

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА С ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. М. Филиппов*

*Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова
428015, Чебоксары, Россия*

Поступила в редакцию 27 мая 1997 г.

Рассмотрено влияние множественного испускания квантов как на квантовомеханическое состояние электрона при синхротронном излучении, так и на интенсивность излучения. Расчеты проводятся при помощи варианта теории возмущений, основанного на применении расширенных когерентных состояний. Получена общая формула для числа испускаемых квантов, учитывающая их взаимное влияние. На примере модельной задачи показывается отсутствие инфракрасной катастрофы в модифицированной теории возмущений. Рассчитывается матрица плотности электрона, анализ которой позволяет сделать вывод об увеличении с течением времени степени его пространственной локализации при движении в режиме ускорения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее (см., например, [1] и цитированную там литературу) было проанализировано влияние излучения на траектории излучающих заряженных частиц в синхротроне. Анализ был проведен как на основе классического уравнения Лоренца–Дирака, так и путем решения кинетического уравнения, коэффициентами которого являлись вероятности квантовых переходов между различными стационарными состояниями электрона в магнитном поле синхротрона. Расчеты показали, что при отсутствии фокусировки в магнитном поле должно наблюдаться увеличение радиальных флуктуаций траектории и увеличение продольных флуктуаций импульса с течением времени. В фокусирующем магнитном поле на начальном этапе ускорения излучение приводит к возникновению радиационного трения, обуславливающего затухание радиальных и вертикальных колебаний (так называемый радиационный демпинг-эффект). В последнее время анализу уравнений типа Лоренца–Дирака уделяется все большее внимание не только в связи с проблемами синхротронного излучения (см., например, работы [2-4]). Найдены новые решения уравнений Лоренца–Дирака в некоторых специальных случаях, привлекаются дополнительные аргументы из квантовой электродинамики для исключения нефизических решений.

Несмотря на несомненную ценность результатов, получаемых при помощи уравнений Лоренца–Дирака, нельзя не отметить, что из них оказываются исключенными важные свойства состояний излучающей частицы, не связанные непосредственно с траекторией и не влияющие непосредственно на вышеперечисленные эффекты типа увеличения радиальных флуктуаций траектории. Речь идет, в частности, об эволюции формы волнового пакета частицы, оказывающей воздействие на излучение, а тем самым,

* E-mail: Phys@chgu.chuvashia.su

на силу радиационного трения и на траекторию. В данной работе делается попытка на основе модификации теории возмущений рассмотреть влияние множественного испускания квантов на эволюцию волнового пакета частицы, в частности, при синхротронном излучении. В большинстве работ, посвященных квантовомеханической теории синхротронного излучения, такая задача не ставилась. Считалось, что излучающая частица обладает волновой функцией, определяющейся из уравнения Дирака. Между тем, при учете возникающего излучения частица является уже только частью квантовомеханической системы и ее состояние не может быть описано с той полнотой, которая вообще в принципе возможна в рамках квантовой теории. Общепринятым способом описания состояний частиц, входящих в состав большой системы, является матрица плотности. В работе показывается, что эволюция матрицы плотности свидетельствует о переходе частицы с течением времени во все более локализованные состояния, в которых ее движение все более точно определяется законами классической механики. Тем самым получается дополнительное обоснование справедливости использования уравнения Лоренца–Дирака наряду с более ясным представлением о неполноте той физической картины, которая описывается этим уравнением.

Проблема устройства волновых пакетов излучающих частиц связана с изучавшейся ранее Лоренцем классической моделью распределенного электрона (см., например, [5]). Постановка данного вопроса в квантовой электродинамике приводит к хорошо известной проблеме ультрафиолетовой расходимости при попытке вычислить массу, заряд или энергию элементарной частицы. Более того, процедура перенормировки заряда в квантовой электродинамике обнаруживает внутреннюю противоречивость традиционной фейнмановской формулировки теории возмущений (см., например, [6]). Было бы целесообразно проследить изменение форм проявления трудностей квантовой электродинамики при изменении формулировки теории возмущений с целью выяснить, какие из перечисленных выше проблем носят инвариантный характер. Может оказаться, что в измененной теории некоторые из них могут быть разрешены без привлечения дополнительных гипотез. Тогда это могло бы привести к новому направлению развития квантовой электродинамики и вообще теории квантованных полей. В данной работе на примере модельной задачи показывается, что в используемой здесь модификации по крайней мере в отношении инфракрасной катастрофы не возникает тех проблем, которые характерны для традиционной формы теории. Расчеты проводятся на основе общей формулы, описывающей взаимное влияние испускаемых квантов как проявление нелинейности, присущей квантовой электродинамике.

2. ИСПУСКАНИЕ КВАНТОВ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ

Запишем гамильтониан взаимодействия свободного электромагнитного поля с частицей, обладающей зарядом Z (будем использовать атомные единицы: $\hbar = 1$, $|e| = 1$):

$$\hat{H}_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \hat{\mathbf{A}} dV, \quad (1)$$

где вектор плотности тока \mathbf{j} предполагается определенной функцией координат и времени. Оператор векторного потенциала зададим в трехмерно-поперечной калибровке:

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\alpha, \mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} \{ \hat{f}_{\alpha \mathbf{q}} \mathbf{e}_{\alpha \mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}r} + \hat{f}_{\alpha \mathbf{q}}^* \mathbf{e}_{\alpha \mathbf{q}}^* e^{-i\mathbf{q}r} \}, \quad (2)$$

в виде стандартной линейной формы по операторам рождения $\hat{f}_{\alpha q}^\dagger$ и уничтожения $\hat{f}_{\alpha q}$ фотонов в состояниях с поляризацией α ($\alpha = 1, 2$), импульсом \mathbf{q} и энергией $\omega = cq$. Векторы поляризации $\mathbf{e}_{\alpha q}$ единичны и ортогональны \mathbf{q} . Константы связи $g_q = (2\pi c^2/\omega\Omega)^{1/2}$ содержат нормировочный объем Ω , и поскольку он не будет входить в окончательные выражения, впредь будем полагать $\Omega = 1$.

Полный гамильтониан складывается из гамильтониана свободных квантов

$$\hat{H}_0 = \sum_{\alpha, q} \omega \hat{f}_{\alpha q}^\dagger \hat{f}_{\alpha q} + \text{const}$$

и гамильтониана (1). Перейдем к представлению взаимодействия для полевых операторов, например,

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t}.$$

Уравнение, определяющее эволюцию вектора состояния фотонного поля $|t\rangle$ в представлении взаимодействия

$$i \frac{d}{dt} |t\rangle = \hat{H}_{int}(t) |t\rangle, \tag{3}$$

в данном случае имеет точное решение в виде прямого произведения векторов когерентных состояний фотонов:

$$|t\rangle = \prod_{\alpha, q} \exp[-i\chi_{\alpha, q} - \hat{f}_{\alpha q} Q_{\alpha q}^* + \hat{f}_{\alpha q}^\dagger Q_{\alpha q}] |t_0\rangle, \tag{4}$$

где вектор начального состояния с точностью до произвольного фазового множителя совпадает с вакуумным состоянием поля фотонов:

$$|t_0\rangle = e^{i\phi_0} |\text{vac}\rangle, \quad \phi_0 = \text{const},$$

$$Q_{\alpha q}(t) = i \frac{g_q}{c} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{j}_q(t') e^{i\omega t'},$$

$$\chi_{\alpha q}(t) = \int_{t_0}^t \text{Im}[Q_{\alpha q}(t') \dot{Q}_{\alpha q}^*(t')] dt',$$

$\mathbf{j}_q(t)$ — фурье-образ плотности тока. Используя точное решение (4), можно вычислить все представляющие интерес величины. Так, среднее количество квантов, возникших к моменту времени t , дается равенством

$$n_{\alpha q}^{(0)}(t) = |Q_{\alpha q}(t)|^2. \tag{5}$$

Заметим, что формула (5) дает среднее число испущенных квантов только при $t \rightarrow \infty$, поскольку для формирования фотона требуется время порядка c/q , которое стремится к ∞ при $q \rightarrow 0$. Именно в этом смысле и будем понимать в дальнейшем величины $n_{\alpha q}$.

Пусть кванты испускаются точечной частицей с зарядом Z , движущейся по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$. Тогда

$$\mathbf{j}_q(t) = Z\mathbf{v}_0(t)\exp[-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0(t)],$$

где $\mathbf{v}_0(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$. После суммирования по поляризациям производная по времени от числа квантов может быть приведена к виду (при $t_0 \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1,2} n_{\alpha q}^{(0)}(t) &= \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\mathbf{v}_0(t - |\tau|/2 + \tau/2)\mathbf{v}_0(t - |\tau|/2 - \tau/2) - \\ &\quad - \frac{1}{q^2} (\mathbf{q}\mathbf{v}_0(t - |\tau|/2 + \tau/2))(\mathbf{q}\mathbf{v}_0(t - |\tau|/2 - \tau/2))] \times \\ &\quad \times \exp\{i\omega\tau - i\mathbf{q}[\mathbf{r}_0(t - |\tau|/2 + \tau/2) - \mathbf{r}_0(t - |\tau|/2 - \tau/2)]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя формулу (6) к синхротронному излучению, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} n_{\alpha q}^{(0)} &= Z^2 \frac{v_0^2}{c^2} g_q^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\cos\omega_0\tau - \frac{1}{2} \cos^2\Theta (\cos\omega_0\tau + \cos((2t - |\tau|)\omega_0)) \right] \times \\ &\quad \times \exp\left\{i\omega\tau - 2iqR \cos\Theta \sin\frac{\omega_0\tau}{2} \cos(\omega_0(t - |\tau|/2))\right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_0 = eH_0/\gamma mc$, $v_0 = R\omega_0$, H_0 — напряженность магнитного поля, R — радиус орбиты, m — масса частицы, γ — лоренц-фактор. Угол Θ представляет собой угол наклона вектора \mathbf{q} к плоскости орбиты.

