

ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ СВЕТОВЫЕ СТРУКТУРЫ В ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛАХ С ЗЕРКАЛОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

П. М. Лушников*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 октября 1997 г.

Представлена нелинейная теория формирования гексагональных световых структур в фоторефрактивных средах в схеме с зеркалом обратной связи. Встречные пучки в фоторефрактивных кристаллах неустойчивы относительно возбуждения боковых волн. Показано, что на нелинейной стадии развития этой неустойчивости трехволновое взаимодействие между слабыми боковыми пучками не стабилизирует неустойчивость, а приводит к взрывному росту амплитуд пучков, поперечные волновые векторы которых образуют углы, кратные $\pi/3$. В результате боковые пучки оказываются скоррелированными под этими углами. Найдена область параметров, в которой четырехволновое взаимодействие насыщает взрывную неустойчивость, что объясняет появление стабильных гексагонов в эксперименте. Вне этой области насыщение взрывной неустойчивости обусловлено нелинейностями старших порядков и процесс формирования гексагонов исследован численно. Получены матричные элементы трех- и четырехволнового взаимодействия как функции расстояния до зеркала обратной связи и выведено уравнение для временной эволюции амплитуд боковых пучков, описывающее образование гексагонов. Проводится сравнение с экспериментальными результатами для фоторефрактивных кристаллов KNbO_3 и BaTiO_3 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение встречных световых пучков в нелинейных средах часто приводит к появлению поперечной неустойчивости относительно возбуждения волн под малыми углами и формированию поперечных световых структур, имеющих гексагональную форму [1–5]. Эта неустойчивость носит абсолютный характер и обусловлена положительной обратной связью между встречными пучками. Особенно большой интерес вызывают явления в фоторефрактивных кристаллах [6–9], что обусловлено чрезвычайным удобством наблюдения процессов развития поперечной неустойчивости и образования регулярных структур. Характерные времена формирования таких структур лежат в пределах от десятых долей секунды до десятков секунд; типичные нелинейные длины кристаллов, на которых существенно меняются амплитуды световых пучков, составляют несколько миллиметров; необходимые интенсивности пучков накачки лежат в диапазоне непрерывных лазеров [10].

До сих пор теоретические исследования поперечной неустойчивости главным образом сводились к отысканию пороговых условий генерации поперечных световых структур. Первоначально пороги неустойчивости были найдены в керровских средах [11], а затем применительно к фоторефрактивным кристаллам KNbO_3 и BaTiO_3 — в схеме с зеркалом обратной связи [12] и к фоторефрактивным кристаллам LiNbO_3 , LiTaO_3 —

* E-mail: lushniko@landau.ac.ru

в схеме со встречными пучками накачки без зеркала обратной связи [13]. Экспериментально лучше всего исследованы кристаллы KNbO_3 и BaTiO_3 . В этих кристаллах в схеме с зеркалом обратной связи образуются стоячие гексагональные структуры и порог неустойчивости достаточно хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [6, 8, 12]. В работе [12] порог найден в предположении, что неустойчивость является аperiодической, т. е. мнимая часть инкремента неустойчивости равна нулю в пороговой точке неустойчивости (в противном случае наблюдались бы бегущие световые структуры, чего на эксперименте можно добиться только небольшим рассогласованием направлений встречных пучков). Другими словами, частотная расстройка между волнами накачки и боковыми волнами равна нулю на пороге неустойчивости.

Выше порога неустойчивость приводит к генерации слабых световых пучков под малыми углами $\theta = |\mathbf{k}_\perp|/k_0$ к пучкам накачки, где k_0 — волновой вектор пучков накачки, \mathbf{k}_\perp — поперечная составляющая волнового вектора возбуждаемого пучка. При малых надкритичностях генерируются только пучки в узком слое вблизи $|\mathbf{k}_\perp| \simeq k_{0\perp}$, где инкремент неустойчивости максимален ($k_{0\perp}$ — значение поперечного волнового вектора, соответствующее максимуму инкремента). Таким образом, на начальном этапе развития неустойчивости образуются кольцевые (в плоскости, поперечной пучкам накачки) структуры с экспоненциально растущими во времени амплитудами. Распределение интенсивности вдоль кольца на этом этапе является произвольным и определяется флуктуациями среды. Эта теория является линейной относительно амплитуд слабых пучков и поэтому не может описывать дальнейшее развитие неустойчивости, приводящее к формированию регулярных световых структур, таких как гексагоны. Образование подобных структур обусловлено нелинейными взаимодействиями между собой слабых световых пучков. Теория такого взаимодействия построена в настоящей работе для случая фоторефрактивных кристаллов KNbO_3 и BaTiO_3 в схеме с зеркалом обратной связи. Малым параметром теории служит амплитуда боковых пучков, нормированная на корень из интенсивности пучков накачки. Поскольку неустойчивость является аperiодической, то на нелинейной стадии развития неустойчивости существенны трехволновые процессы, в которых взаимодействуют световые пучки с поперечными волновыми векторами, образующими углы кратные $\pi/3$. Показано, что это взаимодействие не стабилизирует неустойчивость, а ведет к взрывному росту амплитуд слабых боковых пучков, в результате чего формируются гексагональные структуры. Это можно понять из следующего примера. Предположим, что в результате развития линейной неустойчивости возбуждены три слабых пучка с волновыми векторами $\mathbf{q}_j = (k_0, \mathbf{k}_{\perp j})$, $j = 1, 2, 3$ с равными действительными амплитудами A и поперечными волновыми векторами $\mathbf{k}_{\perp j}$, образующими углы $\pi/3$ между собой. Как следует из теории линейной неустойчивости [12], это одновременно означает, что в системе также возбуждены три пучка с поперечными волновыми векторами $-\mathbf{k}_{\perp j}$ и шесть пучков с $-k_0$: $\mathbf{q} = (-k_0, \pm\mathbf{k}_{\perp 1,2,3})$. Амплитуды всех этих пучков равны A .

Тогда, как будет показано ниже, эволюция $A(t)$ определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \nu_0 A + U A^2, \quad (1)$$

где $\nu_0 = \nu_{k_{0\perp}}$ — инкремент неустойчивости в точке его максимума $|\mathbf{k}_\perp| = k_{0\perp}$, U — матричный элемент трехволнового взаимодействия. Если положить $A|_{t=0} = A_0$, то интегрирование этого уравнения дает

$$A = \frac{A_0 \nu_0}{(\nu_0 + U A_0) e^{-\nu_0 t} - U A_0}, \tag{2}$$

откуда следует, что при условии $A_0 U > 0$ существует такой момент времени $t_{cr} > 0$, когда амплитуда A обращается в бесконечность. Это есть так называемая взрывная неустойчивость, при которой достигается особенность за конечное время. Принципиально, что трехволновые процессы приводят к корреляции возмущений с поперечными волновыми векторами \mathbf{k}_\perp , которые различаются на углы, кратные $\pi/3$. Все такие скоррелированные возмущения образуют гексагон в плоскости поперечных волновых векторов \mathbf{k}_\perp . При этом корреляция между различными гексагонами отсутствует, а взаимодействие между ними мало. Стабилизация неустойчивости, а также подавление других гексагонов с меньшей амплитудой (т.е. тех гексагонов, которые начали расти позже основного) обеспечиваются четырехволновыми и более старшими волновыми процессами. Таким образом, возбуждение гексагонов происходит жестким образом до амплитуды, при которой происходит их стабилизация за счет нелинейностей четвертого и старшего порядков. Жесткое возбуждение гексагонов является аналогом фазового перехода первого рода.

Ниже будет получено общее уравнение, описывающее эволюцию слабых пучков A_k с поперечным волновым вектором \mathbf{k} (здесь и ниже мы опускаем значок \perp) с учетом трех- и четырехволновых взаимодействий:

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = \nu_0 A_k + \frac{1}{2} U \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} A_{k_1} A_{k_2} - \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}} T_{-k k_1 k_2 k_3} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}, \tag{3}$$

где U , $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ — матричные элементы трех- и четырехволнового процессов, взятые на поверхности $|\mathbf{k}| = k_{0\perp}$. Поскольку линейная неустойчивость приводит к росту возмущений в тонком кольце $|\mathbf{k}| \simeq k_{0\perp}$, то при суммировании в (3) достаточно ограничиться поперечными волновыми векторами, модуль которых соответствует максимуму линейного инкремента, $|\mathbf{k}| = k_{0\perp}$. Таким образом, уравнение (3) представляет собой по сути разложение Ландау по амплитудам A_k растущих линейных мод (см., например, [14]).

Отметим, что применимость уравнения (3), т.е. возможность ограничиться рассмотрением трех- и четырехволновых процессов, предполагает малость нелинейности. Для этого, вообще говоря, необходимо, чтобы матричный элемент U имел малость, не связанную с малостью надкритичности. В теории фазовых переходов этому соответствует фазовый переход первого рода, близкий к фазовому переходу второго рода в силу малости скачка параметра порядка. В фоторефрактивных кристаллах матричный элемент U не имеет никакой специальной малости, но матричный элемент $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ приобретает довольно большой численный множитель, что оправдывает существование области применимости уравнения (3) при условии, что суммарный вклад четырехволновых процессов обеспечивает как насыщение взрывной неустойчивости, так и устойчивость стационарных гексагональных решений. Ниже будет найдена область параметров, в которой действительно достигаются такие насыщение и устойчивость, а также проведено сопоставление результатов аналитической четырехволновой теории с численным экспериментом, учитывающим волновые процессы более старших порядков. В результате будет показано, что аналитическая теория качественно правильно описывает процесс формирования гексагонов, однако их стационарные амплитуды отличаются примерно в два раза от полученных путем численного эксперимента. Таким образом, старшие волновые процессы приводят к существенной перенормировке амплитуд гексагонов.

Численные расчеты также показывают, что в той области параметров, где четырехволновая теория заведомо не может обеспечить насыщение взрывной неустойчивости, стабилизация гексагонов достигается при больших амплитудах, т. е. при более сильной нелинейности.

