nu q^2 - (S_\mu q_\nu + S_\nu q_\mu)(Sq) + \eta_{\mu\nu}(Sq)^2]\,F_4\right\}\psi(k). \tag{55}$$

Скалярные операторы F_i в этом выражении также разлагаются по степеням $\tau = (Sq)^2$:

$$F_i(t,\tau) = \sum_{n=0}^{N_i} f_{i,2n}(t)\tau^n.$$

Нетрудно убедиться в том, что полное число инвариантных формфакторов $f_{i,2n}$ равно $4s+2$ и $4s+1$ для целого и полуцелого спина соответственно. Независимость четырех тензорных структур, входящих в выражение (55), очевидна. А полноту разложения можно проверить, например, убедившись в том, что подсчет полного числа инвариантных формфакторов в аннигиляционном канале приводит к результату, совпадающему с указанным выше.

В общековариантной записи структура $(\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,h^{\mu\nu}$ соответствует скалярной кривизне R, а $[S_\mu S_\nu q^2 - (S_\mu q_\nu + S_\nu q_\mu)(Sq) + \eta_{\mu\nu}(Sq)^2]\,h^{\mu\nu}$ соответствует произведению $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$, где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи. Поскольку нас интересуют уравнения движения вне источников поля, мы опускаем соответствующие слагаемые в разложении (55).

Подобно тому как в электродинамике сохранение заряда приводит к условию $f_{e,0}(0) = 1$, здесь из сохранения энергии следует, что $f_{1,0}(0) = 1$. Что же касается слагаемого в амплитуде (54), содержащего $f_{2,0}$, то его удобно переписать иначе, используя аналогию (44) с электромагнитным полем. Полагая в соответствующем электромагнитном слагаемом

$$i\,\frac{eg}{8\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\,\Sigma^{ab}F_{ab}\,\psi(k)$$

$g = 2$, $(e/m)F_{ab} = f_{ab} = \gamma_{abc}u^c$, приходим к следующему вкладу в лагранжиан гравитационного взаимодействия:

$$i\,\frac{1}{4u_w^0}\,\bar{\psi}(k')\,\Sigma^{ab}f_{ab}\,\psi(k); \tag{56}$$

здесь, как обычно, $u_w^0 = \epsilon/m$. Используя для γ_{abc} линейное приближение (48), нетрудно убедиться в том, что выражение (56) действительно соответствует обсуждаемому вкладу в амплитуду при условии $f_{2,0} = 1$. Таким образом, в гравитации фиксировано значение еще одного формфактора при нулевой передаче импульса t. Это соответствует закону сохранения момента количества движения. Указанное обстоятельство было отмечено в работах [35, 36].

Вернемся к конвективному слагаемому в формуле (54). Подобно тому как это было в электродинамике, при переходе к спинорам в собственной системе член первого порядка по спину записывается в виде

$$-\frac{p^\mu p^\nu}{8\epsilon}\,\frac{1}{m}\,\frac{u^0}{u^0+1}\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\nabla])\,h_{\mu\nu}. \tag{57}$$

Используя соотношения (25), (48), получаем

$$p^\mu \nabla_k h_{\mu\nu} \to -p^\mu(-\partial_k h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{k\nu}) \to -2p^a \gamma_{ak\nu}.$$

Таким образом, выражение (57) переписывается через коэффициенты Риччи:

$$\frac{1}{u_w^0}\,\frac{u^0}{u^0+1}\,\epsilon^{mnk} s^m v^n u^a u^c \gamma_{akc}. \tag{58}$$

Как нетрудно убедиться, выражения (56) и (58) в сумме воспроизводят лагранжиан (47).

7. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ВТОРОЙ ПОРЯДОК ПО СПИНУ

Перейдем теперь к исследованию квадратичных по спину эффектов в уравнениях движения в гравитационном поле. В случае двойной звезды эти эффекты имеют тот же порядок величины, что и спин-спиновое взаимодействие при сравнимых спинах компонент системы [23]. Влияние последнего на характеристики гравитационного излучения становится заметным для системы двух предельных черных дыр [20]. Соответственно, спиновые эффекты второго порядка в уравнениях движения становятся ощутимыми, если предельной черной дырой является хотя бы одна из компонент двойной системы [23]. Таким образом, исследование этих эффектов представляет не только чисто теоретический интерес. Они могут быть в принципе обнаружены с помощью детекторов гравитационных волн, строящихся в настоящее время.

Очевидным источником спиновых эффектов второго порядка является слагаемое

$$L_{2sg} = -f_{1,2}\,\frac{1}{8\epsilon}\,p^\mu p^\nu (Sq)^2 h_{\mu\nu} \tag{59}$$

в амплитуде (54). Благодаря соотношению

$$p^\mu p^\nu q_\alpha q_\beta h_{\mu\nu} = p^\mu p^\nu (q_\alpha q_\beta h_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu h_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\nu h_{\mu\beta} - q_\beta q_\mu h_{\nu\alpha}) \to 2p^\mu p^\nu R_{\mu\alpha\nu\beta}$$

лагранжиан (59) переписывается через тензор Римана:

$$L_{2sg} = -\frac{\kappa}{2\epsilon}\,u^a S^b u^c S^d R_{abcd}. \tag{60}$$

Вместо $f_{1,2}$ мы ввели безразмерный параметр κ:

$$f_{1,2} = \frac{\kappa}{2m^2}.$$

Удобно далее воспользоваться представлением Петрова для компонент тензора Римана (см. [34]):

$$\begin{gathered} E_{kl} = R_{0k0l}, \quad E_{kl} = E_{lk}, \quad C_{kl} = \frac{1}{4}\epsilon_{kmn}\epsilon_{lrs}R_{mnrs}, \quad C_{kl} = C_{lk}, \\ B_{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{lrs}R_{0krs}, \quad B_{kk} = 0. \end{gathered} \tag{61}$$

Мы ограничиваемся к тому же случаем гравитационного поля без источников. Тогда при $R_{ab} = 0$ имеют место дальнейшие упрощения:

$$C_{kl} = -E_{kl}, \quad B_{kl} = B_{lk}, \quad E_{kk} = C_{kk} = 0. \tag{62}$$

В итоге приходим к следующему лагранжиану взаимодействия, квадратичному по спину:

$$\begin{aligned} L_{2sg} = -\frac{\kappa}{2\epsilon}\Bigg[&(2\mathbf{u}^2 + 1)\,E_{kl} - 2\left(2 - \frac{1}{u_0+1}\right) u_k u_m E_{lm} + \delta_{kl} u_m u_n E_{mn} + \\ &+ \frac{1}{(u_0+1)^2}\, u_k u_l u_m u_n E_{mn} - \\ &- 2\,u_0\,\epsilon_{kmn} u_m B_{nl} + \frac{2}{u_0+1}\, u_k u_m \epsilon_{lrn} u_r B_{mn}\Bigg] \left(s_k s_l - \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\mathbf{s}^2\right). \end{aligned} \tag{63}$$

Во избежание недоразумений заметим, что в этой формуле (а также в (64), (65)) все трехмерные индексы нужно считать контравариантными.

Так же, как в электродинамике, здесь наряду с «затравочным» взаимодействием (63) существует индуцированное взаимодействие, квадратичное по спину. Его явный вид проще всего получить, полагая в электромагнитной формуле (36) $g = 2$ и совершая подстановку (45). При этом учитываем также соответствие

$$q_i \gamma_{abc} u^c = (q_i \gamma_{abc} - q_c \gamma_{abi})\, u^c \;\rightarrow\; i\,(\partial_i \gamma_{abc} - \partial_c \gamma_{abi})\, u^c \;\rightarrow\; i\,R_{abci} u^c.$$

