

РЕЗОНАТОР ФАБРИ–ПЕРО В ПОЛЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

М. В. Сажин

*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 апреля 1997 г.

Рассмотрена структура электромагнитного поля внутри лазерного резонатора — детектора гравитационных волн. Подробно обсуждаются свойства пространственной и временной фаз стоячей электромагнитной волны, определяются поправки к электрическому полю волны при воздействии гравитационного излучения на оптическую систему.

1. ВВЕДЕНИЕ

В наше время одной из наиболее интенсивно развивающихся областей науки является гравитационно-волновая астрономия [1, 2]. Наиболее перспективными детекторами для регистрации импульсов из космоса являются лазерные интерферометры, которые разрабатываются в нескольких центрах. Действие гравитационной волны на интерферометр (например, Майкельсона) может быть интерпретировано как относительная деформация обоих плечей $\Delta l/l \sim h$, причем деформация одного плеча имеет знак «+», а деформация другого плеча — знак «-». Безразмерный параметр h есть мера отклонения метрики от евклидовой в поле гравитационной волны.

Реалистический прогноз амплитуды всплесков из космоса предлагает величину $h \sim 10^{-21} - 10^{-23}$. Даже с плечом порядка 10 км необходимо регистрировать смещения $\sim 10^{-17}$ см. Это трудная задача, требующая привлечения принципов квантовых неразрушающих измерений. Для реализации таких измерений было разработано несколько схем. Все они обладали одним недостатком — нереалистичными требованиями к лазерной накачке или к свойствам регистрирующих элементов.

Недавно [3] была разработана QND-схема, основанная на использовании нелинейных свойств диэлектрической проницаемости некоторой пластинки, помещенной внутрь микроволнового контура. Основное достоинство рассматриваемой схемы, по сравнению с предыдущими, заключалось в том, что требования на мощность лазера накачки W резко понижались, что делает такую схему значительно привлекательнее с точки зрения возможной реализации.

В статье [3] были также сформулированы требования к процедуре измерения и самому измерительному устройству. В частности, из такой процедуры вытекали определенные требования к структуре электромагнитного поля в оптическом резонаторе. В упомянутой статье [3] нет строгого обоснования отклика системы на действие гравитационной волны. Структура поля была рассмотрена на качественном уровне, в котором были опущены многие важные детали процесса.

Поэтому возникла необходимость в детальном рассмотрении структуры электромагнитного поля внутри интерферометра при воздействии поля гравитационной волны на

него. В идеальном (без затухания) оптическом резонаторе формируется стоячая оптическая волна, удовлетворяющая граничным условиям на зеркалах. При этом в пучностях электромагнитного поля интенсивность колеблется с удвоенной частотой волны, а в узлах поле равно нулю. В идеальных резонаторах появляется различие между временной и пространственной фазами волны. Оно заключается в том, что для детектирования вариаций временной фазы нужна опорная волна (роль которой в гравитационных детекторах выполняет оптический луч, распространяющийся в соседнем плече), а для детектирования вариаций пространственной фазы, жестко привязанной в силу граничных условий к механическим опорам системы, нужен детектор, развязанный с механическими опорами и смещающийся в поле гравитационной волны. Вместо описанного смещения допускается также смещение узлов стоячей волны внутри резонатора.

Распространение электромагнитной волны в поле гравитационной волны неоднократно рассматривалось в литературе. Достаточно упомянуть несколько работ [4–8], в которых рассматривалось распространение электромагнитной волны в поле гравитационной волны при использовании приближения геометрической оптики и еще при нескольких упрощающих предположениях. Ниже распространение электромагнитной волны также будет рассматриваться при использовании приближения геометрической оптики, а также добавится адиабатичность воздействия гравитационной волны на интерферометр.