План статьи следующий: в разд. 2 выводятся нелинейные уравнения, описывающие эволюцию боковых пучков в фоторефрактивных средах с зеркалом обратной связи, и формулируется основная краевая задача для решения этих уравнений. В разд. 3 исследуется линейная теория поперечной неустойчивости путем линеаризации краевой задачи. В результате находится пороговое условие неустойчивости, а также собственные векторы прямой и эрмитово-сопряженной линейных краевых задач. В разд. 4 получены выражения для матричного элемента U трехволнового взаимодействия. Принципиально, что этот матричный элемент оказывается отличным от нуля. В разд. 5 выводятся общее амплитудное уравнение (3) и выражение для матричного элемента $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ четырехволнового взаимодействия. Для фоторефрактивных кристаллов типа KNbO_3 и BaTiO_3 матричные элементы U и $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ оказываются чисто действительными. В разд. 6 найдено уравнение, описывающее временную эволюцию интенсивности гексагона, исследована устойчивость гексагонов, что позволяет определить область параметров, в которой четырехволновое взаимодействие достаточно для стабилизации роста гексагона. В разд. 7 численно исследовано образование гексагонов с учетом старших нелинейностей, а также проводится сопоставление теории с экспериментом для фоторефрактивных кристаллов KNbO_3 и BaTiO_3 . В последнем разделе суммированы все полученные результаты.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что в фоторефрактивном кристалле вдоль оси z распространяются световая волна накачки $F_0 \exp[i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)]$ и встречная волна $B_0 \exp[-i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)]$, возникающая из-за отражения от зеркала обратной связи. Здесь $F_0(z)$, $B_0(z)$ — комплексные амплитуды этих волн, медленно меняющиеся вдоль z , k_0 — волновой вектор волн в вакууме, ω_0 — их частота, n_0 — показатель преломления кристалла. Для простоты будем называть обе волны волнами накачки. Расстояние между задней гранью кристалла и зеркалом обратной связи положим равным L , длину кристалла вдоль оси z примем за l , а координату передней грани кристалла — за $z = 0$ (см. также схему экспериментов в [8, 12]). Рассмотрим возмущения пучков накачки в виде слабых боковых волн и представим суммарные амплитуды пучков в виде

$$\begin{aligned}
 F \exp [i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)] &= F_0 \exp [i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)] \left[1 + \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\perp}) F_{\mathbf{k}}(z, t) \right], \\
 B \exp [-i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)] &= B_0 \exp [-i(n_0 k_0 z - \omega_0 t)] \left[1 + \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\perp}) B_{\mathbf{k}}(z, t) \right],
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — поперечный волновой вектор в плоскости xy , r_{\perp} — координата в этой плоскости, $F_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{k}}$ — амплитуды боковых волн, нормированные на амплитуды волн накачки. Предполагается, что поляризация всех волн одинакова, амплитуды боковых волн малы, $|F_{\mathbf{k}}|, |B_{\mathbf{k}}| \ll 1$, кроме того, $|\mathbf{k}| \ll n_0 k_0$, т. е. боковые волны распространяются под малыми углами к пучкам накачки.

Механизм взаимодействия волновых пучков в фоторефрактивных средах состоит в следующем. Под действием света происходит возбуждение носителей тока и кристалл приобретает фотопроводимость, причем модуляция интенсивности света, возникающая в результате интерференции световых пучков, приводит к модуляции фотопроводимости и появлению электрического поля пространственного заряда. Модуляция поля E пространственного заряда приводит к модуляции диэлектрической проницаемости кристалла, $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon$, согласно линейному электрооптическому эффекту: $\delta\epsilon = -n_0^4 r E$, где n_0 — показатель преломления кристалла, r — эффективный электрооптический коэффициент [10, 15]. В частности, если ось z совпадает с кристаллографической осью c кристалла, то $r = r_{13}$. Заметим, что мы ниже учитываем только продольную z -компоненту $E \equiv E_z$ поля пространственного заряда, поскольку остальные компоненты вносят пренебрежимо малый вклад. Таким образом, световые пучки взаимодействуют через дифракцию на наводимых ими модуляциях показателя преломления [10, 15].

В настоящей работе предполагается, что волны взаимодействуют только через образование отражательных решеток показателя преломления, волновой вектор которых близок к $\pm 2n_0 k_0$. Взаимодействие через пропускающие решетки пренебрежимо мало в условиях экспериментов, где наблюдались гексагоны [8, 12]. Поэтому поле $E(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ пространственного заряда можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \exp(2in_0 k_0 z) E_{2k_0} \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp) E_{2k_0, \mathbf{k}} \right) + \exp(-2in_0 k_0 z) E_{-2k_0} \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp) E_{-2k_0, \mathbf{k}} \right), \quad (5)$$

где $E_{\pm 2k_0}(z)$ — амплитуды поля пространственного заряда, обусловленного пучками накачки, $E_{\pm 2k_0, \mathbf{k}}(z, t)$ — амплитуды поля пространственного заряда боковых пучков, нормированные на амплитуду поля пучков накачки и записываемые волнами накачки и боковыми пучками, а также парами слабых боковых волн. Вещественность величины $E(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ приводит к следующим соотношениям между этими амплитудами:

$$E_{-2k_0} = E_{2k_0}^*, \quad E_{-2k_0, -\mathbf{k}} = E_{2k_0, \mathbf{k}}^*.$$

Амплитуды F и B волн зависят от времени на масштабах порядка характерного времени релаксации поля E пространственного заряда, составляющего в фоторефрактивных кристаллах от десятых долей до десятков секунд [10], поэтому в волновом уравнении этими зависимостями можно пренебречь [10, 15]. Уравнения для медленных по z амплитуд F и B принимают с учетом (5) вид

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{i}{2k_0 n_0} \Delta_\perp \right) F = -\frac{ik_0 n_0^3 r}{2} B E_{2k_0} \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} E_{2k_0, \mathbf{k}} \right), \quad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{i}{2k_0 n_0} \Delta_\perp \right) B = \frac{ik_0 n_0^3 r}{2} F E_{-2k_0} \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} E_{-2k_0, \mathbf{k}} \right),$$

где $\Delta_\perp = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

В пренебрежении амплитудами боковых пучков находим из (6), (4) выражения для пучков накачки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F_0 &= -\frac{ik_0 n_0^3 r}{2} B_0 E_{2k_0}, \\ \frac{d}{dz} B_0 &= \frac{ik_0 n_0^3 r}{2} F_0 E_{-2k_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) необходимо дополнить соотношением между полем E пространственного заряда и амплитудами волн. Как уже указывалось, фоторефрактивная нелинейность является очень медленной, поэтому на формирование поля пространственного заряда оказывает влияние только суммарная интенсивность световых пучков, усредненная относительно быстрых осцилляций с частотой ω_0 , т. е. стоячие световые картины, образующиеся в результате интерференции встречных пучков. Представим интенсивность света I , усредненную относительно быстрых осцилляций во времени, в виде

$$I = I_{\Sigma} [I_0 + \exp(2in_0 k_0 z) I_{2k_0} + \exp(-2in_0 k_0 z) I_{-2k_0}], \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{I_{\Sigma}} \left\{ |F_0|^2 \left[1 + \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}r_{\perp}} (F_{\mathbf{k}} + F_{-\mathbf{k}}^*) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)r_{\perp}} F_{\mathbf{k}_1} F_{-\mathbf{k}_2}^* \right] + \right. \\ &+ |B_0|^2 \left. \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}r_{\perp}} (B_{\mathbf{k}} + B_{-\mathbf{k}}^*) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)r_{\perp}} B_{\mathbf{k}_1} B_{-\mathbf{k}_2}^* \right) \right\}, \\ I_{2k_0} &= \frac{F_0 B_0^*}{I_{\Sigma}} \left[1 + \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}r_{\perp}} (F_{\mathbf{k}} + B_{-\mathbf{k}}^*) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)r_{\perp}} F_{\mathbf{k}_1} B_{-\mathbf{k}_2}^* \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$I_{-2k_0} = I_{2k_0}^*$, $I_{\Sigma} = |F_0|^2 + |B_0|^2$ — сумма интенсивностей пучков накачки.

Предположим, что фоторефрактивный кристалл содержит набор донорных и акцепторных уровней в концентрациях N_D и N_A , концентрации ионизованных доноров и электронов в зоне проводимости равны соответственно N_D^+ и n [16]. Компенсирующие акцепторные уровни полностью заполнены электронами и не участвуют ни в каких переходах, причем $N_D > N_A$. Пренебрежем тепловыми переходами электронов с донорных уровней в зону проводимости, тогда заряд акцепторов, $-eN_A$, полностью компенсирует заряд ионизованных доноров в темноте. Пусть имеют место фотопереходы электронов с донорных уровней в зону проводимости с вероятностью $sI(N_D - N_D^+)$, а также захват электронов ионизованными донорами с вероятностью $g_0 N_D^+ n$, где s — сечение фотоионизации, g_0 — коэффициент рекомбинации. Тогда концентрация ионизованных доноров определяется уравнением

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = sI(N_D - N_D^+) - g_0 N_D^+ n, \quad (10)$$

которое необходимо дополнить уравнением Пуассона

$$\operatorname{div} E = 4\pi \frac{e}{\epsilon_{\parallel}} (N_D^+ - N_A - n) \quad (11)$$

и уравнением непрерывности

$$\frac{\partial (N_D^+ - n)}{\partial t} + \frac{1}{e} \operatorname{div} j = 0, \quad (12)$$

где ϵ_{\parallel} — статическая диэлектрическая проницаемость вдоль оси z . Заметим, что в настоящей работе рассматриваются малоугловые возмущения $|\mathbf{k}| \ll n_0 k_0$, поэтому достаточно учитывать только продольную диэлектрическую проницаемость. По этой же причине для поля пространственного заряда достаточно учитывать только продольную компоненту, $E = E_z$. Плотность электрического тока j определяется дрейфом и диффузией электронов:

$$j = e\mu n E + eD\nabla n, \tag{13}$$

где μ — подвижность носителей, $D = \mu k_B T / e$ коэффициент диффузии, T — температура, k_B — постоянная Больцмана. В условиях большинства экспериментов по возбуждению гексагонов в фоторефрактивных кристаллах $N_D, N_D^+, N_A, |N_D - N_A| \gg n$ [10] и, кроме того, характерное время рекомбинации носителей (электронов), $1/g_0 N_A$, заметно меньше характерного времени релаксации поля пространственного заряда, $t_d = \epsilon_{\parallel} g_0 N_A / 4\pi e \mu s I_{\Sigma} (N_D - N_A)$. Поэтому в (10) можно пренебречь производной по времени и выразить n как функцию интенсивности света:

$$n = \frac{sI(N_D - N_A)}{g_0 N_A}. \tag{14}$$

Из (11)–(14) получаем уравнение для поля пространственного заряда [13, 15]:

$$I_{\Sigma} t_d \frac{\partial E}{\partial t} = -\tilde{I} E - E_{sc} \tilde{I}, \tag{15}$$

где тильда означает взятие пространственно-осцилирующей части с волновыми векторами $\pm 2n_0 k_0$, $E_{sc} = 2in_0 k_0 D / \mu$ — характерное фотоиндуцированное электрическое поле, зависящее только от свойств кристалла [15, 17] и обусловленное диффузией фотоэлектронов. Если в кристалле доминирует дырочная проводимость, то это приведет только к изменению коэффициентов t_d и E_{sc} [10].