Выражение (7) периодически по времени с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Усредняя его по периоду, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \overline{n_{\alpha q}^{(0)}} &= Z^2 \frac{v_0^2}{c^2} g_q^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \left[\frac{1}{2} \cos^2\Theta J_2\left(2qR \cos\Theta \sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\omega_0\tau \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2\Theta\right) J_0\left(2qR \cos\Theta \sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Учтем далее, что для любой периодической функции $F(\tau)$ имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} F(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega T_0} \int_0^{T_0} e^{i\omega\tau} F(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где возможно преобразование суммы экспонент к сумме дельта-функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega T_0} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n'\omega_0).$$

Используя это, а также (9), преобразуем равенство (8) к виду

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \overline{n_{\alpha q}^{(0)}} = Z^2 \frac{v_0^2}{c^2} g_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx e^{2inx} \left\{ \cos 2x J_0(2qR \cos \Theta \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \Theta \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \Theta J_2(2qR \cos \Theta \sin x) \right\} 2\pi \delta(\omega - n\omega_0). \tag{10}$$

Поскольку $\omega = cq > 0$, суммирование в (10) проводится от нуля до ∞ . Учтем далее формулу (см. [7])

$$\int_0^{\pi} e^{2i\mu x} J_{2\nu}(2a \sin x) dx = \pi e^{i\pi\mu} J_{\nu-\mu}(a) J_{\nu+\mu}(a),$$

а также рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) &= \frac{2n}{z} J_n(z), \\ J_{n-1}(z) &= \frac{n}{z} J_n(z) + J'_n(z), \\ J_{n+1}(z) &= \frac{n}{z} J_n(z) - J'_n(z). \end{aligned}$$

После этого формула (10) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \overline{n_{\alpha q}^{(0)}} = Z^2 g_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \left[\text{tg}^2 \Theta J_n \left(\frac{nv}{c} \cos \Theta \right) + \frac{v_0^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \Theta \right) \right]. \tag{11}$$

При помощи (11) можно получить, в частности, известную формулу Шотта. Таким образом, полуклассическая теория дает для средней интенсивности синхротронного излучения результаты, совпадающие с классическими. Она содержит дополнительную информацию по сравнению с классической электродинамикой лишь в том отношении, что позволяет, например, вычислять флуктуации числа испускаемых квантов, их средней энергии или суммарного импульса. Аналогичные результаты могут быть получены в случае движения заряженной частицы по произвольной траектории [8]. Во всех случаях получаются классические формулы для средней интенсивности испускаемого частицей излучения. Кроме того, расчет среднего электромагнитного поля, сопровождающего заряженную частицу при движении в вакууме, приводит к известным выражениям для запаздывающих потенциалов [9]. Отмеченное согласие между полуклассической и классической теориями является тем фундаментом, на котором может быть построена более точная квантовомеханическая теория взаимодействия излучения с излучающей частицей.

3. ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим взаимодействие электрона с полем собственного излучения. Перейдем к представлению Фарри, записывая волновой оператор электрона в виде разложения по стационарным состояниям вида (П.2), приведенным в Приложении,

$$\hat{\psi} = \sum_{\xi} \hat{d}_{\xi} \psi_{\xi},$$

где заранее исключены операторы античастиц, поскольку учет вкладов промежуточных состояний типа частица-античастица приведет лишь к малым поправкам в рассматриваемом круге явлений. Операторы рождения \hat{d}_ξ^\dagger и уничтожения \hat{d}_ξ обязаны подчиняться стандартным фермиевским коммутационным соотношениям. Оператор плотности тока приближенно (без учета вкладов электронно-позитронных пар) дается равенством

$$\hat{j}_a(t) = c\hat{\psi}^\dagger \alpha_a \hat{\psi} = c \sum_{\xi\xi'} \hat{d}_\xi^\dagger \hat{d}_{\xi'} \psi_\xi^*(\mathbf{r}) \alpha_a \psi_{\xi'}(\mathbf{r}) e^{i(E_\xi - E_{\xi'})t} \quad (12)$$

(здесь и ниже индексы $a, b | = 1, 2, 3$ нумеруют проекции векторов на декартовы оси координат). Построим оператор

$$\hat{\mathbf{j}}_q^{(0)}(t) = Z \dot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}, t) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)} \hat{\rho}_q^{(0)}, \quad (13)$$

где $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$ — подлежащий определению вектор, зависящий от передаваемого импульса \mathbf{q} и от времени, $\hat{\rho}_q^{(0)}$ — «нулевой» оператор плотности для момента времени $t = 0$,

$$\hat{\rho}_q^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}.$$

Здесь $\hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электрона в состоянии с импульсом \mathbf{k} и проекцией спина на ось z , принимающей значения $\sigma = \pm 1/2$. Отметим, что оператор (13) выбран в форме, удовлетворяющей закону сохранения заряда. Потребуем, чтобы текущее среднее значение от фурье-образа оператора (12) совпадало со средним значением от (13),

$$\langle t | \hat{\mathbf{j}}_q(t) | t \rangle = \dot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{q}, t) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)} \langle t | \hat{\rho}_q^{(0)} | t \rangle. \quad (14)$$

Тогда $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$ будет приблизительно совпадать со средней координатой частицы в момент времени t . Определим далее отклонение тока от «нулевого» значения

$$\hat{\Delta \mathbf{j}}_q(t) = \hat{\mathbf{j}}_q(t) - \hat{\mathbf{j}}_q^{(0)}(t),$$

которое будет использовано для построения оператора взаимодействия в новом представлении. Проведенное преобразование удобно тем, что операторы (13), отнесенные к различным моментам времени, коммутируют между собой,

$$[\hat{j}_q^{(0)a}(t), \hat{j}_{q'}^{(0)b}(t')] = 0. \quad (15)$$

Используя (13), представим оператор электромагнитного взаимодействия в виде суммы двух слагаемых, $\hat{H}_{int}(t) = \hat{H}_{int}^{(0)}(t) + \hat{H}_{int}^{(1)}(t)$, где

$$\hat{H}_{int}^{(0)}(t) = -\frac{1}{c} \int \hat{\mathbf{j}}^{(0)}(t) \hat{\mathbf{A}}(t) dV, \quad (16)$$

$$\hat{H}_{int}^{(1)}(t) = -\frac{1}{c} \int \hat{\Delta \mathbf{j}}(t) \hat{\mathbf{A}}(t) dV. \quad (17)$$

Тогда, очевидно, в силу (15), уравнение

$$i \frac{d}{dt} | t \rangle = \hat{H}_{int}^{(0)}(t) | t \rangle \quad (18)$$

будет иметь точное решение в виде прямого произведения векторов расширенных (или так называемых модифицированных [10]) когерентных состояний,

$$|t\rangle = \prod_{\alpha, q} \exp \left(-i\hat{\chi}_{\alpha q} - \hat{f}_{\alpha q} \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger + \hat{f}_{\alpha q}^\dagger \hat{Q}_{\alpha q} \right) |0\rangle, \quad (19)$$

где (при $t_0 = 0$)

$$\hat{Q}_{\alpha q}(t) = i \frac{g_q}{c} \int_0^t dt' \mathbf{e}_{\alpha q}^* \hat{\mathbf{r}}_{\alpha q}^{(0)}(t') e^{i\omega t'}, \quad (20)$$

$$\hat{\chi}_{\alpha q}(t) = -\frac{i}{2} \int_0^t \left\{ \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t') \hat{Q}_{\alpha q}(t') - \hat{Q}_{\alpha q}(t') \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t') \right\} dt'. \quad (21)$$

Начальный вектор состояния $|0\rangle$ представляет собой прямое произведение вакуумного состояния электромагнитного поля $|\text{vac}\rangle$ на вектор начального состояния движущейся частицы $|\phi\rangle$, описываемого волновой функцией $\phi(\mathbf{r})$, $|0\rangle = |\phi, \text{vac}\rangle$.

Выбор $t_0 = 0$ (а не $-\infty$) обусловлен тем обстоятельством, что, как показывает дальнейший расчет, весьма существенной оказывается временная последовательность изменения состояния движущейся частицы, взаимодействующей с полем собственного излучения. В таком подходе неизбежно возникают проблемы с включением взаимодействия, нарушающим закон сохранения заряда, и появляющимся вследствие этого нарушения фиктивным излучением. Чтобы избежать необходимости вычеркивать фиктивные члены, можно прибегнуть к процедуре медленного включения взаимодействия путем замены константы Z на медленно нарастающий заряд $Z(1 - e^{-\epsilon t})$, где ϵ достаточно мало. Время нарастания заряда $\tau_{in} = \epsilon^{-1}$ должно быть велико по сравнению с ω^{-1} , но мало по сравнению с временем наблюдения (при этом должно соблюдаться условие $t \gg \omega^{-1}$). Выяснив правило взятия интегралов при каком-то определенном q , можно затем распространить это правило на любые другие значения q .

