

## НЕЛИНЕЙНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С МОНОХРОМАТИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В СРЕДЕ

Г. К. Аветисян, А. Х. Багдасарян, Г. Ф. Мкртчян

Ереванский государственный университет  
375049, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 20 февраля 1997 г.

Исследована квантовая теория нелинейного взаимодействия заряженных частиц с заданным полем плоско-поперечного электромагнитного излучения в среде. С помощью точного решения обобщенного уравнения Ламе найдено нелинейное решение уравнения Матве, к которому сводится релятивистское квантовое уравнение движения частицы в поле монохроматической волны в среде в пренебрежении спиновым взаимодействием (уравнение Клейна–Гордона). Исследован вопрос устойчивости решений обобщенного уравнения Ламе и найден класс ограниченных решений, соответствующих волновой функции частицы. На основе этого решения выявлена зонная структура состояний частицы в индуцированном черенковском процессе. Последняя в зависимости от интенсивности и поляризации волны описывает как связанные состояния частицы с волной (захват), так и состояния в непрерывном спектре. Отсутствие зонной структуры в плазме очевидно, так как здесь невозможны связанные состояния частицы с поперечной волной, фазовая скорость которой  $v_{ph} > c$ . Разработанный в настоящей работе метод может быть использован для широкого класса задач, сводящихся к решению уравнения Матве.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Если в спонтанных процессах излучения заряженных частиц роль среды сводится к наличию третьего тела, необходимого для обеспечения закона сохранения энергии и импульса, то в процессах взаимодействия с внешним полем электромагнитного излучения наличие среды обуславливает принципиально новые явления, которые имеют существенно нелинейный характер [1–5]. Так, в случае диэлектрической среды, когда показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1$ , имеет место эффект Вавилова–Черенкова ( $\varepsilon, \mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды). В случае плазменной среды, когда  $n < 1$ , отмеченные процессы не могут протекать, как и в вакууме ( $n = 1$ ), но в этом случае плазма как третье тело может обеспечить выполнение законов сохранения для рождения или аннигиляции электронно-позитронных пар из фотонного поля [6–8].

Взаимодействие электронов с электромагнитным излучением в диэлектрической среде, т. е. индуцированный черенковский процесс, имеет свою специфику, обусловленную пороговым характером спонтанного черенковского излучения (скорость электрона  $v$  должна быть больше фазовой скорости излученной волны в данной среде  $c/n$ <sup>1)</sup>)

<sup>1)</sup> В действительности спектр спонтанного черенковского излучения определяется дисперсией среды  $n = n(\omega)$ . Но, поскольку в настоящей работе исследуется индуцированный черенковский процесс во внешнем поле монохроматического излучения, каковым с большой точностью можно считать лазерное излучение, то под  $n$  подразумевается показатель преломления среды на частоте индуцирующей волны.

или выполнением определенного условия когерентности  $v \cos \theta = c/n$ , где  $\theta$  — черенковский угол ( $c$  — скорость света в вакууме). Существование пороговой скорости в спонтанном процессе обуславливает наличие порогового значения поля в вынужденном процессе, и в зависимости от того, напряженность внешнего поля больше или меньше этого так называемого критического значения, взаимодействие заряженных частиц с полем излучения происходит существенно разным образом [1]<sup>2)</sup>. Если ввести безразмерный, релятивистски-инвариантный параметр интенсивности заданного поля излучения

$$\xi^2 = -\frac{e^2 a_0^2}{m^2 c^4}, \quad a_0^2 = a_{0i} a_0^i \quad (1.1)$$

( $a_0$  — амплитуда четырехмерного векторного потенциала волны), то согласно результатам работы [1], при  $\xi > \xi_{cr}$ , где

$$\xi_{cr}^2 = \left(1 - n \frac{v_0}{c}\right)^2 \left[ (n^2 - 1) \left(\frac{mc^2}{E_0}\right)^2 \right]^{-1}, \quad (1.2)$$

волновое поле по отношению к частице становится потенциальным барьером, от которого происходит «отражение» частицы (неупругое). Выражение для параметра критической интенсивности написано для случая, когда начальная скорость электрона  $v_0$  (энергия  $E_0$ ) направлена вдоль волнового вектора поля  $\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| = n\omega/c$ ), т. е. когда начальный черенковский угол с внешней волной равен нулю. Если  $\theta \neq 0$  (поляризация волны уже несущественна) и при не слишком малых углах взаимодействия, когда  $|\sin \theta| E_0/mc^2 \gg \xi$  [5],

$$\xi_{cr}(\theta) = \left(1 - n \frac{v_0}{c} \cos \theta\right)^2 \left[ (n^2 - 1) \left(\frac{mc^2}{E_0}\right)^2 |\sin \theta| \right]^{-1}. \quad (1.3)$$

В этом случае вынужденное черенковское взаимодействие обладает нелинейностью уже по полю и «отражение» происходит от соответствующих фазовых плоскостей, а электрон, находящийся первоначально в волне, может захватиться ею. Это нелинейное явление «отражения» или захвата электронов полем излучения имеет наглядную физическую интерпретацию в системе отсчета, связанной с волной (так как  $n > 1$ , то  $v_{ph} < c$  и существует такая система,  $R^3$ ). В последней имеется только магнитное поле (неоднородное), которое начиная с некоторого значения  $\xi > \xi_{cr}$  поворачивает частицу ( $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ), т. е. происходит упругое отражение.