В статье будет проанализирована структура электромагнитного поля в идеальных резонаторах двух конфигураций — обычный (линейный) резонатор Фабри–Перо и изломанный резонатор Фабри–Перо, одно из плеч которого перпендикулярно другому. Во втором случае конфигурация резонатора напоминает конфигурацию резонатора Майкельсона. Однако есть одно важное отличие. Если в интерферометре Майкельсона плечи соединяются полупрозрачным зеркалом, то во взятом нами резонаторе угловой отражатель является идеально отражающим зеркалом. Другими словами, и в первом, и во втором резонаторах потери (как на затухание, так и на пропускание) отсутствуют. Однако если в линейном резонаторе Фабри–Перо эффект вариации положения узла стоячей электромагнитной волны с частотой гравитационной волны отсутствуют, то в изломанном резонаторе такой эффект является максимальным.

Цель данной статьи — детально рассмотреть структуру электромагнитного поля внутри каждого из резонаторов в приближении геометрической оптики и адиабатического воздействия гравитационной волны. В первом разделе рассматривается решение уравнений Максвелла в приближении геометрической оптики. Во втором разделе анализируется более простой случай — линейный резонатор. В третьем разделе рассматривается изломанный резонатор и определяется структура электромагнитного поля, а также вычисляется поправка к полю при воздействии гравитационной волны.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ С ПОЛЕМ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

В качестве гравитационного поля будем рассматривать плоскую гравитационную волну, заданную в синхронной системе отсчета уравнением. Метрика в поле такой волны имеет вид

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta,$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — метрика Минковского, $h_{\alpha\beta}$ — поправки к метрическому тензору, α, β пробегают значения (0, 1, 2, 3). Всюду ниже будем полагать скорость света $c = 1$. Для простоты также будем считать, что гравитационная волна распространяется вдоль оси z , а плечи резонаторов лежат в плоскости xy . Такое предположение, хотя несколько и ограничивает общность рассмотрения, тем не менее дает правильный качественный ответ в поставленной задаче. Случай общего положения отличается от рассматриваемого тем, что возникают дополнительные компоненты электромагнитного поля, усложняющие задачу. Сделанные упрощения сохраняют физический смысл результатов, не затемняя его многочисленными выкладками.

В этом случае лишь три компоненты поправок к метрике отличны от нуля: $h_{11} = -h_{22}, h_{21}$. Будем обозначать их $h_{11} = h_+$ и $h_{12} = h_\times$. Можно написать общий вид поправок к метрике в виде

$$h_{ab} = h_+ t_{ab} + h_\times s_{ab}.$$

Здесь матрицы t_{ab} и s_{ab} описывают тензорную структуру поправок к метрике. При произвольном направлении падения гравитационной волны, когда ее волновой вектор в выбранной системе координат имеет компоненты

$$\mathbf{k} = \Omega(1, \sin \varphi \sin \theta, -\cos \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

(φ — азимутальный, а θ — полярный угол падения волны в системе xyz), явный вид матриц t_{ab} и s_{ab} через углы падения гравитационной волны есть

$$t_{ab} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi & (1 + \cos^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi & \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ (1 + \cos^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi & -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -\sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$s_{ab} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \cos \theta & \cos 2\varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ \cos 2\varphi \cos \theta & \sin 2\varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

После того как выписаны общие соотношения, необходимо сказать, что будет рассматриваться только одна поляризация h_+ , хотя это и не ограничивает общности.

Введем фурье-представление поправок к метрике, опуская здесь и ниже индекс (+):

$$h_{ab}(x^\mu) = t_{ab} \int d\Omega h(\Omega) \exp(i\Omega(t + z)).$$

Строго говоря, решение задачи о движении лучей света в поле гравитационной волны предполагает решение общековариантных уравнений Максвелла. В качестве компонент тензора Максвелла выберем величины $E_a = F_{0a}$ и $B_a = -(1/2\sqrt{\gamma})\epsilon^{abc} F_{bc}$ [9]. Эти величины удобны тем, что краевые условия для них формулируются так же, как для обычных векторов электрического и магнитного полей в теории электромагнетизма: тангенциальная компонента электрического поля на идеально проводящей поверхности равна нулю и нормальная компонента магнитного поля на такой поверхности тоже равна нулю.