Из (15), (8), (9) следует выражение для амплитуды отражающей решетки $E_{\pm 2k_0}$ поля пространственного заряда, образуемой пучками накачки:

$$E_{2k_0} = -E_{sc} \frac{F_0 B_0^*}{I_{\Sigma}}, \quad E_{-2k_0} = E_{2k_0}^*. \tag{16}$$

Приведенная выше теория хорошо применима для рассматриваемых в настоящей работе кристаллов KNbO_3 и BaTiO_3 , где доминирует диффузия фотоэлектронов и, согласно (16), пространственная модуляция показателя преломления сдвинута на $\pi/2$ относительно модуляции стоячей световой картины, что соответствует так называемому нелокальному фоторефрактивному отклику [10, 17]. Заметим, что учет приложенного внешнего электрического поля и фотогальванического эффекта не изменит формы уравнения (15), а приведет только к изменению константы E_{sc} [15, 17]. В частности, в кристаллах LiNbO_3 и LiTaO_3 величина E_{sc} почти действительна, поэтому фазового сдвига нет, что соответствует локальному отклику, обусловленному дрейфом электронов во внешнем поле или фотогальваническим эффектом [13, 15]. Поэтому для большей общности ниже считается, что E_{sc} является произвольной комплексной константой.

Будем предполагать, что зеркало обратной связи имеет единичный коэффициент отражения, $R = 1$, а отражение пучков света от граней кристалла пренебрежимо мало, тогда из уравнений (7), (16) получаем

$$F_0(z) = F_0(0)e^{i\gamma z/2}, \quad B_0(z) = B_0(0)e^{-i\gamma^* z/2}, \quad |F_0(z)|^2 = |B_0(z)|^2 = |F_0(0)|^2 e^{-\gamma_i z}, \quad (17)$$

где $\gamma \equiv \gamma_r + i\gamma_i = k_0 n_0^3 r E_{sc} / 2$ — константа связи фоторефрактивного кристалла (ее легко получить из эксперимента при помощи соотношений (17)). Тогда зависимость от z характерного времени релаксации поля пространственного заряда примет вид

$$t_d(z) = t_d(0)e^{\gamma_i z}. \quad (18)$$

Используя (4), (6), (8), (9), (15)–(18), получаем замкнутую систему уравнений для амплитуд слабых пучков. Для последующих вычислений ее удобно представить в матричной форме:

$$J\partial_t \Psi_k = \mathcal{L}\Psi_k + \sum_{k_1+k_2=k} \eta(\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}) + \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \Theta(\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}, \Psi_{k_3}), \quad (19)$$

где

$$\Psi_k = (F_k, F_{-k}^*, B_k, B_{-k}^*, E_{2k_0, k}, E_{-2k_0, k}) \quad (20)$$

— шестимерный вектор,

$$J = e^{\gamma_i z} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

— диагональная матрица 6×6 , а $0, 1$ — соответственно нулевая и единичная матрицы 2×2 . Линейный оператор \mathcal{L} имеет вид

$$\mathcal{L} = -N i \partial_z - K k_d + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma^* & 0 & \gamma^* & 0 & \gamma^* \\ \gamma^* & 0 & -\gamma^* & 0 & 0 & \gamma^* \\ 0 & -\gamma & 0 & \gamma & -\gamma & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & & \\ & \sigma_3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

— диагональные матрицы 6×6 , σ_3 — матрица Паули, $k_d = k^2 / 2k_0 n_0$, а время t было приведено к безразмерному виду путем деления на характерное время релаксации поля E на передней грани кристалла: $t/t_d(0) \rightarrow t$.

Квадратичная нелинейность в (19) представлена в виде вектора η , зависящего от двух аргументов, Ψ_{k_1} и Ψ_{k_2} :

$$\eta(\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} E_{2k_0, k_1} B_{k_2} \\ \frac{\gamma^*}{2} E_{-2k_0, k_1} B_{-k_2}^* \\ \frac{\gamma^*}{2} E_{-2k_0, k_1} F_{k_2} \\ -\frac{\gamma}{2} E_{2k_0, k_1} F_{-k_2}^* \\ -\frac{1}{2} F_{k_1} F_{-k_2}^* - \frac{1}{2} B_{k_1} B_{-k_2}^* + F_{k_1} B_{-k_2}^* - \frac{1}{2} E_{2k_0, k_1} (F_{k_2} + F_{-k_2}^* + B_{k_2} + B_{-k_2}^*) \\ -\frac{1}{2} F_{k_1} F_{-k_2}^* - \frac{1}{2} B_{k_1} B_{-k_2}^* + B_{k_1} F_{-k_2}^* - \frac{1}{2} E_{-2k_0, k_1} (F_{k_2} + F_{-k_2}^* + B_{k_2} + B_{-k_2}^*) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

а вектор кубической нелинейности Θ зависит от трех аргументов:

$$\Theta(\Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}, \Psi_{k_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} E_{2k_0, k_1} (F_{k_2} F_{-k_3}^* + B_{k_2} B_{-k_3}^*) \\ -\frac{1}{2} E_{-2k_0, k_1} (F_{k_2} F_{-k_3}^* + B_{k_2} B_{-k_3}^*) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Система уравнений (19) должна быть дополнена граничными условиями. В частности, на задней грани кристалла боковые пучки B_k приобретают дополнительные фазы за счет отражения пучков F_k от зеркала обратной связи. Чтобы получить этот набег фаз, найдем разность оптических путей двух параллельных лучей 1 и 2, падающих под углом θ' на заднюю грань AC кристалла (см. рис. 1). Оптическая разность хода $\Delta_{1,2}$ будет иметь вид

$$\Delta_{1,2} = l_{AB} + l_{BC} - n_0 l_{CD} + \lambda/2,$$

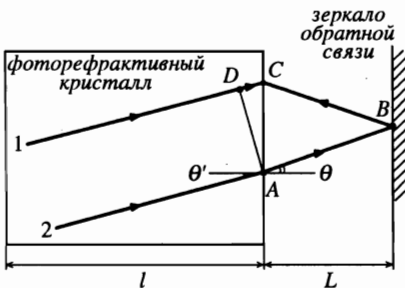


Рис. 1. Отрезок DA перпендикулярен направлению распространения лучей 1 и 2 внутри фоторефрактивного кристалла

где

$$l_{AB} = l_{BC} = L / \cos \theta, \quad l_{CD} = 2L \operatorname{tg} \theta \sin \theta', \quad \sin \theta / \sin \theta' = n_0,$$

L — расстояние между зеркалом обратной связи и задней гранью кристалла, λ — длина волны света в вакууме. Вычитая разность хода пучков накачки $2L + \lambda/2$ из оптической разности хода $\Delta_{1,2}$, получаем искомым набег фаз ϕ (в приближении малых углов $\theta \ll 1$):

$$\phi = 2L(\cos \theta - 1)k_0 \simeq -2k_d n_0 L,$$

а граничные условия для боковых пучков примут вид

$$\begin{aligned} F_k(0) &= F_{-k}^*(0) = 0, \\ B_k(l) &= F_k(l) \exp(-2ik_d n_0 L), \\ B_{-k}^*(l) &= F_{-k}^*(l) \exp(2ik_d n_0 L), \end{aligned} \quad (25)$$

где l — длина кристалла вдоль оси z . Отметим противоположность знаков в показателях экспонент по сравнению с работой [12], что, видимо, объясняется опечаткой, так как последующие выражения в этой работе являются верными.

Таким образом, задача описания эволюции боковых волн сводится к краевой задаче для системы уравнений (19) с граничными условиями (25). Характерная особенность фоторефрактивной нелинейности состоит в независимости правой части уравнения (19) и, следовательно, стационарных решений краевой задачи (19), (25) от интенсивности накачки I_Σ . Интенсивность накачки определяют только общую нормировку световых интенсивностей и характерное время t_d установления стационарных решений.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В качестве первого шага исследуем эволюцию боковых пучков в линейном приближении. Линеаризация системы (19) состоит в отбрасывании нелинейных (по Ψ_k) членов η , Θ . Предполагая, что временная зависимость Ψ_k имеет вид $\Psi_k \propto \exp(\nu_k t)$, получаем линейную краевую задачу на комплексные собственные значения ν_k :

$$\mathcal{L}\Psi_k = \nu_k \mathbf{J}\Psi_k. \quad (26)$$

Решение этой краевой задачи в общем случае представляет значительные трудности, так как (26) — это система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (зависящих от координаты z) с переменными коэффициентами. Линейную краевую задачу удастся решить в двух частных случаях, когда эта система сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Первый — это случай действительной константы связи $\gamma = \gamma_r$ (среда с локальным фоторефрактивным откликом). Тогда $|F_0(z)|^2 = |B_0(z)|^2 = \text{const}$. Этот случай исследован в работе [13] при дополнительном условии $\operatorname{Re} \nu_k = 0$, т. е. найден порог неустойчивости. В то же время константу связи можно приближенно считать действительной только в фоторефрактивных кристаллах типа LiNbO_3 , LiTaO_3 , где до сих пор не удалось наблюдать в эксперименте образование гексагонов. Рассматриваемые в настоящей работе кристаллы KNbO_3 , BaTiO_3 имеют существенно комплексную константу связи $\gamma \simeq i\gamma_i$ [10, 15]