Если не учитывать поправок, порождаемых оператором $\hat{H}_{int}^{(1)}$, то равенство (19) полностью решает задачу расчета физических величин, представляющих интерес. В частности, вместо (5) получаем

$$n_{\alpha q}(t) = \langle t | \hat{f}_{\alpha q}^\dagger(t) \hat{f}_{\alpha q}(t) | t \rangle,$$

что при $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t) = \mathbf{r}_0(t)$ приводит к результату, совпадающему с (5). Таким образом, без учета $\hat{H}_{int}^{(1)}$ отличие рассматриваемого варианта квантовомеханической теории от полуклассической при вычислении среднего числа испускаемых квантов или их энергии возникает только тогда, когда функции $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$ будут отличаться от $\mathbf{r}_0(t)$. Вместе с тем, учет поправок, обусловленных $\hat{H}_{int}^{(1)}$, можно произвести при любом удобном выборе векторов $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$. Положим $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t) = \mathbf{r}_0(t)$. Тогда $\hat{Q}_{\alpha q}(t) = Q_{\alpha q}(t) \hat{\rho}_q$, где $Q_{\alpha q}(t)$ дается своим полуклассическим выражением

$$Q_{\alpha q}(t) = i \frac{Z}{c} g_q \int_0^t dt' \mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_0(t') \exp \{ i\omega t' - i\mathbf{q}\mathbf{r}_0(t') \}. \quad (22)$$

Для построения новой «модифицированной» теории возмущений по $\widehat{H}_{int}^{(1)}$ введем «нулевой» оператор эволюции

$$\widehat{U}_0(t) = \exp \left\{ \sum_{\alpha, q} \widehat{Q}_{\alpha q}(t) \widehat{f}_{\alpha q}^\dagger - \widehat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t) \widehat{f}_{\alpha q} - i \widehat{\chi}_{\alpha q}(t) \right\}.$$

Вектор (19) теперь может быть переписан в виде $|t\rangle = \widehat{U}_0(t)|0\rangle$. Перейдем далее к новому представлению операторов

$$\widetilde{A}(t) = \widehat{U}_0^\dagger(t) \widehat{A}(t) \widehat{U}_0(t). \tag{23}$$

Вектор состояния $|t\rangle$ в этом представлении будет подчиняться уравнению

$$i \frac{d}{dt} |t\rangle = \widetilde{H}_{int}^{(1)}(t) |t\rangle. \tag{24}$$

Учитывая (24), приведем среднее число квантов к виду

$$n_{\alpha q}(t) = n_{\alpha q}^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\ \times \langle 0 | [\dots [\widehat{f}_{\alpha q}^\dagger(t) \widetilde{f}_{\alpha q}(t), \widetilde{H}_{int}^{(1)}(t_1)], \widetilde{H}_{int}^{(1)}(t_2)], \dots, \widetilde{H}_{int}^{(1)}(t_n)] | 0 \rangle. \tag{25}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОК В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Раскрывая (25), обнаруживаем, что в разложении присутствуют члены, пропорциональные четным степеням Z . Соберем главные из них, содержащие предэкспоненциальный множитель Z^2 . Они имеются в $n_{\alpha q}^{(0)}(t)$, а также в первом и втором членах ряда (25). Заметим, что при этом Z содержится также в показателях экспонент, входящих в $\widehat{U}_0, \widehat{U}_0^\dagger$. Вычислим первый коммутатор из (25), используя следующие вспомогательные формулы:

$$\widetilde{f}_{\alpha q}(t) = (\widehat{f}_{\alpha q} + \widehat{Q}_{\alpha q}(t)) e^{-i\omega t}; \quad \widetilde{f}_{\alpha q}^\dagger(t) = (\widehat{f}_{\alpha q}^\dagger + \widehat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t)) e^{-i\omega t}, \\ [\widehat{f}_{\alpha q}, \widehat{U}_0(t)] = \widehat{U}_0(t) \widehat{Q}_{\alpha q}(t), \quad [\widehat{f}_{\alpha q}^\dagger, \widehat{U}_0^\dagger(t)] = -\widehat{U}_0^\dagger(t) \widehat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t), \tag{26} \\ [\widehat{f}_{\alpha q}, \widehat{U}_0(t)] = \widehat{U}_0(t) \widehat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t); \quad [\widehat{f}_{\alpha q}, \widehat{U}_0^\dagger(t)] = -\widehat{U}_0^\dagger(t) \widehat{Q}_{\alpha q}(t).$$

Положим

$$\widehat{B}_{\alpha q}(t) = \mathbf{e}_{\alpha q} \widehat{\Delta} \widehat{\mathbf{j}}_{-q}(t),$$

при этом

$$\widehat{H}_{int}^{(1)}(t) = -\frac{Z}{c} \sum_{\alpha, q} g_q \left(\widehat{f}_{\alpha q} \widehat{B}_{\alpha q}(t) e^{-i\omega t} + \widehat{f}_{\alpha q}^\dagger \widehat{B}_{\alpha q}^\dagger(t) e^{i\omega t} \right). \tag{27}$$

Используя формулы (26), преобразуем коммутатор

$$[\hat{f}_{\alpha q}^\dagger(t)\tilde{f}_{\alpha q}(t), \tilde{H}_{int}^{(1)}(t)] = \hat{U}_0^\dagger(t_1) \left[(\hat{f}_{\alpha q}^\dagger + \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t, t_1)) (\hat{f}_{\alpha q} + \hat{Q}_{\alpha q}(t, t_1)), \hat{H}_{int}^{(1)}(t_1) \right] \hat{U}_0(t_1), \quad (28)$$

где $\hat{Q}_{\alpha q}(t, t_1) = \hat{Q}_{\alpha q}(t) - \hat{Q}_{\alpha q}(t_1)$. Поскольку операторы $\hat{Q}_{\alpha q}(t)$ уже содержат множитель Z , главные члены возникают от коммутации фотонных операторов с $\hat{H}_{int}^{(1)}$:

$$[\hat{f}_{\alpha q}^\dagger(t)\tilde{f}_{\alpha q}(t), \tilde{H}_{int}^{(1)}(t)] \approx \frac{Z}{c} g_q \hat{U}_0^\dagger(t_1) \left(e^{-i\omega t_1} \hat{B}_{\alpha q}(t_1) (\hat{f}_{\alpha q} + \hat{Q}_{\alpha q}(t, t_1)) - e^{i\omega t_1} (\hat{f}_{\alpha q}^\dagger + \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t, t_1)) \hat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_1) \right) \hat{U}_0(t_1). \quad (29)$$

Усредним (29) по начальному состоянию системы, воспользовавшись равенствами

$$\hat{f}_{\alpha q} \hat{U}_0(t_1) |0\rangle = \hat{Q}_{\alpha q}(t_1) \hat{U}_0(t_1) |0\rangle,$$

$$\langle 0 | \hat{U}_0^\dagger(t_1) \hat{f}_{\alpha q}^\dagger = \langle 0 | \hat{U}_0^\dagger(t_1) \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t_1).$$

Получим

$$\langle 0 | [\hat{f}_{\alpha q}^\dagger(t)\tilde{f}_{\alpha q}(t), \tilde{H}_{int}^{(1)}(t)] |0\rangle = \frac{Z}{c} g_q \langle 0 | \hat{U}_0^\dagger(t_1) \{ \hat{B}_{\alpha q}(t_1) \hat{Q}_{\alpha q}(t) e^{-i\omega t_1} - e^{i\omega t_1} \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t) \hat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_1) \} \hat{U}_0(t_1) |0\rangle. \quad (30)$$

При вычислении следующих поправок в (25) будем сразу отбрасывать слагаемые, содержащие предэкспоненциальные множители более высокого порядка по Z , чем Z^2 . По этой причине в выражении для коммутатора первого порядка при подстановке во второй и следующие члены под знаком суммы в (25) можно сразу отбрасывать слагаемые, содержащие операторы $\hat{Q}_{\alpha q}, \hat{Q}_{\alpha q}^\dagger$. В возникающих выражениях операторы $\hat{f}_{\alpha q}, \hat{f}_{\alpha q}^\dagger$ можно свободно переставлять с операторами $\hat{U}_0, \hat{U}_0^\dagger$, поскольку их коммутаторы содержат не учитываемые нами поправки более высокого порядка по Z . В силу данного обстоятельства все слагаемые, в которых операторы уничтожения $\hat{f}_{\alpha q}$ располагаются правее других \hat{f} -операторов, или те, в которых операторы рождения $\hat{f}_{\alpha q}^\dagger$ стоят левее других \hat{f} -операторов, должны опускаться. В оставшихся слагаемых произведения операторов $\hat{f}_{\alpha q} \hat{f}_{\alpha' q'}^\dagger$ должны заменяться на коммутаторы $\delta_{\alpha\alpha'} \Delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$. Выполняя указанные преобразования, приведем главные члены, возникающие при раскрытии двойного коммутатора из правой части (25), к виду

$$-\frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \left(\hat{U}_0^\dagger(t_1) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \hat{B}_{\alpha q}(t_1) \hat{U}_0(t_1) \hat{U}_0^\dagger(t_2) \hat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_2) \hat{U}_0(t_2) + \hat{U}_0^\dagger(t_2) \hat{B}_{\alpha q}(t_2) \hat{U}_0(t_2) \hat{U}_0^\dagger(t_1) \hat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_1) \hat{U}_0(t_1) e^{i\omega(t_1-t_2)} \right). \quad (31)$$

Собирая все члены указанного порядка, получим

$$n_{\alpha q}(t) = |Q_{\alpha q}(t)|^2 - i \frac{Z}{c} g_q \int_0^t dt_1 \langle 0 | \hat{U}_0^\dagger(t_1) \{ e^{-i\omega t_1} \hat{B}_{\alpha q}(t_1) \hat{Q}_{\alpha q}(t) -$$

$$\begin{aligned}
& - e^{i\omega t_1} \widehat{Q}_{\alpha q}^\dagger(t) \widehat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_1) \widehat{U}_0(t_1) |0\rangle + \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \{0 | \widehat{U}_0^\dagger(t_1) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \times \\
& \times \widehat{B}_{\alpha q}(t_1) \widehat{U}_0(t_1) \widehat{U}_0^\dagger(t_2) \widehat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_2) \widehat{U}_0(t_2) + \\
& + \widehat{U}_0^\dagger(t_2) \widehat{B}_{\alpha q}^\dagger(t_2) \widehat{U}_0(t_2) \widehat{U}_0^\dagger(t_1) e^{i\omega(t_1-t_2)} \widehat{B}_{\alpha q}(t_1) \widehat{U}_0(t_1) |0\rangle. \quad (32)
\end{aligned}$$