Будем рассматривать решение общековариантных уравнений Максвелла в приближении геометрической оптики, т.е. будем полагать, что вектор электрического поля описывается уравнением (см., например, [10])

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}e^{-iS}, \quad (1)$$

здесь \mathbf{a} — амплитуда электрического поля, S — эйконал. Приближение геометрической оптики предполагает представление вектора поля в виде произведения медленноменяющейся функции \mathbf{a} и быстроменяющейся функции e^{-iS} ; следует подчеркнуть, что градиент функции $\partial S/\partial x$ является тоже медленной функцией. При этом в уравнениях возникает несколько малых параметров. Первый из них — амплитуда гравитационной волны h , второй — отношение характерной частоты гравитационной волны Ω к частоте электромагнитной волны ω . Будем проводить все вычисления с точностью до первого порядка по амплитуде гравитационной волны и с точностью до нулевого порядка по отношению частот. Кроме этих малых параметров, связанных с природой гравитационного поля и принятым приближением решения уравнений Максвелла, существуют еще несколько малых параметров, связанных с геометрией системы. Сразу подчеркнем, что основные малые параметры имеют величину $h \sim 10^{-23}$, $\Omega/\omega \sim 10^{-12}$, остальные малые параметры значительно больше. Так, например, отношение размеров системы к длине гравитационной волны $\sim 10^{-3}$.

Воспользуемся медленностью изменения \mathbf{a} и $\partial S/\partial x$, для того чтобы получить уравнение для S :

$$(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2)$$

Решать это уравнение будем стандартным методом разложения в ряд по малому параметру — амплитуде гравитационной волны h в виде $S = S_0 + S_1$. В нулевом приближении решение тривиально и выглядит следующим образом:

$$S_0 = \omega \pi_\alpha x^\alpha,$$

где π_α — вектор касательный к траектории распространения луча света, обладающего нулевой нормой: $\pi_\alpha \pi^\alpha = 0$, а ω — частота электромагнитной волны. Решение вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \exp \{-i\omega(t - x)\}$$

описывает плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси x .

Первое приближение по h имеет вид

$$\pi^\alpha \frac{\partial S_1}{\partial x^\alpha} = \omega \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \pi^\alpha \pi^\beta, \quad (3)$$

введем обозначение $\tau = t_{\alpha\beta} \pi^\alpha \pi^\beta$. Тогда решение уравнения (3) можно представить в виде

$$S_1(x^\alpha) = f(\pi_\alpha x^\alpha) + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t+z)}, \quad (4)$$

где f — произвольная функция аргумента $\pi_\alpha x^\alpha$.

Отметим, что полученное уравнение совпадает с уравнением геодезической линии в поле гравитационной волны [7].

Отражение электромагнитной волны от зеркал интерферометра в данной постановке задачи формулируется в виде краевых условий для электромагнитного поля на поверхности зеркал. Будем формулировать их обычным способом [12]. При этом необходимо жестко связывать краевые условия с поверхностью зеркал, а следовательно, необходимо знать закон движения зеркал в поле гравитационной волны.

В выбранной системе отсчета зеркала движутся вдоль линий $x^i = \text{const}$. Анализ движения зеркал в синхронной системе отсчета в поле гравитационной волны можно найти в [7]. Поэтому наши краевые условия будем записывать в виде

$$E_{\text{tang}}(x^i) = 0.$$

Помимо указанных приближений будем использовать еще одно упрощение. Будем полагать, что длина гравитационной волны значительно больше размера обоих плечей $\lambda_{GW} \gg l, L$. С одной стороны, это предположение значительно упрощает формулы, с другой стороны — позволяет не рассматривать переходы между модами оптического резонатора. Действие гравитационной волны на резонатор со стоячей электромагнитной волной внутри сводится не только к адиабатическим изменениям частоты и фазы. Гравитационная волна из-за параметрического механизма взаимодействия волн двух типов может индуцировать переходы между модами резонатора [11]. Вероятность переходов мала. Эта вероятность содержит малый множитель — амплитуду гравитационной волны. Безусловно, эффект адиабатического изменения частоты и фазы тоже пропорционален амплитуде гравитационной волны и в этом смысле оба эффекта одного порядка. Однако есть одна принципиальная деталь. Переходы между модами начинаются в том случае, когда частота гравитационной волны больше или равна разности частот между двумя соседними модами:

$$\Omega > \frac{2\pi}{l},$$

l — характерный размер плеча. Из этого неравенства вытекает ограничение на соотношение длины гравитационной волны и размер оптической системы. Если мы хотим избежать перехода между модами, должно соблюдаться неравенство $\lambda_{GW} > l$. Поэтому при выбранном условии на спектральный диапазон чувствительности детектора можно ограничиться обсуждением лишь эффектов адиабатического изменения фазы и частоты.

3. ЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАТОР ФАБРИ–ПЕРО

Рассмотрим теперь структуру электромагнитного поля внутри линейного резонатора Фабри–Перо. Расположим этот резонатор вдоль оси x . Зеркала резонатора поставим перпендикулярно оси x . Гравитационная волна пусть по-прежнему распространяется вдоль оси z . Трехмерный вектор электрического поля выберем в виде $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$. Такой выбор вектора электрического поля служит упрощению задачи и достигает двух целей. Первая заключается в том, что в резонаторе не возникает векторных x -, y -компонент поля, а следовательно, легче проследить физический смысл вычислений. Второе преимущество заключается в том, что краевые требования на первом и втором зеркалах для компоненты поля E_z эквивалентны соответствующим краевым требованиям для компонент магнитного поля в этом резонаторе.

Луч света, который распространяется в положительном направлении оси x , будем называть первым, а луч, распространяющийся в отрицательном направлении, — вторым лучом. Первое зеркало расположим в точке $x = 0, y = 0, z = 0$, а второе — в точке $x = l, y = 0, z = 0$.

Соответственно, поле в первом луче будет определяться уравнением

$$E^{(1)} = ae^{-iS_1}, \quad (5)$$

$$S_1 = \omega(t - x) + \omega\sigma_1 + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t-x)}, \quad (6)$$

а поле во втором луче — уравнением

$$E^{(2)} = -ae^{-iS_2}, \quad (7)$$

$$S_2 = \omega(t + x) + \omega\sigma_2 + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t+x)}. \quad (8)$$

Отрицательный знак перед амплитудой поля второго луча выбран для того, чтобы сшивать значения эйконалов на зеркалах без скачка фазы на π ; σ_1, σ_2 — константы, определяемые условиями сшивки. Значения эйконала в (1) — действительные числа, поэтому после нахождения интегралов в (6), (8) надо взять их действительные части и подставить в выражения (5), (7) для электрического поля.

Краевые условия на зеркалах для выбранных компонент электрического поля имеют вид

$$E^{(1)} + E^{(2)} = 0.$$

Для первого зеркала, которое находится в точке $x = 0$, краевое условие сводится к уравнению

$$\omega(\sigma_1 - \sigma_2) = 2m\pi,$$

где m — целое число.

На втором зеркале при $x = l$ значения эйконала есть

$$S_1 = \omega(t - l) + \omega\sigma_1 + \frac{\omega\tau l}{2} h(t), \quad (9)$$

$$S_2 = \omega(t + l) + \omega\sigma_2 - \frac{\omega\tau l}{2} h(t), \quad (10)$$

и краевое условие выражается в виде уравнения для собственных частот резонатора:

$$\omega \left(1 - \frac{\tau h}{2} \right) = \frac{m\pi}{l}. \quad (11)$$

При выводе этого уравнения мы полагали, что характерные частоты гравитационной волны удовлетворяют неравенству