(нелокальный фоторефрактивный отклик). Во втором случае константа связи γ — произвольная комплексная величина, однако предполагается, что коэффициент отражения от зеркала обратной связи в точности равен единице, $R = 1$ (отражением от граней кристалла по прежнему пренебрегаем), вследствие чего $|F_0(z)|^2 = |B_0(z)|^2$. Также необходимо считать, что $\nu_k = 0$. Это означает, что краевая задача решается на пороге неустойчивости, $\text{Re } \nu_k = 0$, причем эта неустойчивость является аperiodической, $\text{Im } \nu_k = 0$, т. е. частотные расстройки между пучками накачки и боковыми пучками равны нулю. Если бы имелась расстройка $\text{Im } \nu_k \neq 0$, то в эксперименте наблюдались бы бегущие световые картины. Но в экспериментах [8, 12] световые картины были неподвижны, поэтому предположение $\text{Im } \nu_k = 0$ выглядит вполне оправданным. Краевая задача с $R = 1, \nu_k = 0$ была решена в [12]. Система (26) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + ik_d\right) F_k &= -\frac{i\gamma}{4}(F_k + F_{-k}^* - B_k - B_{-k}^*), \\ \left(\frac{d}{dz} - ik_d\right) F_{-k}^* &= \frac{i\gamma^*}{4}(F_k + F_{-k}^* - B_k - B_{-k}^*), \\ \left(\frac{d}{dz} - ik_d\right) B_k &= -\frac{i\gamma^*}{4}(F_k + F_{-k}^* - B_k - B_{-k}^*), \\ \left(\frac{d}{dz} + ik_d\right) B_{-k}^* &= \frac{i\gamma}{4}(F_k + F_{-k}^* - B_k - B_{-k}^*), \\ E_{2k_0,k} &= \frac{1}{2}(F_k - F_{-k}^* - B_k + B_{-k}^*), \\ E_{-2k_0,k} &= -\frac{1}{2}(F_k - F_{-k}^* - B_k + B_{-k}^*), \end{aligned} \tag{27}$$

где в первых четырех уравнениях амплитуды поля пространственного заряда были исключены с помощью последних двух уравнений системы. Решение системы (27) совместно с граничными условиями (25) приводит к пороговому условию возникновения неустойчивости, в точности совпадающему с результатом работы [12]:

$$\begin{aligned} \cos(wl) \cos(k_d l) + \frac{\gamma_i}{2w} \sin(wl) \cos[k_d(l + 2n_0L)] + \frac{\gamma_r + 2k_d}{2w} \sin(wl) \sin(k_d l) - \\ - \frac{\gamma_r}{2w} \sin(wl) \sin[k_d(l + 2n_0L)] = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где $w = \sqrt{k_d^2 + \gamma_r k_d - \gamma_i^2/4}$. Как уже отмечалось, в кристаллах $\text{KNbO}_3, \text{BaTiO}_3$ константа связи γ с высокой точностью чисто мнимая, поэтому ниже будем полагать $\gamma = i\gamma_i$, тогда из (28) получаем пороговую зависимость $\gamma_i(k_d l)$ для каждого значения расстояния до зеркала обратной связи L . Эта зависимость представляет собой последовательность минимумов. На рис. 2 приводятся частные случаи пороговых кривых $\gamma_i(k_d l)$ для $L = 0$ и $n_0L/l = 4.44$, причем во втором случае зависимость $\gamma_i l$ от $k_d l$ настолько резкая, что на графике отображены только части пороговых кривых вблизи минимумов. Область неустойчивости лежит выше пороговой кривой $\gamma_i(k_d l)$. При изменении L положение минимумов меняется, однако их число и взаимное расположение остаются неизменными, что позволят нумеровать их в порядке возрастания $k_d l$ как 1, 2, 3, ... и т. д. Ниже целое положительное число m будет обозначать номер минимума. При $n_0L/l < 1.43 \dots$

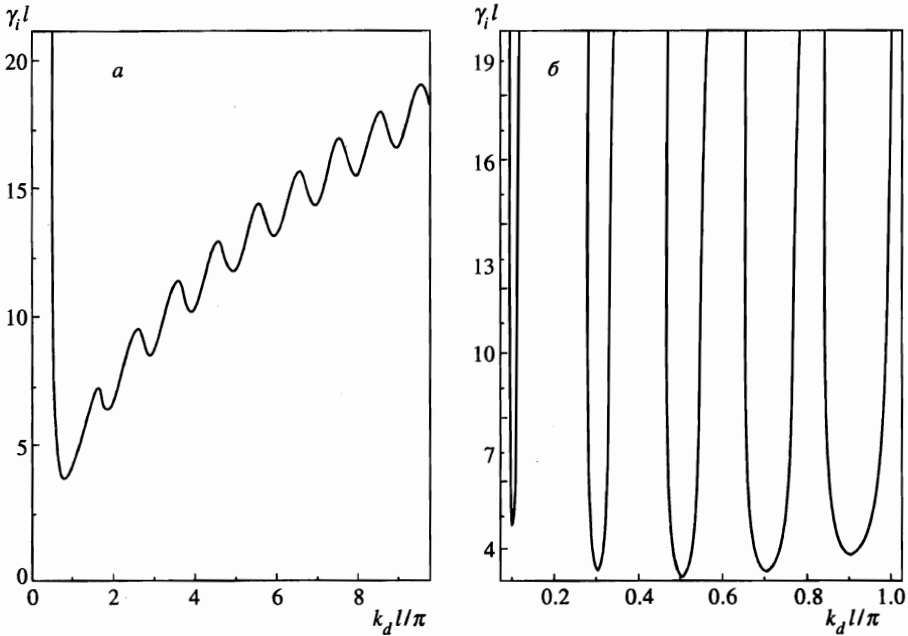


Рис. 2. Пороговая зависимость $\gamma_i l$ от $k_d l$ при $L = 0$ (а) и $n_0 L / l = 4.44$ (б)

первый минимум $m = 1$ является самым глубоким, при дальнейшем возрастании L последовательно наиболее глубокими оказываются второй, третий и т. д. минимумы. На рис. 3 приведены зависимости $\gamma_i^{min} l$ и $k_d^{min} l$, соответствующие этим минимумам как функции L . Имеется единственный набор значений параметра L , при котором $\gamma_i^{min} l$ и $k_d^{min} l$ могут быть найдены аналитически, а именно,

$$n_0 L / l = -3/2 + 2m, \quad \gamma_i^{min} l = \pi, \quad k_d^{min} l = \pi/2, \tag{29}$$

причем, как видно из рис. 3а, при этих значениях L достигается минимум $\gamma_i^{min} l = \pi$ как функции L . Важно отметить, что при $n_0 L / l \gtrsim -3/2 + 2m$ положение m -го минимума с высокой точностью определяется соотношением

$$k_d(l + 2n_0 L) = (2m - 1)\pi \tag{30}$$

(при условиях (29) получаем тождество). Предельный случай этого соотношения при $2n_0 L / l \gg 1$, $m = 1$ наблюдался в эксперименте [8]. Фактически условие (30) означает, что мы выбираем такой набег фаз в (25) между боковыми пучками, распространяющимися в противоположных направлениях вдоль оси z , при котором эти пучки взаимодействуют наиболее эффективно. Чтобы понять физический смысл соотношения (30), исследуем зависимость амплитуды поля пространственного заряда, $E_{2k_0, k}$, от координаты z . Из (27) и (25) находим

$$\begin{aligned} F_k + B_{-k}^* &= \exp[-ik_d(z - l)] [F_k(l) + \exp(2ik_d n_0 L) F_{-k}^*(l)], \\ F_{-k}^* + B_k &= \exp[ik_d(z - l)] [\exp(-2ik_d n_0 L) F_k(l) + F_{-k}^*(l)]. \end{aligned} \tag{31}$$

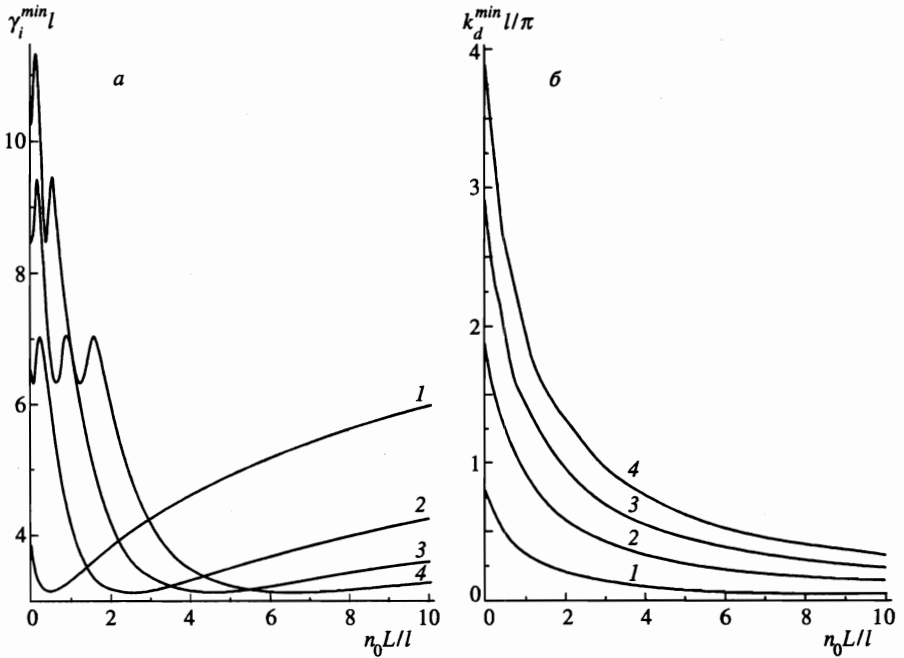


Рис. 3. Зависимости $\gamma_i^{min} l$ (а) и $k_d^{min} l / \pi$ (б) от безразмерного расстояния до зеркала обратной связи $n_0 L / l$

Тогда из (27) следует

$$E_{2k_0,k} = i \sin [k_d(l - z + n_0L)] [\exp(-ik_d n_0L) F_k(l) + \exp(ik_d n_0L) F_{-k}^*(l)]. \quad (32)$$

Из физических соображений можно ожидать, что наименьшему порогу неустойчивости соответствует наиболее эффективное взаимодействие боковых пучков через образование поля пространственного заряда $E_{2k_0,k}$. Согласно (32), амплитуда этого поля является синусоидой, и поэтому в среднем модуль амплитуды поля будет максимален на протяжении кристалла в том случае, если вершина синусоиды будет находиться в центре кристалла $z = l/2$, откуда получаем $k_d(l/2 + n_0L) = (m - 1/2)\pi$, где m — целое, что в точности совпадает с (30). Численные расчеты действительно подтверждают, что при условии $n_0L/l \gtrsim -3/2 + 2m$ максимум амплитуды $E_{2k_0,k}$ с хорошей точностью совпадает с центром кристалла, а при удалении от минимума порога $k_d = k_d^{min}$ максимум этой амплитуды удаляется от центра кристалла. Тем не менее приведенное выше физическое обоснование является скорее качественным, так как помимо взаимодействия боковых пучков через поле $E_{2k_0,k}$ имеется также вклад, связанный с дифракцией боковых пучков на поле пространственного заряда пучков накачки E_{2k_0} , что видно из линейной части системы (19). Этот вклад не допускает простой интерпретации, однако успех в объяснении соотношения (30) позволяет надеяться на верность физического обоснования.