Расписывая в (32) все слагаемые, возникающие после подстановки явных выражений для $\widehat{B}_{\alpha q}(t)$, после приведения подобных членов и сокращений находим окончательно

$$\begin{aligned}
n_{\alpha q}(t) = \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 & (0 | \widehat{U}_0^\dagger(t_1) \times \\
& \times \mathbf{e}_{\alpha q} \widehat{\mathbf{j}}_q^\dagger(t_1) \widehat{U}_0(t_1) \widehat{U}_0^\dagger(t_2) \mathbf{e}_{\alpha q}^* \widehat{\mathbf{j}}_q(t_2) \widehat{U}_0(t_2) |0\rangle e^{-i\omega(t_1-t_2)}. \quad (33)
\end{aligned}$$

Заметим, что при выводе (33) нигде не использовалась независимость вектора $\mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$ от \mathbf{q} , поэтому данная формула остается справедливой и в общем случае, который получится, если в (22) произвести замену $\mathbf{r}_0(t) \rightarrow \mathbf{r}_0(\mathbf{q}, t)$.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА ФОТОНОВ

Будем предполагать, что в разложении вектора начального состояния частицы $|0\rangle$ по состояниям с определенным импульсом $|\mathbf{k}_i\rangle$ коэффициенты разложения $C_{\mathbf{k}_i}$ имеют максимум в точке \mathbf{k}_0 и уменьшаются при отклонении \mathbf{k}_i от \mathbf{k}_0 по закону Гаусса:

$$C_{\mathbf{k}_i} = (2\pi\delta_\perp^2)^{1/2} (2\pi\delta_l^2)^{1/4} \exp[-p_i^2\delta_l^2/4 - (\mathbf{k}_{i\perp} - \mathbf{k}_{0\perp})^2\delta_\perp^2/4],$$

где $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, p_i)$, $\mathbf{k}_{0\perp}$ зависит от времени, δ_l, δ_\perp — поперечная и продольная (по отношению к оси z) ширины пакета. Данное представление вытекает из рассмотрения состояний электрона в магнитном поле, приведенного в Приложении. Для релятивистских электронов неопределенность импульса в начальном состоянии много меньше величины самого импульса. При фактическом вычислении чисел испускаемых квантов по формуле (33) операторы токов предпочтительнее приближенно представить в виде разложений по состояниям с определенным импульсом в данный момент времени с зависимостью от времени, присущей плоским волнам. В настоящей работе это приближение аргументируется тем обстоятельством, что ввиду сильного воздействия излучения на состояние частицы в сопутствующей системе отсчета, превышающего то, которое вызывает внешнее поле, можно не учитывать квантование уровней во временной зависимости операторов. Действительно, уже из классической теории синхротронного излучения следует, что средняя энергия излучаемых частицей квантов намного превосходит ω_0 . Ввиду этого среднее значение разности энергий частицы до и после испускания кванта оказывается много больше расстояния между уровнями поперечного движения. В этих условиях учет квантования уровней во временной зависимости операторов может привести лишь к малым поправкам порядка $1/\bar{n}$ (где $\bar{n} \sim \gamma^3$ — среднее значение отношения частоты испускаемого кванта к ω_0).

Векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_i , входящие в операторы токов в (33), в результате действия электронных операторов превращаются в векторы $\mathbf{k}_i - \Delta\mathbf{q}$, где $\Delta\mathbf{q} = \sum_s \mathbf{q}_s$, векторы $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots$

представляют собой импульсы испускаемых квантов. Заменяя данное выражение величиной $\mathbf{k}_i(t) = \mathbf{k}_i - \Delta\mathbf{k}(t)$, где $\Delta\mathbf{k}(t)$ — средний потерянный частицей импульс к моменту времени t , при подстановке во все не входящие под знак экспоненты множители из (33), получим

$$n_{\alpha q}(t) = \frac{Z^2 g_q^2}{c^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 e^{-i\omega(t_1-t_2)} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma'} |C_{\mathbf{k}_i}|^2 (\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}_{i\sigma'}^*(\mathbf{q}, t_1)) (\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}_{i\sigma'}(\mathbf{q}, t_2)) \times \\ \times (\text{vac}; \mathbf{k}_i, \sigma | \hat{U}_0^\dagger(t_1) \hat{\rho}_q^\dagger(t_1) \hat{U}_0(t_1) \hat{U}_0^\dagger(t_2) \hat{\rho}_q(t_2) \hat{U}_0(t_2) | \mathbf{k}_i, \sigma; \text{vac}), \quad (34)$$

где

$$\hat{\rho}_q(t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma'} \hat{d}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger \hat{d}_{\mathbf{k}, \sigma} \exp\{i(\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}})t\},$$

$$v_{i\sigma'}^a(\mathbf{q}, t) = \frac{c^2}{2\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon'_i}} w_{\sigma'}^* \left[\sqrt{\frac{\varepsilon'_i + mc^2}{\varepsilon_i + mc^2}} \sigma^a \sigma^b k_i^b(t) + \sqrt{\frac{\varepsilon_i + mc^2}{\varepsilon'_i + mc^2}} \sigma^b (k_i^b(t) - q^b) \right] \sigma^a w_{\sigma'}$$

причем $\varepsilon_i = \varepsilon_{\mathbf{k}_i(t)}$, $\varepsilon'_i = \varepsilon_{\mathbf{k}_i(t)-\mathbf{q}}$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Слагаемое, соответствующее $\sigma' \neq \sigma$, описывает процессы излучения, сопровождающиеся переворотом спина электрона.

Возможность дальнейшего упрощения возникает, если показатели экспонент, входящих в состав операторов плотности в (34), преобразовать при помощи формулы

$$\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \sum_s \mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_s), \quad (35)$$

где $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_s)$ — некоторые функции. В данном подходе различные кванты предполагаются почти независимыми. В противном случае можно было бы говорить о сильной корреляции между испусканиями двух отдельных квантов, что не согласуется ни с полуклассической теорией, ни с нижеследующим расчетом. В линейном по Δq приближении при $q \ll k_i$ имеем

$$\mu_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_s) \approx (\nabla \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}} - \nabla \varepsilon_{\mathbf{k}_i}) \mathbf{q}'_s \approx -\mathbf{q} \mathbf{q}'_s / m \gamma_i, \quad (36)$$

где $\gamma_i = \varepsilon_{\mathbf{k}_i} / mc^2$. При $q'_s \rightarrow \infty$ функция $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}'_s)$ перестает зависеть от \mathbf{q}'_s .

Используя приемы вычисления средних из работы [9], получим

$$n_{\alpha q}(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma'} |C_{\mathbf{k}_i}|^2 \dot{Q}_{i\alpha q}^*(t_1, \sigma') \dot{Q}_{i\alpha q}(t_2, \sigma') \exp[-P_{i\alpha q}(t_1, t_2)], \quad (37)$$

где

$$Q_{i\alpha q}(t, \sigma') = i \frac{Z}{c} g_q \int_0^t \mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_{i, \sigma'}(\mathbf{q}, t') \exp[i\omega t' - i\mathbf{q} \mathbf{r}_{i, \sigma'}(\mathbf{q}, t')] dt',$$

при этом $\dot{\mathbf{r}}_{i, \sigma'}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{v}_{i, \sigma'}(\mathbf{q}, t)$. Показатель экспоненты, входящей в (37), дается формулой

$$\begin{aligned}
 P_{iq}(t_1, t_2) = & \sum_{\beta, \mathbf{q}', \sigma'} \left[|Q_{i\beta\mathbf{q}'}(t_1, \sigma')|^2 (1 - \exp[-i\mu_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')t_1]) + \right. \\
 & + |Q_{i\beta\mathbf{q}'}(t_2, \sigma')|^2 (1 - \exp[i\mu_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')t_2]) - Q_{i\beta\mathbf{q}'}^*(t_1, \sigma') Q_{i\beta\mathbf{q}'}(t_2, \sigma') \times \\
 & \left. \times (1 - \exp[-i\mu_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')t_1]) (1 - \exp[i\mu_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')t_2]) \right]. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Функция (38) обладает очевидными свойствами

$$P_{iq}^*(t_1, t_2) = P_{iq}(t_2, t_1), \quad \lim_{q \rightarrow 0} P_{iq}(t_1, t_2) \rightarrow 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_2} P_{iq}(t_1, t_2) \rightarrow 0.$$

Формула (37) содержит искомые поправки к полуклассическому выражению для числа испускаемых квантов. Она переходит в полуклассическую при малых $|P_{iq}(t_1, t_2)| \ll 1$. Это отличие формул с физической точки зрения обусловлено учетом взаимного влияния испускаемых квантов в (37) и отсутствием учета этого фактора в полуклассической теории. Распределение вероятностей чисел испущенных квантов в каждом состоянии уже не будет подчиняться закону Пуассона, отражая тем самым свойство нелинейности электромагнитных явлений в квантовой теории.