Наконец, используя соотношения (61), (62), получаем следующий результат для индуцированного взаимодействия:

$$\begin{aligned} L^i_{2sg} = \frac{1}{2\epsilon}\Bigg\{&\left(2\mathbf{u}^2 - \frac{u^0-1}{u^0+1}\right) E_{kl} - 2\left[2 - \frac{1}{u_0+1} - \frac{1}{(u_0+1)^2}\right] u_k u_m E_{lm} + \\ &+ \left[1 - \frac{1}{(u_0+1)^2}\right] \delta_{kl} u_m u_n E_{mn} + \frac{1}{(u_0+1)^2}\, u_k u_l u_m u_n E_{mn} - \\ &- 2\left(u_0 - \frac{1}{u_0+1}\right) \epsilon_{kmn} u_m B_{nl} + \frac{2}{u_0+1}\, u_k u_m \epsilon_{lrn} u_r B_{mn}\Bigg\}\, s_k s_l. \end{aligned} \tag{64}$$

Так же, как и в электромагнитном случае, индуцированное взаимодействие здесь стремится к нулю в нерелятивистском пределе $\sim v/c$, а спиновый множитель в нем, $s_k s_l$, не является неприводимым тензором.

Асимптотическое поведение L_{2sg} и L^i_{2sg} одинаковое: оба лагранжиана линейно растут с ростом энергии. Однако и в этом случае коэффициент в «затравочном» взаимодействии может быть выбран так, $\kappa = 1$, что суммарный лагранжиан второго порядка по спину убывает (так же, как аналогичное взаимодействие в электродинамике), когда энергия стремится к бесконечности. При $\kappa = 1$

$$L_{2sg} + L^i_{2sg} = -\frac{1}{\epsilon(u^0+1)} \times$$
$$\times \left(u^0 E_{kl} - \frac{1}{u_0+1} u_k u_m E_{lm} + \frac{1}{2(u_0+1)} \delta_{kl} u_m u_n E_{mn} + \epsilon_{kmn} u_m B_{nl} \right) s_k s_l. \quad (65)$$

8. ГРАВИМАГНИТНЫЙ МОМЕНТ. МУЛЬТИПОЛИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Существует глубокая аналогия между линейным по спину взаимодействием магнитного момента с электромагнитным полем,

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{eg}{4m} F_{ab} S^{ab}, \quad (66)$$

и «затравочным» гравитационным лагранжианом (60), квадратичным по спину [11]. (Здесь удобнее записывать гравитационный лагранжиан, подобно $\mathscr{L}_{em}$, для собственного времени τ, а не мирового t, т. е. умножить выражение (60) на ϵ/m.) Эта аналогия основана на следующем наблюдении. Как известно, в релятивистское волновое уравнение для частицы во внешних полях, электромагнитном и гравитационном, канонический импульс $i\partial_\mu$ входит через комбинацию

$$\Pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu - \frac{1}{2}\Sigma^{ab}\gamma_{ab\mu}.$$

Из структуры коммутатора (или скобок Пуассона в классическом пределе)

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = -i\left(eF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Sigma^{ab} R_{ab\mu\nu} \right)$$

следует, что в определенном смысле $(-1/2)\Sigma^{ab}R_{ab\mu\nu}$ играет в гравитации ту же роль, что $eF_{\mu\nu}$ в электромагнетизме. Вполне естественно тогда, что гравитационный аналог электромагнитного взаимодействия спина (66) выглядит так:

$$\mathscr{L}_{gm} = \frac{\kappa}{8m} R_{abcd} S^{ab} S^{cd}. \quad (67)$$

Нетрудно показать, что выражения (67) и (60) совпадают (с точностью до множителя ϵ/m). Для этого достаточно учесть соотношение $S^{ab} = \epsilon^{abcd} S_c u_d$, а также тождество

$$\tilde{R}_{abcd} = \frac{1}{4}\epsilon_{ab}{}^{ef}\epsilon_{cd}{}^{gh} R_{efgh} = -R_{abcd},$$

имеющее место для гравитационного поля вне источников.