Пусть теперь γ_i немного превышает порог: $0 < h = (\gamma_i - \gamma_i^{min}) / \gamma_i^{min} \ll 1$, где γ_i^{min} соответствует наиболее глубокому минимуму при данном значении L . Вблизи порога инкремент неустойчивости может быть записан в виде

$$\nu_k = \nu_0 - (k_d - k_d^{min})^2 f,$$

где ν_0 — максимум инкремента неустойчивости, $|k_d - k_d^{min}|/k_d^{min} \ll 1$, $f > 0$ — константа. Так как решить линейную краевую задачу при $\nu_k \neq 0$ не удастся, то значения ν_0 и f остаются неизвестными. Однако, как будет ясно из дальнейшего, сами эти значения не важны для существования взрывной трехволновой неустойчивости. Кроме того, ν_0 дает поправку к амплитудам образующихся гексагонов, однако вблизи порога $\nu_0 \rightarrow 0$ эта поправка пренебрежимо мала. Поскольку значение ν_0 положительно выше точки порога, то в линейном приближении амплитуды F_k и B_k будут экспоненциально расти во времени до тех пор, пока не станут существенны трехволновые нелинейности. При малой надкритичности h инкремент неустойчивости положителен только в узком кольце $|k| \simeq \sqrt{2k_d^{min}k_0n_0}$, боковые волны возбуждаются в этом кольце и модуль их поперечного волнового вектора $|k|$ можно считать практически постоянным.

Помимо порогового условия (28) линейная краевая задача (27), (25) позволяет найти собственный шестимерный вектор (20) $\psi_k^{(0)}$ этой задачи на пороге неустойчивости, где верхний нулевой индекс означает, что все величины вычислены в пороговой точке, а использование вместо заглавного символа Ψ_k строчного символа ψ_k подчеркивает, что первый является решением нелинейной краевой задачи, а последний — только ее линейной части.

Кратко опишем процедуру нахождения $\psi_k^{(0)}$: общее решение системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (27) представляем в виде суммы четырех независимых решений с произвольными коэффициентами $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$. Значения этих коэффициентов определяются из граничных условий (25), которые сводятся к однородной системе линейных уравнений для \mathbf{c} . Условие разрешимости этой системы состоит в равенстве нулю детерминанта, что приводит к пороговому условию (28), откуда находим решение с однородной системы линейных уравнений, определенное с точностью до произвольного множителя. Поэтому и собственный вектор $\psi_k^{(0)}$ определен с точностью до произвольного множителя. В частности, при $n_0L/l = -3/2 + 2m$, $\gamma_i^{min}l = \pi$, $k_d^{min}l = \pi/2$ получаем

$$\psi_k^{(0)} = \begin{pmatrix} -i \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \exp \left(\frac{3}{4} i \pi \right) \exp \left(\frac{\pi z}{2l} \right) \\ i \exp \left[\frac{i}{2} \pi \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \exp \left(-\frac{3}{4} i \pi \right) \exp \left(\frac{\pi z}{2l} \right) \\ i \exp \left[\frac{i}{2} \pi \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \exp \left(\frac{1}{4} i \pi \right) \exp \left(\frac{\pi z}{2l} \right) \\ -i \exp \left[-\frac{i}{2} \pi \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \exp \left(-\frac{1}{4} i \pi \right) \exp \left(\frac{\pi z}{2l} \right) \\ -i 2 \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ i 2 \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (33)$$

При произвольных значениях L явный вид этого вектора весьма громоздок и мы не будем приводить его. Заметим только, что при каждом конкретном значении параметров $\gamma_i^{min}l$, $k_d^{min}l$, L собственный вектор $\psi_k^{(0)}$ находился при помощи пакета Mathematica 2.2.

Для исследования трех- и четырехволнового взаимодействия необходимо также решить линейную краевую задачу, эрмитово-сопряженную относительно скалярного про-

изведения

$$\langle \psi_k^c | \psi_k \rangle = \int_0^l dz (\psi_k^c)^* \psi_k^i \tag{34}$$

к линейной части краевой задачи (19), (25), где по повторяющемуся индексу i ведется суммирование от 1 до 6, а ψ_k^c — собственный вектор этой эрмитово-сопряженной задачи, удовлетворяющий на пороге неустойчивости системе уравнений для эрмитово-сопряженного к (22) оператора $\mathcal{L}^+ \equiv (\mathcal{L}^T)^*$:

$$\mathcal{L}^+ \psi_k^c = 0, \tag{35}$$

с краевыми условиями для компонент вектора ψ_k^c :

$$\begin{aligned} B_k^c(0) &= B_{-k}^{c*}(0) = 0, \\ B_k^c(l) &= -F_k^c(l) \exp(-2ik_d n_0 L), \\ B_{-k}^{c*}(l) &= -F_{-k}^{c*}(l) \exp(2ik_d n_0 L), \end{aligned} \tag{36}$$

получающимися при интегрировании по частям эрмитова оператора id/dz .

Эрмитово-сопряженная краевая задача (35), (36) решается аналогично краевой задаче (27), (25). Пороговое условие для эрмитово-сопряженной задачи совпадает с пороговым условием (28) для прямой задачи. Приведем вид собственного вектора сопряженной задачи при $n_0 L/l = -3/2 + 2m$, $\gamma_i^{min} l = \pi$, $k_d^{min} l = \pi/2$:

$$\psi_k^{c(0)} = \begin{pmatrix} \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] + \exp\left(i\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2l}\right) \\ \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] + \exp\left(-i\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2l}\right) \\ \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] + \exp\left(i\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi z}{2l}\right) \\ \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] + \exp\left(-i\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi z}{2l}\right) \\ i\pi \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] \\ i\pi \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \tag{37}$$

4. ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БОКОВЫХ ВОЛН

При изучении трех- и четырехволновых взаимодействий будем следовать некоторым идеям работ [18, 19], посвященных образованию гексагональных ячеек на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле и при слабонадкритической конвекции соответственно.

Разложим общее решение Ψ_k нелинейной краевой задачи (19), (25) в кольце $|\mathbf{k}| \simeq \sqrt{2k_d^{min} k_0 n_0}$ по собственным векторам $\psi_{k,n}$ линейной краевой задачи (27), (25):

$$\Psi_k = \sum_n \psi_{k,n} A_{k,n}(t), \quad A_{-k} = A_k^*, \tag{38}$$

где индекс n означает номер собственной моды линейной задачи при данном значении волнового вектора k .

Подстановка этого выражения в нелинейную систему (19) и скалярное умножение (34) этой системы на собственный вектор ψ_k^c сопряженной линейной задачи приводит с точностью до квадратичных нелинейностей к уравнению

$$\frac{\partial A_{k,n}}{\partial t} = \nu_{k,n} A_{k,n} + \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} \sum_{k_1 + k_2 = k} U_{k_1, k_2, k}^{n_1, n_2, n} A_{k_1, n_1} A_{k_2, n_2}, \tag{39}$$

где $U_{k_1, k_2, k}^{n_1, n_2, n}$ — матричный элемент трехволнового взаимодействия.

Поскольку при малой надкритичности, $0 < h = (\gamma_i - \gamma_i^{min}) / \gamma_i^{min} \ll 1$, возбуждаются боковые волны в узком кольце $|k| \simeq \sqrt{2k_d^{min} k_0 n_0}$, соответствующие моде с максимальным инкрементом и индексом $n = 0$, а остальные моды имеют отрицательный инкремент, то при нахождении матричного элемента достаточно ограничиться его вычислением на пороге неустойчивости $k_d = k_d^{min}$, $\gamma = i\gamma_i^{min}$, $\psi_{k,n} = \psi_k^{(0)}$, $\psi_{k,n}^c = \psi_k^{c(0)}$, когда $n = 0$. Поэтому ниже будем опускать индекс n . Кроме того, из условия $k_1 + k_2 = k$ следует, что в трехволновом взаимодействии участвуют только векторы, образующие углы $\pi/3$ между собой.

В результате из (19) получаем

$$U_{k_1, k_2, k} \equiv U = 2 \frac{\langle \psi_k^c | \eta_0 \rangle}{\langle \psi_k^c | \mathbf{J} \psi_k \rangle}, \tag{40}$$

где \mathbf{J} и η определены в (21) и (23), нулевой индекс у η_0 означает, что аргументы берутся на пороге неустойчивости, $\eta_0 = \eta(\psi_k^{(0)}, \psi_k^{(0)})$, а уравнение (39) сводится к (3).

Матричный элемент U при каждом конкретном значении параметров $\gamma_i^{min} l$, $k_d^{min} l$, L находился при помощи пакета Mathematica 2.2. На первом шаге вычислялись собственные векторы $\psi_k^{(0)}$, $\psi_k^{c(0)}$ прямой и сопряженной линейных задач, а затем значение U получалось интегрированием в (40). В частных случаях $n_0 L / l = -3/2 + 2m$, $\gamma_i^{min} l = \pi$, $k_d^{min} l = \pi/2$ из (33), (37) следует аналитическое выражение для матричного элемента:

$$U = -\frac{2\sqrt{2}}{5} \frac{1 + 2e^\pi}{\text{ch}(\pi/2)}. \tag{41}$$

На рис. 4 приведена зависимость матричного элемента U трехволнового взаимодействия на пороге неустойчивости от расстояния L между задней гранью кристалла и зеркалом обратной связи (для первого минимума $m = 1$ пороговой кривой $\gamma_i^{min}(L)$), вычисленная по формулам (40), (23), где функции $\gamma_i^{min}(L)$ и $k_d^{min}(L)$ даны на рис. 3. При этом мы полагаем, что константа связи γ чисто мнимая, как это имеет место с высокой точностью для KNbO_3 и BaTiO_3 . Для исследования взрывной неустойчивости весьма существен тот факт, что U оказывается чисто действительной величиной.

5. ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БОКОВЫХ ВОЛН

Насыщение взрывной трехволновой неустойчивости может наступить за счет нелинейностей четвертого и более старших порядков. Назовем основной пространственной гармоникой световые пучки с волновыми векторами, лежащими в узком кольце

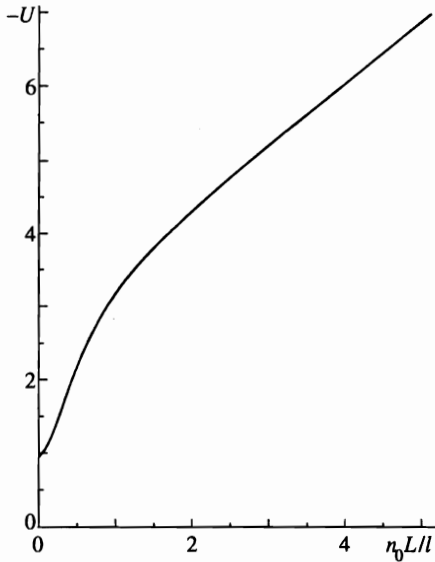


Рис. 4. Зависимость матричного элемента U трехволнового взаимодействия от $n_0 L / l$

вблизи порога неустойчивости: $|\mathbf{k}| \simeq \sqrt{2k_d^{min} k_0 n_0} \equiv k_{0\perp}$. Квадратичные нелинейности основной системы уравнений (19), представленные вектором η (23), приводят к появлению всевозможных комбинационных гармоник за счет трехволновых взаимодействий $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $|\mathbf{k}_{1,2}| = k_{0\perp}$.

Уравнения для комбинационных гармоник $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $|\mathbf{k}_{1,2}| = k_{0\perp}$ следуют из (19), (25), где $k_d = k^2 / 2k_0 n_0$, суммирование в квадратичных нелинейностях проводится по основным гармоникам на пороге неустойчивости $\psi_k = \psi_k^{(0)}$, а производными по времени и кубическими нелинейностями пренебрегаем, так как они дают поправки старшего порядка малости (пятого и старше). Таким образом, при заданных амплитудах основных гармоник краевая задача для комбинационных гармоник сводится к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с неоднородной частью, определяемой амплитудами основных гармоник. Граничные условия для этой системы по-прежнему даются уравнениями (25). Решение этой системы не представляет никаких принципиальных трудностей, однако явные выражения для комбинационных гармоник здесь не приводятся из-за их чрезвычайной громоздкости. Важно отметить, что эти гармоники имеют второй порядок малости по амплитудам боковых пучков, и поэтому они вносят вклад в четырехволновые процессы через взаимодействие с основной гармоникой. Кроме того, в четырехволновое взаимодействие вносят вклад собственно процессы $2 \rightarrow 2$ взаимодействия основных пространственных гармоник, возникающие за счет кубических нелинейностей в пятом и шестом уравнениях системы (19).

Таким образом, общее решение Ψ_k^{tot} нелинейной краевой задачи (19), (25) может быть представлено в виде

$$\Psi_k^{tot} = \Psi_k + \delta\Psi_k, \tag{42}$$

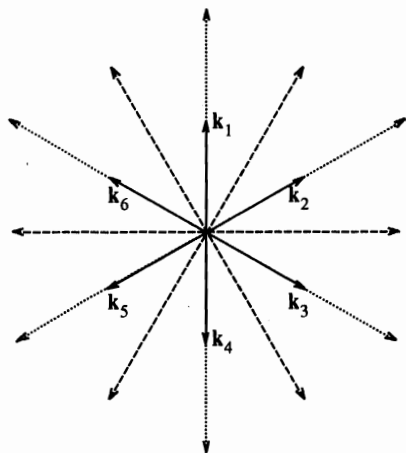


Рис. 5. Шесть векторов, обозначенных сплошными линиями, представляют основные гармоники. Концы этих векторов образуют основной гексагон. Пунктирные линии обозначают вторые гармоники, а штриховые линии — гармоники $\sqrt{3}$. Вторые гармоники образуют вершины вторичного гексагона, а гармоники $\sqrt{3}$ — центры его граней

где Ψ_k — разложение (38) по основным гармоникам, а

$$\delta\Psi_k = \sum_{k_1+k_2=k} A_{k_1} A_{k_2} \delta\Psi_k$$

является разложением по комбинационным гармоникам, причем векторы k_1 и k_2 лежат на пороге неустойчивости $|k_1| = |k_2| = k_{0\perp}$.

Подстановка (42), (43) в нелинейную систему (19) и скалярное умножение (34) этой системы на вектор ψ_k^c сопряженной линейной задачи (27) приводит с точностью до кубических нелинейностей к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} = & \nu_k A_k + \frac{U}{2} \sum_{k_1+k_2=k} A_{k_1} A_{k_2} - \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left\{ \left[-\langle \psi_k^{c(0)} | \eta(\psi_{k_1}^{(0)}, \delta\Psi_{k_2+k_3}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \eta(\delta\Psi_{k_2+k_3}, \psi_{k_1}^{(0)}) \rangle - \langle \psi_k^{c(0)} | \Theta(\psi_{k_1}^{(0)}, \psi_{k_2}^{(0)}, \psi_{k_3}^{(0)}) \rangle \right] / \langle \psi_k^{c(0)} | J\psi_k^{(0)} \rangle \right\} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}, \end{aligned} \quad (43)$$

где J, η определены в (21), (23), а суммирование проводится по основным гармоникам. Таким образом, получено уравнение (3), где матричный элемент четырехволнового взаимодействия $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ находится в результате симметризации выражения в фигурных скобках в (43). Матричный элемент $T_{-k k_1 k_2 k_3}$ зависит только от углов между векторами k, k_1, k_2, k_3 , поэтому будем обозначать этот матричный элемент как T_ϕ , где ϕ — угол между векторами k_1 и k_2 .

В частном случае, когда возбуждены только шесть основных гармоник с волновыми векторами $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$, формирующими гексагон (рис. 5), получаем три типа комбинационных гармоник: нулевую, $|k| \simeq 0$; вторую, $|k| \simeq 2k_{0\perp}$ и гармонику типа «корень из трех», $|k| \simeq \sqrt{3}k_{0\perp}$. Эти комбинационные гармоники образуются в результате взаимодействия пар основных гармоник под углами соответственно $\pi, 0, \pi/3$. На рис. 5 вторые гармоники обозначены пунктирными линиями, а гармоники $\sqrt{3}$ — штриховыми. Нулевая гармоника представляет собой перенормировку пучков накачки, а вторая и гармоника $\sqrt{3}$ образуют соответственно вершины и центры граней вторичного гексагона, что хорошо видно как на рис. 5, так и в эксперименте (см., например, рис. 2 в [8]). Взаимодействие через вторую гармонику дает вклад в матричный элемент

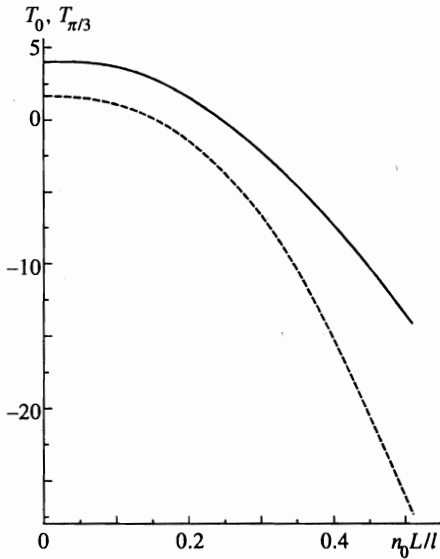


Рис. 6. Зависимость матричных элементов $T_0, T_{\pi/3}$ четырехволнового взаимодействия от $n_0 L / l$: сплошная кривая — T_0 ; штриховая — $T_{\pi/3}$

T_0 , через гармонику $\sqrt{3}$ — в $T_{\pi/3}$, а через нулевую гармонику — как в T_0 , так и в $T_{\pi/3}$. Процесс $2 \rightarrow 2$ также дает вклад как в T_0 , так и в $T_{\pi/3}$.

Обозначим амплитуды шести основных гармоник $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5, \mathbf{k}_6$ как $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, причем, согласно (38), только три амплитуды являются независимыми: $A_4 = A_1^*, A_5 = A_2^*, A_6 = A_3^*$, так как $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_5 = -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_6 = -\mathbf{k}_3$. Тогда уравнение (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} &= \nu_0 A_1 + U A_3^* A_5^* - \left[\frac{T_0}{2} |A_1|^2 + T_{\pi/3} (|A_3|^2 + |A_5|^2) \right] A_1, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} &= \nu_0 A_3 + U A_1^* A_5^* - \left[\frac{T_0}{2} |A_3|^2 + T_{\pi/3} (|A_1|^2 + |A_5|^2) \right] A_3, \\ \frac{\partial A_5}{\partial t} &= \nu_0 A_5 + U A_1^* A_3^* - \left[\frac{T_0}{2} |A_5|^2 + T_{\pi/3} (|A_1|^2 + |A_3|^2) \right] A_5. \end{aligned} \tag{44}$$

Таким образом, исходная краевая задача (19), (25) редуцирована к системе трех амплитудных уравнений.

Матричные элементы $T_0, T_{\pi/3}$ при каждом конкретном значении параметров $\gamma_i^{min} l, k_d^{min} l, L$ находились при помощи пакета Mathematica 2.2 аналогично тому, как это описано в предыдущем разделе для трехволновых взаимодействий. На рис. 6 приведены зависимости этих матричных элементов от расстояния L между задней гранью кристалла и зеркалом обратной связи (для первого минимума $m = 1$ пороговой кривой $\gamma_i^{min}(L)$), вычисленные по формулам (23), (43), где $\gamma_i^{min}(L), k_d^{min}(L)$ даны на рис. 3. Так же как и U , все эти матричные элементы оказываются чисто действительными величинами.

6. ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ ГЕКСАГОНОВ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

В предыдущем разделе задача описания эволюции гексагонов была сведена к решению системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (44). В пренебрежении кубическими нелинейностями эта система приводит к взрывной неустойчивости. При равных и действительных амплитудах $A_1 = A_3 = A_5 = \text{Re } A_1$ получаем частный случай (1), которому соответствует решение (2), обращающееся в бесконечность за конечное время. В общем случае решение системы (44) (без кубических нелинейностей) выражается через эллиптические функции, и при произвольных начальных условиях (за исключением множества меры нуль) также возникает сингулярность за конечное время, причем можно показать, что при этом относительные отклонения $(|A_1|^2 - |A_2|^2)/|A_1|^2$, $(|A_2|^2 - |A_3|^2)/|A_2|^2$ стремятся к нулю, суммарная фаза $\Phi = \text{Arg } A_1 + \text{Arg } A_3 + \text{Arg } A_5$ стремится к πn , где n — целое число, а каждая из фаз по отдельности стремится к некоторой константе. Поэтому на поздних стадиях эволюции система (44) сводится к уравнению для интенсивности $I^2 = |A_1|^2 = |A_2|^2 = |A_3|^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial t} = \nu_0 I + U I^{3/2} - \left(\frac{T_0}{2} + 2T_{\pi/3} \right) I^2, \quad (45)$$

решения которого могут непосредственно сравниваться с экспериментом при малых надкритичностях, когда $\nu_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, физическую картину образования гексагона можно представить следующим образом. Вследствие какой-либо флуктуации среды в начальный момент времени амплитуда A_1 оказывается отличной от нуля при некотором значении волнового вектора \mathbf{k} , лежащего на кольце $|\mathbf{k}| \simeq \sqrt{2k_d^{\text{min}} k_0 n_0}$. Линейная неустойчивость приведет к росту $|A_1|$ то тех пор, пока не станут существенны нелинейные члены в (44), в результате чего начнется одновременный взрывной рост амплитуд A_1, A_3, A_5 , т.е. окажутся возбуждены боковые пучки с векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5, \mathbf{k}_6$, образующими гексагон (см. рис. 5). Взрывной рост амплитуд вследствие трехволнового взаимодействия будет продолжаться до тех пор, пока не вступят в игру четырехволновые нелинейности. Если при этом окажется, что параметры системы $\gamma_i^{\text{min}} l, k_d^{\text{min}} l, n_0 L/l$ таковы, что суммарный матричный элемент $T_0/2 + 2T_{\pi/3}$ положителен, то четырехволновые нелинейности могут стабилизировать неустойчивость, в противном случае рост интенсивности боковых пучков продолжится и стабилизация наступит только за счет нелинейностей более старших порядков. Ниже будет исследована устойчивость стационарных гексагонных решений.

В эксперименте хорошо видно [6, 8], что первоначально действительно возбуждаются две боковые волны с противоположными знаками поперечных волновых векторов, которые как раз и соответствуют начальному росту амплитуды A_1 собственной моды $\psi_{\mathbf{k}}$ (38), поскольку эта мода состоит из боковых волн с поперечными волновыми векторами $\pm \mathbf{k}$ (20). Далее наблюдается быстрый рост гексагона, причем интенсивности всех боковых пучков сравниваются [8]. В этой же работе измерялась временная зависимость интенсивности боковых пучков. Из рис. 3 статьи [8] видно, что за коротким начальным этапом экспоненциального роста интенсивности следует степенной рост интенсивности, характерный для взрывной нелинейности, после чего наступает стабилизация интенсивности за счет старших нелинейностей. Эта стабилизация проявляется в формировании вторичного гексагона с малой интенсивностью (см. рис. 2 в [8]), образуемого второй гармоникой и гармоникой $\sqrt{3}$.

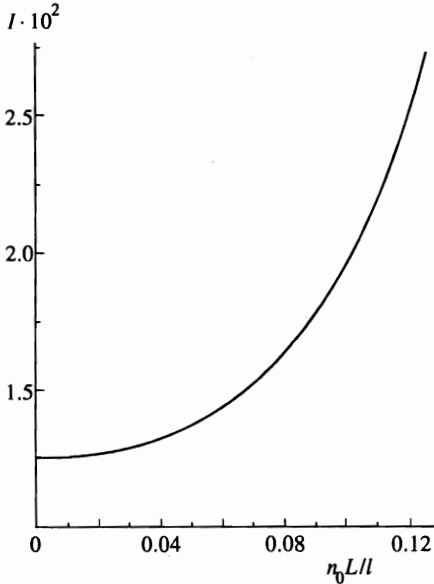


Рис. 7. Зависимость интенсивности I основного гексагона на передней грани фоторефрактивного кристалла $z = 0$ от $n_0 L / l$, следующая из теории четырехволнового взаимодействия, в области применимости этой теории. Интенсивность гексагона нормирована на интенсивность накачки на передней грани кристалла

Стационарное решение (гексагон) уравнения (44) имеет вид

$$A_0 = \frac{U}{4T_{\pi/3} + T_0} + \text{sign } U \sqrt{\frac{2\nu_0}{4T_{\pi/3} + T_0} + \left(\frac{U}{4T_{\pi/3} + T_0}\right)^2}, \tag{46}$$

где $A_0 = A_1 = A_2 = A_3$. Это решение характеризуется жестким режимом возбуждения с величиной скачка амплитуды на пороге (при $\nu_0 = 0$):

$$A_0 = \frac{2U}{4T_{\pi/3} + T_0}.$$

Исследование внутренней устойчивости стационарного решения (46) проводится совершенно аналогично работе [19]. Это решение устойчиво при условии

$$-\frac{1}{2} \frac{U^2}{T_0 + 4T_{\pi/3}} < \nu_0 < 4 \frac{T_0 + T_{\pi/3}}{(2T_{\pi/3} - T_0)^2} U^2. \tag{47}$$

Вблизи порога неустойчивости, когда $\nu_0 \rightarrow 0$, это означает, что $T_0 + T_{\pi/3} > 0$. На рис. 7 приводится зависимость интенсивности гексагона $I = A_0^2$ от $n_0 L / l$ в той области параметра L , где условие устойчивости (47) выполнено. Вне этой области стабилизация взрывного роста гексагонов может быть обеспечена только за счет волновых процессов более старших порядков.

7. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численный эксперимент был поставлен с целью проверки результатов приведенной выше аналитической теории образования гексагонов и с целью исследования области

больших значений $n_0 L/l \gtrsim 0.1$, где насыщение взрывной неустойчивости обеспечивается старшими (пятиволновыми и выше) волновыми процессами. Для этого краевая задача (19), (25) решалась численно с учетом большего, чем в предыдущем разделе, числа комбинационных гармоник. Чтобы оценить число старших гармоник и, соответственно, порядок волновых процессов, которые необходимо принимать во внимание, чтобы заведомо обеспечить насыщение взрывной неустойчивости, воспользуемся интегралом краевой задачи (19), (25):

$$H = \sum_k (|F_k|^2 - |B_k|^2) + [F_k + F_k^* - B_k - B_k^*]_{|k=0} = 0, \quad (48)$$

где суммирование ведется по всем гармоникам. Этот интеграл равен нулю при всех z и всех временах t . Его физический смысл заключается в сохранении энергии светового поля, поскольку диссипация световой энергии в фоторефрактивном кристалле мала, и мы нигде ее не учитывали при выводе системы (19), (25). В частности, при $z = 0$ (т. е. на передней грани кристалла) условие $H = 0$ означает, что оптическая мощность пучка накачки, падающего на кристалл, равна суммарной оптической мощности пучков, выходящих из кристалла через переднюю грань (напомним, что мы пренебрегли отражением от граней и положили коэффициент отражения зеркала обратной связи равным единице). Согласно краевому условию (25) имеем $F_k|_{z=0} = 0$ при всех k , поэтому из (48) следует, что при образовании боковых пучков происходит истощение накачки, которое выражается в росте нулевых гармоник $F_k|_{k=0}$, $B_k|_{k=0}$, представляющих собой перенормировку пучков накачки. Таким образом, в сильно нелинейной теории надо, как минимум, учитывать все процессы, в которых нулевые гармоники взаимодействуют сами с собой. Нетрудно понять, что такие процессы дадут вклад вплоть до восьмого порядка в уравнение для основной гармоники. Поэтому в численном эксперименте учитывались все процессы вплоть до восьмиволновых включительно. В этом случае необходимо учитывать помимо указанных выше гармоник $0, 1, 2, \sqrt{3}$ также гармоники $\sqrt{7}, 3, \sqrt{12}, \sqrt{13}, 4$. (Концы волновых векторов гармоник $3, \sqrt{12}, 4$ образуют вершины гексагона, а концы волновых векторов гармоник $\sqrt{7}, \sqrt{13}$ — правильные двенадцатиугольники.)

Для любого момента времени t краевая задача (19), (25) решалась методом Ньютона. На каждом шаге этого метода задавались значения амплитуд $B_k|_{z=0}$ на передней грани кристалла для всех типов гармоник. Тогда амплитуды $F_k|_{z=l}$, $B_k|_{z=l}$ на задней грани кристалла находились путем интегрирования методом Рунге–Кутты четвертого порядка по координате z первых четырех обыкновенных дифференциальных уравнений системы (19). Невязка метода Ньютона определялась точностью выполнения краевых условий (25) на задней грани кристалла. Зависимость от времени t определялась путем интегрирования методом предиктор–корректор амплитуд поля пространственного заряда $E_{\pm 2k_0, k}$ (пятое и шестое уравнения системы (19)).