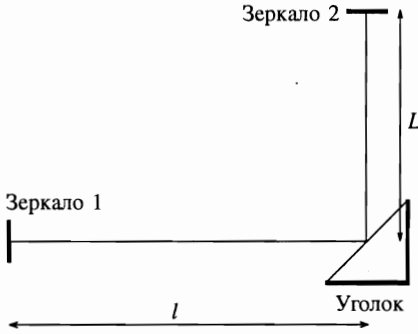
$$\Omega l \ll 1.$$

Соответственно, полное значение электрического поля внутри резонатора есть

$$E = a \exp[-i\omega(t + \sigma_2)] \left\{ \exp \left[i\omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2} \right) \right] - \exp \left[-i\omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2} \right) \right] \right\},$$

а квадрат поля, усредненный по времени, описывается выражением, не зависящим от гравитационного излучения:

$$|E^2| = 4a^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{l}.$$



Расположение оптической системы. Координаты первого зеркала $x = 0, y = -L$. Координаты уголка $x = l, y = -L$. Координаты второго зеркала $x = l, y = 0$. Длина горизонтального плеча — l , а длина вертикального — L

Из последней формулы видно, что внутри резонатора Фабри–Перо интенсивность света не зависит от наличия или отсутствия гравитационной волны. Для того чтобы присутствие гравитационной волны влияло на квадратичную по полю функцию, необходимо иметь дополнительный источник света со стандартной частотой или неидеальный резонатор.

4. РЕЗОНАТОР С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ПЛЕЧАМИ

Рассмотрим теперь структуру электромагнитного поля внутри резонатора Фабри–Перо с перпендикулярными плечами. Одно из плечей этого резонатора расположим вдоль оси x , а длина его пусть будет l . Зеркало резонатора поставим перпендикулярно оси x . Второе плечо расположим вдоль оси y и длину его обозначим L . В месте пересечения этих плечей установим уголкового отражателя (см. рисунок). Гравитационная волна пусть по-прежнему распространяется вдоль оси z , а вектор электрического поля опять выберем в виде $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$. При таком выборе вектора в резонаторе опять не возникает векторных x -, y -компонент поля. Следует также подчеркнуть, что краевые требования на первом и втором зеркалах для компоненты поля E_z эквивалентны соответствующим краевым требованиям для компонент магнитного поля в этом резонаторе.

Рассмотрим следующий ход лучей. Луч выходит из первого зеркала, находящегося в точке $x = 0, y = -L, z = 0$, в момент t_0 , доходит до уголка, который находится в точке $x = l, y = -L, z = 0$, отражается от него и движется ко второму зеркалу. Отражается от него, возвращается на уголок, отражается от уголка и возвращается на первое зеркало, замыкая путь. Первую часть пути обозначим индексом (1), вторую (от уголка ко второму зеркалу) обозначим индексом (2). Индексом (3) обозначим путь луча от второго зеркала к уголку и, наконец, путь от уголка к первому зеркалу обозначим индексом (4). При этом при вычислениях будем полагать $\Omega, \Omega L \ll 1$.

Выражения для эйконала на каждом из плечей и на каждом из путей возьмем в виде

$$S_1 = \omega(t - x) + \omega\sigma_1 + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t-x)},$$

$$S_2 = \omega(t - y) + \omega\sigma_2 - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t-y)},$$

$$S_3 = \omega(t + y) + \omega\sigma_3 - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t+y)},$$

$$S_4 = \omega(t + x) + \omega\sigma_4 + \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega t} - \frac{\omega\tau}{2i} \int \frac{d\Omega}{\Omega} h(\Omega) e^{i\Omega(t+x)}.$$

Краевые условия на обоих зеркалах для выбранных компонент электрического поля опять выглядят как $E^{(1)} + E^{(2)} = 0$. Для первого зеркала, которое находится в точке $x = 0, y = -L$, оно сводится к уравнению $\omega(\sigma_1 - \sigma_4) = 2m\pi$, где m — целое число. Для второго зеркала, расположенного в точке $x = l, y = 0$, оно сводится к уравнению $\omega(\sigma_2 - \sigma_3) = 2n\pi$, где m, n — целые числа.