По аналогии с магнитным моментом

$$\frac{eg}{2m} S^{\mu\nu}$$

естественно ввести понятие гравимагнитного момента

$$-\frac{\kappa}{2m} S^{ab} S^{cd}.$$

Гравимагнитное отношение κ, подобно гиромагнитному отношению g в электродинамике, может, вообще говоря, принимать любые значения. Вполне естественно, однако, что в гравитации значение $\kappa = 1$ столь же выделено, как и $g = 2$ в электродинамике. Во всяком случае, при $g = 2$ и $\kappa = 1$ уравнения движения спина выглядят максимально просто.

Для классического объекта значения обоих параметров g и κ зависят, вообще говоря, от его различных характеристик. Однако для черных дыр ситуация иная. Из анализа решения Керра–Ньюмена следует, что гиромагнитное отношение заряженной вращающейся черной дыры универсально (и такое же, как у электрона!): $g = 2$ [37].

Покажем, что для керровской черной дыры гравимагнитное отношение $\kappa = 1$. Этот результат фактически следует из анализа движения спина черной дыры во внешнем поле, проведенного в работе [19] (хотя само данное утверждение и не сформулировано там явно). Мы приведем здесь независимый и, на наш взгляд, более простой вывод этого важного результата.

На больших расстояниях от керровской дыры ее можно рассматривать как точечный источник слабого гравитационного поля. В линейном приближении по полю покоящейся дыры лагранжева плотность, соответствующая взаимодействию (60), может быть записана как

$$Ł\frac{\kappa}{4m} (\mathbf{s}\nabla)^2 h_{00}\delta(\mathbf{r}). \tag{68}$$

Индуцируемая таким образом поправка к тензору энергии-импульса имеет только одну компоненту

$$\delta T_{00} = -\frac{\kappa}{2m} (\mathbf{s}\nabla)^2 \delta(\mathbf{r}). \tag{69}$$

Найдем соответствующую поправку к 00-компоненте метрики. В калибровке

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha}_{\alpha} \tag{70}$$

статическое уравнение Эйнштейна для h_{00} имеет вид

$$\Delta h_{00} = 8\pi k T_{00}.$$

Искомая поправка равна

$$h_{00} = \kappa\frac{k}{m} (\mathbf{s}\nabla)^2 \frac{1}{r}. \tag{71}$$

Сравним ее с соответствующим вкладом в метрику Керра. В координатах Бойера–Линдквиста эта метрика такова:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\Sigma}\sin^2\theta\right) \times$$
$$\times r^2 \sin^2\theta + \frac{2 r_g r a}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi\, dt, \tag{72}$$

где $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\mathbf{a} = \mathbf{s}/m$. При $r_g = 0$ метрика (72) описывает плоское пространство в сфероидальных координатах [34]. Между тем калибровке (70) соответствуют в плоском пространстве декартовы координаты. Переход от сфероидальных координат к декартовым осуществляется с нужной точностью заменой

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{r}) - \mathbf{r}a^2}{2r^2}.$$

В декартовых координатах зависящая от спина часть 00-компоненты метрики

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1),$$

очевидно, совпадает с h_{00} из формулы (71) при $\kappa = 1$. Несколько более сложное рассмотрение пространственных компонент керровской метрики приводит к тому же результату: $\kappa = 1$.

Заметим, что движение керровской черной дыры во внешнем гравитационном поле не описывается уравнением Папапетру, даже если оставить в стороне проблему спин-орбитального взаимодействия, линейного по спину. Дело в том, что это уравнение относится к случаю $\kappa = 0$ [14].

Аналогично доказывается, что и для заряженной керровской дыры гравимагнитное отношение $\kappa = 1$. Более того, можно показать, что электрический квадрупольный момент заряженной керровской дыры также равен тому значению

$$Q = -2\frac{es^2}{m^2},$$

при котором квадратичное по спину взаимодействие убывает с ростом энергии. Можно показать также, что и остальные, более высокие, мультипольные моменты заряженной керровской дыры обладают именно теми значениями, которые обеспечивают для взаимодействия любого порядка по спину (но, разумеется, линейного по внешнему полю) асимптотическое убывание с энергией.