Формула вида (37), очевидно, может быть использована при произвольном движении частицы, а не только в случае движения в синхротроне. Для этого следует только переопределить величины $v_{i\sigma'}(\mathbf{q}, t)$, которые в самом простом подходе могут быть приближенно вычислены для среднего значения вектора \mathbf{k}_i и усреднены по спину (в таком случае скорости $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ и функция (38) перестают зависеть от индексов i, σ'). Оценим P_q для случая, когда скорость $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ постоянна и равна \mathbf{v}_0 . При этом

$$Q_{\alpha\mathbf{q}}(t) = \frac{Z}{c} g_{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{e}_{\alpha\mathbf{q}}^* \mathbf{v}_0}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_0} e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_0)t}.$$

Подставляя полученный результат в (38), получаем выражение, которое логарифмически расходится вследствие медленного убывания подынтегральной функции при $q' \rightarrow \infty$. Это обстоятельство представляет собой проявление ультрафиолетовой расходимости, часто встречающейся в электродинамике. В отличие от фейнмановской теории возмущений ультрафиолетовая расходимость не приводит к катастрофе: из нее лишь следует, что (в отличие от предсказаний полуклассической теории) равномерно движущаяся частица не сопровождается поперечными квантами. Этот пример наглядно демонстрирует зависимость формы проявления ультрафиолетовой расходимости от используемого варианта теории возмущений. Более подробное рассмотрение вопроса выходит за рамки данной работы, в которой для устранения ультрафиолетовой особенности будет применен стандартный прием, заключающийся во введении некоторого предельного импульса $q_c \sim mc$. Получающееся в этом случае выражение для модуля функции (38) обладает тем свойством, что оказывается достаточно малым и весьма медленно (логарифмически) изменяющимся при изменении времен t_1, t_2 . Явная оценка функции (38) для постоянного значения $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ проводится в следующем разделе.

6. ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ФОТОНОВ

Рассмотрим асимптотическое поведение величины (37) при $\omega = qc \rightarrow 0$. Как известно, в классической электродинамике (см., например, [11]), как и в полуклассической теории, имеет место характерная зависимость $n_{\alpha\mathbf{q}} \propto 1/\omega^3$ при $\omega \rightarrow 0$. Ввиду этого

при интегрировании по импульсам полное число излучаемых квантов оказывается расходящимся логарифмически на нижнем пределе. Внесет ли какое-либо изменение в эту закономерность учет влияния излучения на состояние излучающей частицы, учитываемое формулой (37)? Для ответа на данный вопрос рассмотрим модельную задачу, когда заряженная частица, двигаясь с некоторой постоянной скоростью v_1 , при столкновении с точечным рассеивателем в момент времени $t_3 > 0$ изменяет свою скорость мгновенно на малую величину $\Delta v = v_2 - v_1$, $|\Delta v| \ll v_1$, а затем продолжает двигаться с постоянной скоростью v_2 . Условие малости скачка скорости позволит в дальнейшем значительно упростить расчет. Кроме того, поскольку разрыв скорости означает бесконечное ускорение, можно ожидать появления нефизических результатов. Требование малости величины скачка делает скорость почти непрерывной функцией, помогая избежать появления таковых. При проведении вычислений по формуле (37) возникают проблемы с внезапным включением взаимодействия в начальный момент времени, нарушающим закон сохранения заряда, и появляющимся вследствие этого нарушения фиктивным излучением. Чтобы избавиться от необходимости вычеркивать фиктивные члены, можно прибегнуть к описанной выше в разд. 3 процедуре медленного включения взаимодействия.

Поскольку скорость частицы предполагается определенной, в выражениях (38) опускаем индекс i и заменяем векторы $v_{i\sigma}$ на текущее значение скорости. Проведем вычисление получающейся таким образом функции $P_q(t_1, t_2)$, предполагая $\tau_{in} \ll t_3 \ll t$. Для этого предварительно оценим величины $f(t_1, t_2) = \exp[\pm i\mathbf{q}\mathbf{q}'t_{1,2}/m\gamma]$, входящие в правую часть (38). Ввиду того что излучение происходит в момент изменения скорости частицы, рассмотрим окрестность точки $t_1 = t_3, t_2 = t_3$, предполагая $t_3 \sim \gamma_0 m/q^2$. Вектор \mathbf{q}' представляет собой импульс, передаваемый движущейся частицей испускаемым квантам электромагнитного поля. Среднее значение этого импульса имеет порядок $m|\Delta v|$, поэтому при малых $q \ll m|\Delta v|$ отношение q'/q может быть велико. Ввиду данного обстоятельства абсолютное значение показателей экспонент в $f(t_1, t_2)$ в исследуемой области изменения параметров велико, а сами экспоненты оказываются быстро осциллирующими функциями и приносят пренебрежимо малые вклады в (38). Заранее исключая эти вклады, приведем (38) к более простому виду

$$P_q(t_1, t_2) = \sum_{\beta, \mathbf{q}'} \left[|Q_{\beta\mathbf{q}'}(t_1)|^2 + |Q_{\beta\mathbf{q}'}(t_2)|^2 - Q_{\beta\mathbf{q}'}^*(t_1)Q_{\beta\mathbf{q}'}(t_2) \left(1 + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{q}'(t_1-t_2)/m\gamma} \right) \right]. \quad (39)$$

Проведем явное вычисление функции (39) для $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{v}_0 = \text{const}$. В этом случае, предполагая q_c много меньшим среднего импульса излучающей частицы, после взятия интеграла по \mathbf{q}' получаем

$$P_q(t_1, t_2) = \frac{Z^2}{4\pi^2 c^3} \int d\omega' \frac{([\mathbf{n}'\mathbf{v}_0])^2}{(1 - \mathbf{n}'\mathbf{v}_0/c)^2} \{ i\text{Si}(\omega_2(t_1 - t_2)) + \\ + i\text{Si}((\omega_2 + \omega_1)(t_1 - t_2)) + 2\tilde{C} - \text{Ci}(\omega_2|t_1 - t_2|) - \\ - \text{Ci}(|\omega_2 + \omega_1||t_1 - t_2|) + \ln(\omega_2|\omega_2 + \omega_1|(t_1 - t_2)^2) \}, \quad (40)$$

где $\mathbf{n}' = \mathbf{q}'/q'$, $\omega_1 = q_c \mathbf{n}'\mathbf{q}'/m\gamma$, $\omega_2 = (c - \mathbf{n}'\mathbf{v}_0)q_c$, $\text{Si}(\xi)$, $\text{Ci}(\xi)$ — интегральные синус и косинус, $\tilde{C} = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Выражение (40) обращается в нуль при $t_1 = t_2$ и медленно нарастает при увеличении разности времен $\Delta t = |t_1 - t_2|$. В нерелятивистском пределе при больших $\Delta t \gg 1/cq_c$ функция (40) аппроксимируется

следующим выражением

$$P_q(t_1, t_2) \approx \frac{2Z^2 v_0^2}{3\pi c^3} \left[i\pi \operatorname{sign}(t_1 - t_2) + 2 \left(\tilde{C} + \ln(cq_c) + \ln|t_1 - t_2| \right) \right]. \quad (41)$$

Обратим внимание на малость коэффициента перед квадратной скобкой в данной формуле. При увеличении Δt вещественная часть выражения (41) логарифмически возрастает, однако характерное время нарастания оказывается экспоненциально большим, поэтому во всей области изменения аргументов функцию (41) можно считать малой величиной.

Перейдем к оценке числа испущенных фотонов за все время движения в нерелятивистском случае. Проводя интегрирование по частям, получаем, например,

$$\begin{aligned} n_{\alpha q}(t) = & -i \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_0^t dt_1 \mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}(t_1) e^{-i\omega t_1 + i\mathbf{q}\mathbf{r}(t_1)} \times \\ & \times \left[\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}(t_2)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_2) + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \exp \{i\omega t_2 - i\mathbf{q}\mathbf{r}(t_2) - P_q(t_1, t_2)\} \Big|_{t_2=0}^{t_2=t} - \right. \\ & \left. - \int_0^t dt_2 \exp \{i\omega t_2 - i\mathbf{q}\mathbf{r}(t_2) - P_q(t_1, t_2)\} \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}(t_2)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_2) + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Учет значения первого члена в квадратных скобках на нижнем пределе неоправдан вследствие нарушения закона сохранения заряда в начальный момент времени. При использовании процедуры медленного включения взаимодействия этот вклад оказывается равным нулю. Проведем затем интегрирование по частям по t_1 , используя те же соображения, что и при интегрировании по t_2 . Получим

$$\begin{aligned} n_{\alpha q}(t) \approx & \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \left| \frac{\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + i\partial P_q(t, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t} \right|^2 + \\ & + \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \exp \{i\omega(t_2 - t_1) + i\mathbf{q}(\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_2)) - P_q(t_1, t_2)\} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial t_1} \left[\frac{\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}(t_1)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_1) - i\partial P_q/\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}(t_2)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_2) + i\partial P_q/\partial t_2} \right) \right], \quad (42) \end{aligned}$$

где отброшены быстроосциллирующие члены, не вносящие вклада в суммарное выражение для числа испускаемых квантов. Первый член в правой части (42) отвечает той части поперечного поля, которая сопровождает движущуюся частицу и не связана с изменением ее скорости и с излучением. Поэтому ниже во всех расчетах характеристик излучения будет учитываться только второй, интегральный член.