На уголке сумма всех компонент электрического поля равна нулю:

$$E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + E^{(4)} = 0,$$

а выражения для каждого из эйконолов записываются в виде

$$S_1 = \omega(t + \sigma_1) - \omega l \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right),$$

$$S_2 = \omega(t + \sigma_2) + \omega L \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right),$$

$$S_3 = \omega(t + \sigma_3) - \omega L \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right),$$

$$S_4 = \omega(t + \sigma_4) + \omega l \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right).$$

Введя обозначения

$$A = ae^{-i\omega\sigma_1}, \quad B = be^{-i\omega\sigma_2},$$

получаем краевое условие для электрических компонент в виде

$$A \sin \omega l \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right) - B \sin \omega L \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right) = 0. \quad (12)$$

Второе краевое условие ставится для компонент магнитного поля перпендикулярных к отражающей поверхности уголка. Сами составляющие магнитного поля находим из уравнений Максвелла, пренебрегая членами $\sim \Omega/\omega$, т. е. отношением частоты гравитационной волны к частоте электромагнитной волны. Тогда в первом (горизонтальном) плече отличны от нуля только компоненты H_y магнитного поля, а во втором — только H_x . Выпишем суммы компонент магнитного поля в каждом из плечей:

$$H_y^{(1)} + H_y^{(4)} = a \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right) (e^{-iS_1} + e^{-iS_4}),$$

$$H_x^{(2)} + H_x^{(3)} = -b \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right) (e^{-iS_2} + e^{-iS_3}).$$

Перпендикулярная компонента магнитного поля на поверхности уголка должна быть равна нулю, откуда находим уравнение для краевого условия:

$$H_y^{(1)} + H_y^{(4)} - H_x^{(2)} - H_x^{(3)} = 0.$$

Это уравнение сводится к уравнению

$$A \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right) \cos \omega l \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right) + B \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right) \cos \omega L \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right) = 0. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) составляют систему линейных уравнений. Приравнение определителя этой системы нулю определяет набор собственных мод резонатора Фабри-Перо с перпендикулярными плечами. Таким образом, решение для собственных частот резонатора (с точностью до первого порядка по амплитуде гравитационной волны) есть

$$\omega = \frac{m\pi}{l+L} \left(1 + \frac{l-L}{l+L} \frac{\tau h}{2}\right) + (-1)^{m+1} \frac{\tau h}{2(l+L)} \sin \omega(l-L). \quad (14)$$

Отметим сразу, что моды резонатора с равными плечами ($l = L$) не зависят от времени и от наличия гравитационной волны:

$$\omega = \frac{m\pi}{l+L}.$$

В случае, когда одно из плеч имеет пренебрежимо малый размер $L \rightarrow 0$, набор мод определяется уравнением вида

$$\omega = \frac{m\pi}{l+L} \left(1 + \frac{\tau h}{2}\right),$$

т. е. мы возвращаемся к ситуации, описанной в предыдущем разделе (последний член в (14), как легко видеть, стремится к нулю при $L \rightarrow 0$).

Будем считать, что плечи нашей системы являются симметричными, что значительно упрощает выкладки, не ограничивая общности рассуждений. Тогда собственные частоты системы являются постоянными и не зависят от наличия или отсутствия гравитационной волны.

Вычислим электрическое поле первого и четвертого лучей вблизи уголка в некоторой точке x , расположенной между первым зеркалом и уголком. Уравнения для эйконалов в этих лучах есть

$$S_1 = \omega(t + \sigma_1) - \omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right),$$

$$S_4 = \omega(t + \sigma_4) + \omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right).$$

Соответственно, сумма электрических полей в первом и четвертом лучах есть

$$E = 2a \exp[-i\omega(t + \sigma_1 + \pi/2)] \sin \omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2}\right), \quad (15)$$

а модуль квадрата поля в этой точке

$$|E^2| = 4a^2 \sin^2 \omega x \left(1 - \frac{\tau h}{2} \right).$$

Теперь очевидно, что появляется зависимость квадратичного по полю выражения от гравитационной волны. В частности, интенсивность излучения внутри резонатора с перпендикулярными плечами будет изменяться с частотой гравитационной волны.