Мы благодарны И. А. Коопу, Р. А. Сенькову, А. Н. Скринскому и Ю. М. Шатунову за полезные обсуждения. Мы признательны Р. Руффини, Д. Бини, Дж. Джемелли, П. Менотти, а также рецензенту ЖЭТФа за замечания, благодаря которым статья стала, как мы надеемся, более понятной. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №95-02-04436-а).

Литература

1. L. H. Thomas, Nature **117**, 514 (1926); Phil. Mag. **3**, 1 (1926).
2. W. de Sitter, Mon. Not. R. Astron. Soc. **77**, 155, 181 (1916).
3. L. Schiff, Phys. Rev. Lett. **4**, 435 (1959).
4. J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 243 (1926); [перевод: Я. И. Френкель, *Собрание избранных трудов*, т. 2, изд-во АН СССР, М.-Л. (1958), с. 460].
5. V. Bargman, L. Michel, and V. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
6. A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. London A **209**, 248 (1951).

7. A. Barducci, R. Casalbuoni, and L. Lusanna, Nuovo Cimento A **35**, 389 (1976).
8. F. Ravndal, Phys. Rev. D **21**, 2823 (1980).
9. P. L. Nash, J. Math. Phys. **25**, 2104 (1984).
10. U. Heinz, Phys. Lett. B **144**, 228 (1984); Ann. Phys. (N. Y.) **161**, 48 (1985).
11. И. Б. Хриплович, ЖЭТФ **96**, 385 (1989).
12. J. W. van Holten, Nucl. Phys. B **356**, 3 (1991).
13. R. H. Rietdijk and J. W. van Holten, Class. Quantum Grav. **9**, 575 (1992).
14. K. Yee and M. Bander, Phys. Rev. D **48**, 2797 (1993).
15. J. P. Costella and B. H. J. McKellar, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 461 (1994).
16. M. Chaichian, R. Gonzales Felipe, and D. Louis Martinez, Phys. Lett. A **236**, 188 (1997), E-print archive hep-th/9601119.
17. Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, ЖЭТФ **64**, 1918 (1973).
18. K. Heinemann, preprint DESY 96-229, E-print archive physics/9611001.
19. K. S. Thorne and J. B. Hartle, Phys. Rev. D **31**, 1815 (1985).
20. L. E. Kidder, C. M. Will, and A. G. Wiseman, Phys. Rev. D **47**, R4183 (1993).
21. L. Blanchet, T. Damour, B. R. Iyer, C. M. Will, and A. G. Wiseman, Phys. Rev. Lett. **74**, 3515 (1995).
22. H. T. Cho, E-print archive gr-qc/9703071.
23. I. B. Khriplovich and A. A. Pomeransky, Phys. Lett. A **216**, 7 (1996); E-print archive gr-qc/9602004.
24. B. M. Barker and R. F. O'Connell, Gen. Rel. Grav. **5**, 539 (1974).
25. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
26. Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, Наука, Москва (1978).
27. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 248 (1951).
28. В. Паули, *Труды по квантовой теории. Статьи 1928-1958*, под ред. Я. А. Смородинского, Наука, Москва (1977), с. 167.
29. T. O. Niinikoski and R. Rosmanith, Nucl. Instr. Meth. A **225**, 460 (1987).
30. И. Б. Хриплович, *Несохранение четности в атомных явлениях*, Наука, Москва (1988).
31. I. B. Khriplovich, A. I. Milstein, and R. A. Sen'kov, Phys. Lett. A **221**, 370 (1996); ЖЭТФ **111**, 1935 (1997).
32. S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, ed. by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, Cambridge MA, MIT Press (1970).
33. S. Ferrara, M. Porrati, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. D **46**, 3529 (1992).
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
35. И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, ЖЭТФ **43**, 1904 (1962).
36. F. W. Hehl, A. Macias, E. W. Mielke, and Yu. N. Obukhov, E-print archive gr-qc/9706009.
37. B. Carter, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968).
38. Я. И. Азимов, Р. М. Рындин, Материалы XXXI зимней школы ПИЯФ, Санкт-Петербург (1992); E-print archive hep-ph/9710433; 9707468.