При вычислении производных по времени в (42) возникают непрерывные и δ -образные слагаемые, при этом последние обусловлены разрывом скорости, производных $\dot{Q}_{\alpha q}$ и \dot{P}_q . Например,

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}(t_2)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_2) + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= i\theta(t_3 - t_2) \frac{\partial^2 P_q(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2)^2} + \\
 &+ i\theta(t_2 - t_3) \frac{\partial^2 P_q(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2)^2} + \\
 &+ \delta(t_2 - t_3) \left[\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3+0} - \right. \\
 &\left. - \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3-0} \right]. \tag{43}
 \end{aligned}$$

Здесь $\theta(\xi)$ — тета-функция Хэвисайда. Соотношение между непрерывными и δ -образными слагаемыми в (43) можно оценить следующим образом. Суммарный вклад от θ -функций можно снова взять по частям, при этом снова возникнет δ -образный вклад, умноженный на величину скачка подынтегральной функции в точке $t_2 = t_3$. Этот скачок будет содержать в качестве множителя вторую производную от P_q , которая по порядку величины может быть оценена произведением первой производной на некоторую среднюю частоту испускаемого кванта. Последняя не может превышать величину потери энергии движущейся частицей и в силу этого пропорциональна малому параметру $\lambda = \mathbf{v}_1 \Delta v / v_1^2$. Отсюда видно, что учет непрерывных слагаемых в (43) означал бы учет следующих членов разложения интеграла по параметру λ . Главным остается вклад от δ -функций, которым ниже и ограничимся.

Используя условие о медленном включении взаимодействия, получим

$$Q_{\alpha q}(t) = \frac{Z}{c} g_q \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1} e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1)t}, \quad \tau_{in} \ll t \leq t_3.$$

В области $t_3 < t$ результат имеет другой вид

$$Q_{\alpha q}(t) = \frac{Z}{c} g_q \left[\left(\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2} \right) e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1)t_3} + \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2} e^{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2)t} \right].$$

Имеем далее при $\tau_{in} \ll t_2 \leq t_3$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_q(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -i \sum_{\beta q'} Q_{\beta q'}^*(t_1) \left[\frac{Z}{c} g_{q'} (\mathbf{e}_{\beta q'}^* \mathbf{v}_1) e^{i(\omega - \mathbf{q}'\mathbf{v}_1)t_2} \times \right. \\
 &\times \left(1 + \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{q}\mathbf{q}'(t_1 - t_2)}{m\gamma} \right\} \right) + \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}'}{m\gamma} Q_{\beta q'}(t_2) \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{q}\mathbf{q}'(t_1 - t_2)}{m\gamma} \right\} \left. \right].
 \end{aligned}$$

При $t_2 > t_3$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_q(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= \sum_{\beta q'} \left[-2 \frac{Z^2}{c^2} g_{q'}^2 \sin \left\{ (\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_2) \frac{t_2 - t_3}{2} \right\} (\mathbf{e}_{\beta q'}^* \mathbf{v}_2) \times \right. \\
 &\times \left(\frac{\mathbf{e}_{\beta q'} \mathbf{v}_1}{\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{e}_{\beta q'} \mathbf{v}_2}{\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_2} \right) - i \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}'}{m\gamma} Q_{\beta q'}^*(t_1) Q_{\beta q'}(t_2) \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{q}\mathbf{q}'(t_1 - t_2)}{m\gamma} \right\} - \\
 &\left. - i Q_{\beta q'}^*(t_1) \frac{Z}{c} g_{q'} (\mathbf{e}_{\beta q'}^* \mathbf{v}_2) \exp \{ i(\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_2)t_2 \} \left(1 + \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{q}\mathbf{q}'(t_1 - t_2)}{m\gamma} \right\} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Замечаем, что $\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2$ непрерывно по t_1 .

Вычисляем δ -образный вклад в интегралы по t_2 в (42), устремляя $t \rightarrow \infty$:

$$n_{\alpha q}(\infty) = \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \int_0^\infty dt_1 \exp[-i\omega(t_1 - t_3) + iq(\mathbf{r}_0(t_1) - \mathbf{r}_0(t_3)) - P_q(t_1, t_3)] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial t_1} \left[\frac{\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}(t_1)}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(t_1) - i\partial P_q(t_1, t_3)/\partial t_1} \left(\frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3+0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1 + i\partial P_q(t_1, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3-0} \right) \right].$$

Проведем здесь интегрирование по t_1 , ограничиваясь также δ -образным вкладом. Учитывая $P_q(t_2, t_1) = P_q^*(t_1, t_2)$, получаем

$$n_{\alpha q}(\infty) = \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \left| \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + i\partial P_q(t_3, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3+0} - \frac{\mathbf{e}_{\alpha q}^* \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1 + i\partial P_q(t_3, t_2)/\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3-0} \right|^2. \tag{44}$$

Формула (44) решает поставленную задачу. Если не учитывать производных от P_q в знаменателях, то она совпадает со стандартными выражениями для чисел испускаемых в столкновении низкочастотных квантов, получающимися как в классической [11], так и в квантовой электродинамике при использовании стандартной формы теории возмущений [6]. Оценим производные от P_q , входящие в (44). Имеем

$$\frac{\partial P_q(t_3, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3+0} = -2i \frac{Z^2}{c^2} \sum_{q'} g_{q'}^2 \frac{[\mathbf{q}'\mathbf{v}_1][\mathbf{q}'\mathbf{v}_2]}{q'^2(\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_1)} + O_1(q),$$

где $O_1(q)$ — величина первого порядка по q . При малых q , учитывая

$$\frac{\partial P_q(t_3, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_2=t_3-0} = -2i \frac{Z^2}{c^2} \sum_{q'} g_{q'}^2 \frac{[\mathbf{q}'\mathbf{v}_1]^2}{q'^2(\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_1)} + O_1(q),$$

а также $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_1$, получаем

$$n_{\alpha q}(\infty) = \frac{Z^2}{c^2} g_q^2 \left| \frac{\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_2 + \Delta} - \frac{\mathbf{e}_{\alpha q} \mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}_1 + \Delta} \right|^2. \tag{45}$$

Здесь

$$\Delta = 2 \frac{Z^2}{c^2} \sum_{q'} g_{q'}^2 \frac{([\mathbf{q}'\mathbf{v}_1])^2}{q'^2(\omega' - \mathbf{q}'\mathbf{v}_1)}. \tag{46}$$

В нерелятивистском пределе $v_0 \ll c$ из (46) получаем $\Delta \approx 4Z^2 v_1^2 q_c / 3\pi c^2$. Формула (45) не содержит инфракрасной особенности. Отклонение от закона $n_{\alpha q} \propto 1/\omega^3$ при уменьшении ω начинается с энергии порядка Δ . Эта энергия тем меньше, чем меньше энергия относительного движения заряженной частицы и точечного рассеивателя. Полученная оценка будет справедлива и в том случае, если скорость частицы изменяется не мгновенно, но за малое время по сравнению с временем формирования низкочастотного кванта.

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ПРИ СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Применим изложенный выше подход к вычислению матрицы плотности излучающей частицы. Точное выражение для нее в представлении, реализуемом преобразованием (23), имеет вид

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \langle t | \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \tilde{\psi}(\mathbf{x}', t) | t \rangle. \quad (47)$$

Рассчитаем (47) в первом приближении, заменяя вектор $|t\rangle$ на вектор начального состояния $|0\rangle$. Используя правило Бейкера–Хаусдорфа при надлежащем преобразовании операторов эволюции $\hat{U}_0(t)$, $\hat{U}_0^\dagger(t)$, а также операторы $\hat{Q}_{\alpha q}(t)$ в форме (20), легко получаем

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \gamma_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \exp[-S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t)], \quad (48)$$

где $\gamma_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \phi^*(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}', t)$ — значение матрицы плотности, не учитывающее влияние излучения и определяющееся волновой функцией $\phi(\mathbf{x}, t)$ точно описанного состояния электрона во внешнем магнитном поле. Функция $S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t)$, стоящая в показателе экспоненты, дается выражением

$$S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) = \sum_{\mathbf{q}, \alpha} |Q_{\alpha q}(t)|^2 [1 - e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}] \quad (49)$$

и обращается в нуль при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. При $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$ функция (46) приобретает максимальное значение, равное суммарному числу испущенных к данному моменту времени квантов. Средний импульс частицы может быть вычислен при помощи формулы

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_0 + i \int |\phi(\mathbf{x}, t)|^2 \nabla' S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} d^3x. \quad (50)$$

Отсюда вытекает, что значение градиента $\nabla' S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ определяет скорость уменьшения среднего импульса частицы вследствие испускания квантов. Если начальное состояние было стационарным, то величина $|\phi(\mathbf{x}, t)|^2$ не зависит от времени. В этом случае средняя сила, действующая на частицу, оказывается равной

$$\mathbf{F}_b = i \int |\phi_0(\mathbf{x}, t)|^2 \nabla' S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} d^3x. \quad (51)$$

Вычисление функции $S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ при синхротронном излучении совершенно аналогично проведенному в разд. 4 расчету скорости генерации квантов. Учитывая, что функция S фактически зависит от разности $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, для усредненного за период значения показателя получаем

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathbf{r}, t) = t \frac{Z^2}{c} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sum_{n=1}^\infty n\omega_0 \left[\text{ctg}^2 \theta J_n^2 \left(\frac{nv_0}{c} \sin\theta \right) + \frac{v_0^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv_0}{c} \sin\theta \right) \right] \times \\ \times \left(1 - J_0 \left(r \frac{n\omega_0}{c} \sin\theta_0 \sin\theta \right) \exp \left(ir \frac{n\omega_0}{c} \cos\theta_0 \cos\theta \right) \right), \quad (52) \end{aligned}$$

где θ_0 — полярный угол вектора \mathbf{r} относительно оси, перпендикулярной плоскости орбиты, $r = |\mathbf{r}|$. В ультрарелятивистском случае более удобна приближенная формула

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathbf{r}, t) = & t \frac{2^{2/3} Z^2 \omega_0}{\pi c} \int_0^\infty d\zeta \zeta^{1/3} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times \\ & \times \left\{ \operatorname{ctg}^2 \theta \operatorname{Ai}^2 \left[(\zeta/2)^{2/3} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{v_0^4}{c^4} \frac{2^{2/3} \sin^2 \theta}{\zeta^{2/3}} \operatorname{Ai}'^2 \left[(\zeta/2)^{2/3} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \right] \right\} \times \\ & \times \left(1 - J_0 \left(\sin \theta_0 \sin \theta r \frac{\zeta \omega_0}{c} \right) \exp \left(i \cos \theta_0 \cos \theta r \frac{\zeta \omega_0}{c} \right) \right), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\operatorname{Ai}(z)$ — функция Эйри, $\operatorname{Ai}'(z)$ — ее производная. Мнимая часть усредненного выражения для S , даваемая формулами (52) и (53), очевидно, обращается в нуль.