Постоянная составляющая интенсивности будет равна

$$I = 4a^2 \sin^2 \omega x,$$

а переменная часть, которая содержит информацию о гравитационной волне,

$$\delta I = -4a^2 \sin(2\omega x) \frac{\pi x}{\lambda_e} \tau h(t).$$

Здесь λ_e — длина электромагнитной волны. Отметим, что при равных плечах ($l = L$) сумма первого и четвертого лучей на уголке обращается в нуль. Это является следствием симметрии плечей и получившихся граничных условий. Однако уже на расстоянии $\xi = \lambda_e/8$ от поверхности уголка $\sin 2\omega x$ достигает максимума, и отклик резонатора в этом месте на действующую гравитационную волну максимален.

Следовательно, квадратичная величина по электрическому полю вблизи уголка осциллирует с частотой гравитационной волны и с амплитудой порядка

$$\frac{\pi l}{\lambda_e} \tau h(t).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье [3] необходимое требование для реализации предложенной схемы квантовых неразрушающих измерений заключалось в том, чтобы пространственная фаза поля (в точке пространства, жестко скрепленной с уголком) внутри резонатора содержала информацию о гравитационном излучении. Выше показано, что такая ситуация реализуется в резонаторе Фабри–Перо с перпендикулярными плечами.

Физический смысл приведенных вычислений прост: в линейном резонаторе Фабри–Перо адиабатическое изменение частоты не приводит к осцилляциям квадрата поля внутри резонатора. В резонаторе с перпендикулярными плечами смысл полученных вычислений становится особенно прозрачным в локально-инерциальной системе отсчета. Действительно, в пределе $\Omega l \ll 1$ в локально-инерциальной системе отсчета зеркала двигаются. При этом в поле гравитационной волны первое зеркало движется по направлению к уголку, а второе — от уголка. Полная сумма расстояний зеркала 1 — уголок и зеркало 2 — уголок остается неизменной во время действия гравитационной волны (при $l = L$), но положение уголка к отношению к каждому из зеркал меняется. С точки зрения одномерного наблюдателя, который может измерять поле только по оси, направленной вдоль пучка света, внутри резонатора реализуется стоячая волна с постоянными характеристиками, в то время как уголок и прикрепленный к нему измерительный прибор «ездят» вдоль оптической оси. С его точки зрения гравитационная

волна вызывает колебания уголка вдоль оптической оси, а следовательно, измерительный прибор регистрирует движение уголка по изменению поля стоячей волны, если, например, детектор установлен на «склоне» поля волны.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность В. Б. Брагинскому и Ф. Я. Халили за дискуссии, послужившие стимулом к написанию этой статьи и многочисленные ценные замечания.

Литература

1. В. Б. Брагинский, УФН **156**, 93 (1988).
2. K. S. Thorn, in *300 years of Gravitation*, ed. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987), p. 330.
Yvette -France P.167.
3. V. B. Braginsky and F. Ya. Khalily, *Physics Lettres A* **218**, 167 (1996).
4. М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт, ЖЭТФ **43**, 605 (1962).
5. R. L. Forward, *Phys. Rev. D* **17**, 379 (1978).
6. F. V. Estabrook and H. D. Wahlquest, *Gen. Rel. and Gravitation* **6**, 439 (1975).
7. В. Н. Руденко, М. В. Сажин, *Квант. электр.* **7**, 2344 (1980).
8. V. B. Braginsky, N. S. Kardashev, I. D. Novikov, and A. G. Polnarev, Preprint ICTP IC/89/392 (1989).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
10. С. М. Рыгов, Ю. А. Кравцов, Е. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику, Часть II, Случайные поля*, Наука, Москва (1978).
11. В. Б. Брагинский, Л. П. Гришук, А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, М. В. Сажин, ЖЭТФ **65**, 1729 (1973).
12. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).