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 8 в виде зависимости интенсивностей основной гармоники и гармоники $\sqrt{3}$ от расстояния до зеркала обратной связи при $0 \leq n_0 L/l \leq 0.85$. В области $0 \leq n_0 L/l \lesssim 0.1$ интенсивность основной гармоники имеет минимум, что находится в согласии с выводами аналитической теории, согласно которой четырехволновые процессы могут только в этой области обеспечить насыщение взрывного роста интенсивности гексагона. Однако при этом аналитическое B_k^{an} и численное B_k^{num} значения амплитуд световых пучков достаточно сильно различаются: $|B_k^{num}|/|B_k^{an}|_{z=0} \sim 2$, что указывает на сильную перенормировку амплитуд гекса-

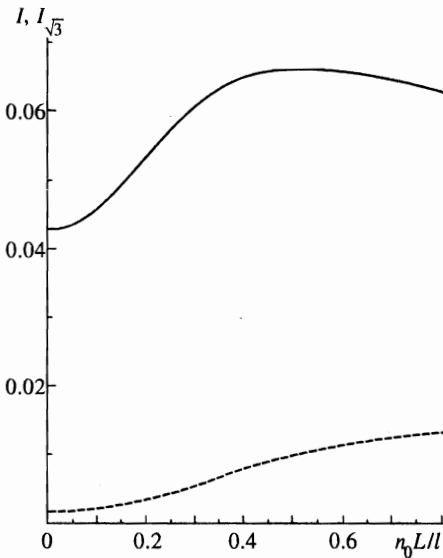


Рис. 8. Зависимости интенсивности основного гексагона I (сплошная кривая) и интенсивности гармоники $\sqrt{3}$ ($I^{\sqrt{3}}$ штриховая) от n_0L/l , полученные в численном эксперименте. Нормировка интенсивностей такая же, как на рис. 7

гонов за счет старших волновых процессов. Таким образом, предсказания четырехволновой теории верны скорее качественно, чем количественно. При $n_0L/l \gtrsim 0.1$, когда четырехволновые взаимодействия заведомо не могут обеспечить насыщение взрывной неустойчивости, нелинейность растет с ростом n_0L/l .

Амплитуды старших гармоник быстро убывают с ростом их номера. Поэтому дополнительные численные исследования показали, что если положить, по определению, все старшие комбинационные гармоники равными нулю, но учесть все возможные процессы между гармониками 0, 1, 2, $\sqrt{3}$, то при этом амплитуда основной гармоники меняется на более чем на 2%. Таким образом, для сильно нелинейной теории действительно оказывается достаточным учитывать волновые процессы вплоть до восьмого порядка, причем среди таких процессов только взаимодействия с участием гармоник 0, 1, 2, $\sqrt{3}$ оказываются существенными. Заметим, что в эксперименте также наблюдаются только гармоники 0, 1, 2, $\sqrt{3}$, старшие же гармоники настолько слабы, что их не удается зарегистрировать (см., например, [6, 8]). В этих же экспериментах регистрировалась интенсивность гексагонов от одного до трех процентов от интенсивности накачки, что несколько ниже полученного из численного эксперимента значения $|B_k(0)|^2 \simeq 0.04$. Это, по-видимому, объясняется тем, что в системе (19), (25) мы пренебрегли потерями за счет отражения на гранях (порядка 15% при падении света на заднюю грань из кристалла и еще столько же при обратном входе света в кристалл после отражения от зеркала обратной связи), а также пренебрегли потерями при отражении света от зеркала обратной связи.

Заметим в заключение, что при $n_0L/l \gtrsim 0.85$ стационарные гексагональные решения оказываются неустойчивы относительно перекачки энергии в гармонику $\sqrt{3}$. Эта неустойчивость связана с тем, что, как уже указывалось в разд. 3, при $n_0L/l \simeq 1.43$ сравниваются глубины первого и второго минимумов пороговой кривой $\gamma_i^{min}(k_d l)$ линейной неустойчивости (см. рис. 3а). При этом отношение $k_d^{min}|_{m=2}/k_d^{min}|_{m=1}$ близко (с точностью порядка 2%) к трем. Таким образом, в окрестности $n_0L/l \sim 1.43$ амплиту-

ды первой гармоники и гармоники $\sqrt{3}$ имеют один порядок малости и при этом связаны между собой трехволновым взаимодействием. В этом случае учет в численных расчетах всех волновых процессов вплоть до восьмиволновых требует рассмотрения большего числа гармоник, чем это делалось в описанном выше численном эксперименте. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены следующие результаты. Выведена система уравнений (19) с граничными условиями (25), описывающая эволюцию амплитуд боковых волн и поля пространственного заряда при произвольном уровне нелинейности. Линеаризация этой системы позволяет найти пороговое условие (28) возникновения поперечной неустойчивости, в точности совпадающее с результатами работы [12]. Показано, что пороговая кривая $\gamma_i(k_d l)$ представляет собой последовательность минимумов, относительная глубина которых меняется с изменением параметра $n_0 L/l$, пропорционального расстоянию L до зеркала обратной связи. При $n_0 L/l < 1.43$ самым глубоким (т. е. соответствующим самому низкому порогу неустойчивости) оказывается первый минимум, а при увеличении значения $n_0 L/l$ последовательно самыми глубокими оказываются второй, третий и т. д. минимумы. Получено выражение (30), описывающее с высокой точностью положение всех минимумов. При этом модули поперечных волновых векторов относятся как $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ для первого, второго, третьего и т. д. минимумов. Кроме того, найден набор явных решений (29) порогового уравнения (28), которые соответствуют самым глубоким значениям минимумов при всех возможных значениях параметра $n_0 L/l$. Вычислены собственные векторы прямой (25), (26) и эрмитово-сопряженной (36), (35) линейных краевых задач на пороге неустойчивости как функции $n_0 L/l$. Для частных случаев (29) указаны явные аналитические выражения (33), (37) для этих векторов.

При малых надкритичностях, когда боковые пучки неустойчивы только в узком кольце $|k| \simeq \sqrt{2k_d^{\min} k_0 n_0}$, общее решение нелинейной краевой задачи (19), (25), сведено (с помощью разложения (38) по собственным функциям линейной задачи) к системе амплитудных уравнений (3). Эта система представляет собой разложение Ландау по амплитудам растущих линейных мод. Матричные элементы U и $T_{k k_1 k_2 k_3}$ соответственно трех- и четырехволновых взаимодействий вычислены на пороге неустойчивости как функции $n_0 L/l$. Эти матричные элементы оказываются чисто действительными величинами. В частном случае (29) получено явное аналитическое выражение (41) для U . Принципиально, что матричный элемент U трехволнового взаимодействия отличен от нуля, что приводит к возникновению взрывной трехволновой неустойчивости и корреляции боковых пучков под углами, кратными $\pi/3$.

Исследована возможность стабилизации взрывного роста гексагонов за счет четырехволновых взаимодействий, получены уравнения (44), описывающие временную динамику формирования стационарных гексагонных решений (46), и указано условие (47) устойчивости этих решений. В результате показано, что при $n_0 L/l \lesssim 0.1$ четырехволновые взаимодействия могут обеспечивать насыщение взрывной неустойчивости. Вне этой области заведомо необходимо учитывать старшие волновые процессы. Проведен численный эксперимент по исследованию нелинейной краевой задачи (19), (25). Показано, что в общем случае необходимо учитывать все волновые процессы вплоть до

восьмиволновых. Однако среди таких процессов существенны только процессы взаимодействия между основной гармоникой и гармониками $0, \sqrt{3}, 2$. При $n_0 L/l \lesssim 0.1$ получено качественное согласие с результатами теории четырехволнового взаимодействия, однако старшие волновые процессы приводят к существенным перенормировкам амплитуд гексагонов, даваемых аналитическими выражениями (46). Указано, что при $n_0 L/l \gtrsim 0.85$ возникает неустойчивость сильнонелинейных стационарных гексагонных решений (получаемых в численном эксперименте) относительно перекачки энергии в старшие гармоники. Это обусловлено тем, что в этой области основная гармоника и гармоника $\sqrt{3}$ имеют один порядок малости вследствие сближения их порогов линейной неустойчивости. При этом поперечные волновые векторы этих двух гармоник соответствуют положениям двух последовательных минимумов пороговой кривой $\gamma_i(k_d l)$, что приводит к интенсивному обмену энергией между этими гармониками.

В заключение автор благодарит Е. А. Кузнецова за постановку задачи и полезные обсуждения. Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00093), программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант 96-15-96093), фонда Landau Scholarship, KFA, Forschungszentrum, Juelich, Germany и фонда INTAS (грант 96-0954).

Литература

1. J. Pender and L. Hesselink, *J. Opt. Soc. Amer.* **7**, 1361 (1990).
2. A. Petrossian, M. Pinard, A. Maître, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg, *Europhys. Lett.* **18**, 689 (1992).
3. R. Macdonald and H. J. Eichler, *Opt. Comm.* **89**, 289 (1992).
4. M. Tamburrini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato, *Opt. Lett.* **18**, 855 (1993).
5. J. V. Moloney and A. C. Newell, *Nonlinear Optics*, Addison Wesley, Reading, MA (1992).
6. T. Honda, *Opt. Lett.* **18**, 598 (1993).
7. P. P. Banerjee, H.-L. Yu, D. A. Gregory, N. Kukhtarev, and H. J. Caulfield, *Opt. Lett.* **20**, 10 (1995).
8. T. Honda and H. Matsumoto, *Opt. Lett.* **20**, 1755 (1995).
9. N. V. Kukhtarev, T. Kukhtareva, H. J. Caulfield, P. P. Banerjee, H.-L. Yu, and L. Hesselink, *Opt. Eng.* **34**, 2261 (1995).
10. *Photorefractive Materials and Their Applications*, ed. by P. Günter and J.-P. Huignard, Springer-Verlag, Berlin (1988); М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко, *Фоторефрактивные кристаллы в когерентных оптических системах*, Наука, Санкт-Петербург (1992).
11. W. J. Firth and C. Paré, *Opt. Lett.* **13**, 1096 (1988); G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2597 (1991).
12. T. Honda and P. Banerjee, *Opt. Lett.* **21**, 779 (1996).
13. Б. И. Стурман, А. И. Черных, *ЖЭТФ* **111**, 1611 (1997).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродродинамика*, Наука, Москва (1988).
15. Б. И. Стурман, В. М. Фридкин, *Фотогальванический эффект в средах без центра симметрии и родственные явления*, Наука, Москва (1992); В. I. Sturman, S. G. Odulov, and M. Yu. Goulkov, *Phys. Rep.* **275**, 197 (1996).
16. Н. В. Кухтарев, *Письма в ЖТФ* **2**, 1114 (1976).
17. M. Saffman, A. A. Zozulya, and D. Z. Anderson, *J. Opt. Soc. Amer.* **11**, 1409 (1994).
18. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, *ЖЭТФ* **71**, 262 (1976).
19. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, *ПМТФ* **2**, 76 (1980).