Согласно [10], матрица плотности (48) описывает ансамбль чистых (по фон-Нейману) состояний, свойства которых определяются поведением величины $e^{-S(\mathbf{r}, t)}$. Разложение матрицы (48) по матрицам плотности чистых состояний записывается в виде

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int d^3 a \Phi_{\mathbf{a}}^*(\mathbf{x}, t) \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}', t) N_{\mathbf{a}}(t), \quad (54)$$

где $\Phi_{\mathbf{a}}$ — волновые функции чистых состояний, $N_{\mathbf{a}}(t) d^3 a$ — вероятности их реализации в текущий момент времени. Функции $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)$ пропорциональны произведениям волновой функции $\phi(\mathbf{x}, t)$ на функции $\chi(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t)$, где $\chi(\mathbf{x}, t)$ является решением интегрального уравнения

$$G(\mathbf{r}, t) = e^{-S(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t)} = \int \chi^*(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t) \chi(\mathbf{x}' - \mathbf{a}, t) d^3 a. \quad (55)$$

В этой связи возникает вопрос о существовании и единственности решения данного уравнения. Записывая (55) в фурье-представлении

$$G_{-\mathbf{q}}(t) = \chi_{\mathbf{q}}^*(t) \chi_{\mathbf{q}}(t),$$

однозначно определяем модуль искомой функции, фаза которой остается неопределенной. Однако неопределенность фазы функции является непосредственным следствием трансляционной инвариантности уравнения (55), общее решение которого имеет, следовательно, вид

$$\chi_{\mathbf{q}} = e^{i\alpha} \sqrt{G_{-\mathbf{q}}}$$

при произвольном вещественном α . Решение существует в том случае, если фурье-образ $G_{\mathbf{q}}$ является вещественной неотрицательной величиной. Вещественность вытекает непосредственно из нечетности $\operatorname{Im} S(\mathbf{r}, t)$ и четности $\operatorname{Re} S(\mathbf{r}, t)$ по отношению к инверсии, а неотрицательность следует из факта монотонности возрастания $\operatorname{Re} S(\mathbf{r}, t)$ при увеличении расстояния r .

Эффективный размер области локализации начального состояния в плоскости орбиты составляет $\delta\rho \sim \sqrt{R/\gamma v_0}$ (см. Приложение). Величина $\delta\rho$, как правило, намного превышает атомные размеры. В направлении вдоль магнитного поля размер области локализации начального состояния вообще неограничен и задается начальной неопределенностью z -компоненты импульса. Последняя, очевидно, определяется макроскопическими параметрами конкретной экспериментальной установки. Излучение может

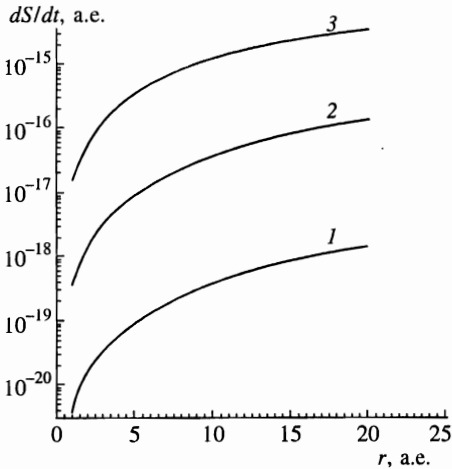


Рис. 1. Скорость нарастания функции $S(r, t)$, определяющей пространственную ширину пакета электрона в синхротроне «ФИАН-60» в зависимости от расстояния r при наблюдении под разными углами по отношению к направлению магнитного поля. $\theta_0 = \pi/200$ (1), $\pi/20$ (2), $\pi/2$ (3)

существенно изменить картину и привести к пространственной локализации излучающей частицы в области порядка атомных размеров. Для того чтобы оценить скорость изменения ширин состояний $\Phi_n(t)$ с течением времени, был проведен численный расчет функции $S(r, t)$ для набора параметров, характерных для синхротрона «ФИАН-60» ($E = 0.68$ ГэВ, $R = 2$ м). На рис. 1 представлены графики функции $\bar{S}(r)$ в зависимости от r для трех ориентаций вектора r . Верхняя кривая иллюстрирует поведение указанного фактора в плоскости орбиты электрона.

8. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Предлагаемый в работе вариант теории возмущений позволил установить, что некоторые из фундаментальных проблем квантовой электродинамики не инвариантны по отношению к изменению формы теории возмущений. В отношении инфракрасной расходимости это показано на простом примере излучения частицы, испытавшей мгновенное изменение скорости. Результаты получены для нерелятивистского случая, поскольку при рассмотрении излучения релятивистских частиц необходим более подробный анализ вопроса об ультрафиолетовой асимптотике подынтегрального выражения в формуле (38). Выбранный в данной работе путь устранения ультрафиолетовых расходимостей путем введения некоторого предельного импульса не обладает свойством ковариантности по отношению к преобразованиям Лоренца и не может поэтому применяться в последовательной релятивистской теории. Однако уже из предварительного рассмотрения вытекает, что в новом подходе проблема ультрафиолетовой расходимости не носит того катастрофического характера, который она имеет в традиционной квантовой электродинамике. Можно надеяться, что дальнейшие работы в данном направлении позволят продвинуться вперед в понимании проблемы.

Результаты расчетов матрицы плотности показали, что уменьшение пространственных размеров области локализации излучающих электронов до размера атома может быть достигнуто за макроскопическое время τ_c порядка десятых долей секунды. Возникает вопрос о том, справедливо ли применять изложенную выше теорию к таким

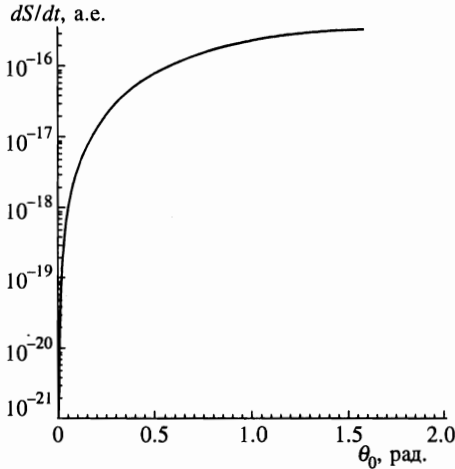


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но в зависимости от угла наблюдения θ_0 при одном и том же значении расстояния $r = 5$ а.е. Значения угла даны в радианах

большим временам. Дело еще осложняется тем, что в течение одного оборота по орбите на частицу воздействует вихревое электрическое поле, компенсирующее потерю энергии на излучение. Если допустить, что это поле действует в течение настолько малого промежутка времени, что приводит только к ускорению волнового пакета частицы как целого и не успевает существенно изменить его внутренние параметры, то не видно причин, по которым для проведения оценок теория не может быть экстраполирована на все время движения частицы в синхротроне. Время τ_c значительно меньше того, в течение которого пакет расплывался бы по причине неэквидистантности расположения уровней поперечного движения. Наблюдается анизотропия ширины: наиболее сжатым пакет оказывается в направлении поперек магнитного поля, наименее сжатым — в направлении поля. На рис. 2 изображена зависимость от угла при фиксированном значении расстояния r , из которой становится очевидной значительная вытянутость пакета вдоль направления магнитного поля.

Возможность осуществления сильной пространственной локализации излучающих частиц означает, что при достаточно большой длительности цикла ускорения в синхротроне движение частиц все с большей точностью должно описываться уравнениями классической механики. Это, тем не менее, не означает, что интенсивность излучения должна совпадать с предсказаниями классической электродинамики. Действительно, локализованное состояние в квантовой механике совершенно отлично по своим свойствам от локализованного состояния в классической теории Ньютона. При расчете траекторий движения волновых пакетов оправданием применимости уравнений Ньютона являются теоремы Эренфеста, однако при расчете интенсивности излучения определяющим фактором является не положение частицы, а ее импульс. Состояние с определенным импульсом в квантовой механике абсолютно делокализовано и в этом существенно отличается от состояний вида Φ_n . Ввиду этого наглядная интерпретация результатов расчета характеристик излучения на основе классических представлений затруднительна. Характерной общей особенностью полученных формул является то, что учет взаимного влияния испускаемых квантов уменьшает интенсивность излучения. Аналогичный результат был получен в работе [12] при исследовании излучения заряженных частиц, движущихся в сплошных средах (эффет Ландау–Померанчука).

Физика явления заключается в том, что случайные столкновения излучающей частицы с частицами среды могут уменьшить длину пути, на котором происходит когерентное нарастание интенсивности излучения. Нечто подобное происходит и при излучении в вакууме: множественное испускание квантов может играть роль тех многократных столкновений, которые приводят к уменьшению интенсивности излучения в сплошных средах.

Численные результаты получены совместно с В. А. Александровым. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-160-58).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Когерентные состояния релятивистского электрона при движении в однородном магнитном поле

Пусть

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}yH_0, \frac{1}{2}xH_0, 0\right),$$

где H_0 — напряженность магнитного поля, направленного вдоль оси z . Движение электрона в этом поле, подчиняющееся уравнению Дирака, неоднократно было предметом подробного рассмотрения (см., например, [13–15]). Приводимое ниже решение лишь в деталях отличается от известного. Введем понижающие операторы для двух независимых осцилляторов:

$$\hat{a}_1 = (1/2)\sqrt{m\omega_L}(x + i\hat{p}_x/m\omega_L - iy + \hat{p}_y/m\omega_L),$$

$$\hat{a}_2 = (1/2)\sqrt{m\omega_L}(x + i\hat{p}_x/m\omega_L + iy - \hat{p}_y/m\omega_L),$$

где $\omega_L = |e|H_0/2mc$ — ларморовская частота. Частота первого независимого осциллятора равна удвоенной ларморовской частоте $\omega_1 = 2\omega_L$, частота второго равна нулю. Вместе с сопряженными им повышающими операторами понижающие операторы удовлетворяют системе стандартных бозевских коммутационных соотношений. Операторы $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger$ описывают, как известно, вращательное движение электрона в магнитном поле, в то время как операторы $\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ описывают положение, флуктуации и другие характеристики центра окружности вращения, средний радиус которой равен R .

Введем матричный оператор

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{p}_z & -2i\sqrt{m\omega_L} \hat{a}_1 \\ 2i\sqrt{m\omega_L} \hat{a}_1^\dagger & -\hat{p}_z \end{pmatrix}.$$

Энергии квантовых состояний электрона оказываются равными

$$E_\xi = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2 + 4\omega_L m c^2 \left(n_1 + \sigma + \frac{1}{2}\right)}, \quad (\text{П.1})$$

где индекс $\xi = (n_1, n_2, \sigma, p)$ является собирательным для указанного в скобках набора квантовых чисел. Числа $n_1, n_2 | = 0, 1, 2, \dots$ нумеруют квантовые состояния независимых осцилляторов, при этом n_1 является главным квантовым числом. Проекция импульса на ось z обозначена через p . Дискретная переменная σ может принимать значения $\pm 1/2$, отвечающие двум возможным значениям проекции спина на направление магнитного поля. Биспинор, описывающий стационарное состояние электрона в магнитном поле, дается выражением

$$\psi_\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_\xi}} \left(\frac{\sqrt{E_\xi + mc^2} \varphi_\xi(\mathbf{r})}{c} \right) e^{-iE_\xi t}, \tag{П.2}$$

где $\varphi_\xi(\mathbf{r})$ представляет собой спинор вида

$$\varphi_\xi(\mathbf{r}) = e^{ipz} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \varphi_{0\sigma}(\rho). \tag{П.3}$$

Здесь

$$\varphi_{0\sigma}(\rho) = \sqrt{m\omega_L/\pi} \exp(-m\omega_L \rho^2/2) \chi_\sigma,$$

при этом

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \chi_{1/2}^* = (1, 0), \quad \chi_{-1/2}^* = (0, 1),$$

нормировочный размер вдоль оси z положен равным единице.

Произвольное решение уравнения Дирака представляет собой суперпозицию биспиноров (П.2). Рассмотрим вопрос о том, какая именно суперпозиция может соответствовать начальному состоянию электрона в синхротроне. При стандартных параметрах синхротрона (например, для синхротрона «ФИАН-60») среднее значение n_1 очень велико (порядка 10^{13}), и если предположение о большой степени независимости испускания каждого кванта справедливо, то справедлив и закон Пуассона. В этом случае следует ожидать весьма малого значения относительной флуктуации числа n_1 ($\lambda = \Delta n_1 / \bar{n}_1 \sim 10^{-6}$). Поэтому практически во всех слагаемых, входящих в искомую суперпозицию, можно провести разложение по степеням λ , тогда

$$E_\xi \approx E_{\sigma p} + (2\omega_L/\gamma_{\sigma p}) \Delta n_1,$$

где $E_{\sigma p}$ — значение E_ξ при $\xi = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \sigma, p)$, $\gamma_{\sigma p} = E_{\sigma p}/mc^2$. Видно, что спектр становится практически эквидистантным с расстояниями между уровнями, равными средней частоте вращения электрона $\omega_{\sigma p} = 2\omega_L/\gamma_{\sigma p}$ вокруг направления магнитного поля. При малой относительной флуктуации n_1 во всех неэкспоненциальных сомножителях можно положить $E_\xi \approx E_{\sigma p}$. Отвечающая всем вышеперечисленным требованиям суперпозиция должна иметь вид

$$\psi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\sigma p}}} \left(\frac{\sqrt{E_{\sigma p} + mc^2} \varphi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t)}{c} \right) \exp(-i\Delta E_{\sigma p} t), \tag{П.4}$$

где $\Delta E_{\sigma p} = E_{\sigma p} - \omega_{\sigma p} \bar{n}_1$,

$$\varphi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t) = e^{ipz} \exp \left[\sqrt{\bar{n}_1} (e^{i\alpha_1} \hat{a}_1^\dagger(t) - e^{-i\alpha_1} \hat{a}_1(t)) + \sqrt{\bar{n}_2} (e^{i\alpha_2} \hat{a}_2^\dagger(t) - e^{-i\alpha_2} \hat{a}_2(t)) \right] \varphi_{0\sigma}(\rho),$$

причем $\hat{a}_1^\dagger(t) = \hat{a}_1^\dagger \exp(i\omega_{\sigma p}t)$, $\hat{a}_2^\dagger(t) = \hat{a}_2^\dagger$, α_1, α_2 — некоторые постоянные фазы, импульс вдоль оси z считается равным p . Компоненты вектора плотности тока в состоянии (П.4) даются равенствами

$$\begin{aligned} j_{\sigma p}^x &= \frac{2c^2}{E_{\sigma p}} \sqrt{m\omega_L \bar{n}_1} |\varphi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t)|^2 \sin(\omega_{\sigma p}t + \alpha_1), \\ j_{\sigma p}^y &= -\frac{2c^2}{E_{\sigma p}} \sqrt{m\omega_L \bar{n}_1} |\varphi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t)|^2 \cos(\omega_{\sigma p}t + \alpha_1), \\ j_{\sigma p}^{(z)} &= -\frac{c^2 p}{E_{\sigma p}} |\varphi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t)|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Среднеквадратичная ширина пакета в радиальном направлении в состоянии (П.4) определяется радиальным поведением функции $\varphi_{0\sigma}(\rho)$ и оценивается величиной $\Delta\rho = \sqrt{2Rc/E_{\sigma p}}$. Что касается азимутального направления, то стационарные состояния вида (П.2) полностью делокализованы. Действительно, в них момент точно определен и в силу соотношения неопределенностей для переменных момент–угол они не могут быть локализованы по углу. В отличие от этого, состояние (П.4) не имеет определенно-го момента, угловая ширина его ограничена и составляет по азимуту величину порядка $\Delta\phi \sim 1/\sqrt{\bar{n}_1}$ (предположено, что неопределенность положения центра орбиты намного меньше ее радиуса, поэтому $n_2 \ll n_1$), что после умножения на радиус орбиты дает то же расстояние, что и $\Delta\rho$ (для синхротрона «ФИАН-60» это расстояние имеет величину порядка микрона). Ширина пакета вдоль оси z определяется такими макроскопическими параметрами установки, как диафрагмы, и по этой причине может намного превышать радиальную или азимутальную ширины. В этом случае пакету соответствует некоторая суперпозиция состояний вида (П.4)

$$\psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sum_p C_p \psi_{\sigma p}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П.6})$$

где постоянные C_p удовлетворяют условию нормировки и обеспечивают, например, гауссову зависимость от проекции импульса на ось z со средней точкой $p = 0$:

$$C_p = (2\pi\delta_0^2)^{1/4} e^{-p^2\delta_0^2/4}.$$

Если считать пространственную ширину пакета вдоль оси z много большей радиальной, то $\delta_0 \gg \Delta\rho$ и в этом случае состояние (П.6) ассоциируется с вытянутым вдоль направления магнитного поля малым симметричным эллипсоидом, вращающимся в таком положении по круговой орбите вокруг оси, параллельной z . Для оценки времени расплывания пакета в радиальном или в азимутальном направлениях следует удержать следующий член разложения энергии E_ξ по Δn_1 . Это дает время расплывания, обусловленного неэквидистантностью уровней поперечного движения, $\tau_1 \sim \gamma_0 R^2 / \Delta n_1$. Здесь γ_0 представляет собой лоренц-фактор для пучка электронов в синхротроне. В рассматриваемом случае синхротрона «ФИАН-60» время τ_1 оценивается величиной порядка десяти секунд.

Литература

1. И. М. Тернов, В. В. Михайлин, *Синхротронное излучение*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
2. А. И. Никишов, ЖЭТФ **110**, 515 (1996).
3. В. И. Ритус, ЖЭТФ **110**, 526 (1996).
4. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **110**, 1629 (1996).
5. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. *Классическая теория поля (новые проблемы)*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград (1949).
6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
8. Г. М. Филиппов, Поверхность. Физика. Химия. Механика, № 3, 52 (1997).
9. Г. М. Филиппов, Поверхность. Физика. Химия. Механика, № 12, 73 (1995).
10. Г. М. Филиппов, ЖЭТФ **101**, 1634 (1992).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
12. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, Докл. АН СССР **92**, 735 (1953).
13. В. В. Додонов, Е. В. Курмышев, В. И. Манько, Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева **176**, 128 (1986).
14. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, В. Д. Скаржинский, Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева **176**, 151 (1986).
15. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, В. Д. Скаржинский, Препринт ФИАН № 101 (1986).