Указанное явление, т. е. существование критического значения поля, принципиально меняет поведение электромагнитных процессов в среде. В частности, можно говорить об эффекте Комптона в диэлектрической среде лишь в том случае, когда поле

<sup>2)</sup> Такого же типа условиями когерентности, как черенковский процесс, обладают также индуцированные комптоновский и ондуляторный процессы, вследствие чего отмеченные особенности свойственны и этим процессам (результатирующее взаимодействие с замедленной интерференционной волной) [7, 8], что можно обобщить как вынужденное взаимодействие частиц с волной, распространяющейся с фазовой скоростью  $v_{ph} < c$ .

<sup>3)</sup> В плазме, где  $n < 1$ , физический смысл имеет инерциальная система отсчета, движущаяся со скоростью  $V = cn$ , которая соответствует системе центра инерции ( $C$ ) частица-античастица в процессе рождения пар фотонным полем в плазме [9, 10].

волны не превышает это значение [4]. Последнее определяет ширину черенковского резонанса, т. е. степень близости к черенковскому конусу, которая в линейной теории ограничена лишь приближенно условием допустимости применения теории возмущений. Точное решение классической задачи показывает [1, 5], что существует минимальная ширина черенковского резонанса, которая определяется величиной поля излучения:

$$\left| v_0 \cos \theta - \frac{c}{n} \right|_{min} = \Delta(\xi),$$

и линейная теория применима только в том случае, когда

$$\left| v_0 \cos \theta - \frac{c}{n} \right|_{min} \gg \Delta(\xi)$$

или, что то же самое,  $\xi \ll \xi_{cr}$ . Но величина  $\xi_{cr}$ , как видно из выражений (1.2), (1.3), может быть сколь угодно малой вблизи черенковского конуса, и значит, при сколь угодно слабом поле излучения черенковский процесс имеет существенно нелинейный характер. В этой связи отметим ошибочность изложенных в обзорных статьях [11, 12] результатов по вынужденному черенковскому эффекту, которые получены по теории возмущений. Подробный анализ этих результатов сделан в работе [13].

Нелинейная динамика черенковского процесса и отмеченное его своеобразие исследованы в основном в рамках классической теории. Решение квантовой задачи, которое могло, в принципе, описать картину квантовой динамики нелинейного взаимодействия электрона с электромагнитным излучением в среде, до сих пор удалось найти только в частном случае, когда  $\theta = 0$  и волна имеет циркулярную поляризацию [3, 14]. И, как отмечалось выше, в этом случае при адиабатическом включении и выключении поля возможно лишь «отражение» электрона от фронта волны (от огибающей импульса волны), обусловленное эффектом интенсивности ( $\xi^2 > \xi_{cr}^2$ ). В результате такого — классического — «отражения» и благодаря волновым свойствам частицы имеет место сугубо квантовое явление: модуляция плотности вероятности электрона на жестких рентгеновских частотах, обусловленная суперпозицией падающей и «отраженной» электронных волн [3]. Какую же роль играют квантовые явления в общем случае и формирование связанных состояний электрона в режиме захвата — эти вопросы остались открытыми. Именно здесь мы сталкиваемся с качественным проявлением квантовости системы «частица + волна», когда ожидаемый дискретный спектр связанных состояний частицы подвергается дополнительному квантовому воздействию со стороны остальных потенциальных ям, число которых бесконечно (ситуация, напоминающая картину электронных состояний в твердом теле).

В настоящей работе исследуется квантовая теория взаимодействия заряженной частицы с когерентным электромагнитным излучением в среде с целью выявить общую картину нелинейной квантовой динамики индуцированного черенковского процесса, тем самым, восполнить вышеотмеченные пробелы.

В разд. 2 обсуждается проблема нелинейного взаимодействия заряженных частиц с заданным полем волны на основе релятивистского уравнения Клейна–Гордона, классифицируются случаи, когда эти уравнения приводятся к уравнению Матье. Ввиду того что уравнение Матье точно не решается, а вышеуказанные явления невозможно описать в рамках теории возмущений [15] или эйконального приближения [16], в разд. 3 развит новый подход: уравнение Матье в определенных условиях заменяется обобщенным уравнением Ламе, которое решается точно. Исследуется класс ограниченных решений.

В разд. 4 изучается проблема устойчивости волновых функций и показывается возникновение разрешенных и запрещенных зон для состояний частицы (в  $R$ -системе, связанной с волной, это соответствует зонной структуре энергетического спектра частиц). В разд. 5 проводится обсуждение результатов.

## 2. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ, ПРИВОДЯЩЕЕСЯ К УРАВНЕНИЮ МАТЬЕ

Взаимодействие релятивистской заряженной частицы с заданным полем электромагнитного излучения в среде в пренебрежении спиновым взаимодействием описывается волновым уравнением Клейна–Гордона:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[ c^2 \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^4 \right] \Psi, \quad (2.1)$$

где  $e$  — заряд,  $m$  — масса,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$  — оператор обобщенного импульса частицы,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t - nx/c)$  — векторный потенциал плоской волны, распространяющейся в направлении  $x$ . Эту волну будем считать монохроматической с частотой  $\omega$  и с поляризацией

$$\mathbf{A} = \left\{ 0, A_0 \sin \left[ \omega \left( t - n \frac{x}{c} \right) \right], g A_0 \cos \left[ \omega \left( t - n \frac{x}{c} \right) \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь  $g = 0$  соответствует линейной поляризации волны,  $g = \pm 1$  — правой и левой круговым поляризациям соответственно.

Для решения (2.1) от переменных  $x, t$  удобно перейти к волновым координатам  $\tau = t - nx/c$ ,  $\eta = t + nx/c$ . Тогда, как видно из (2.2), переменные  $\eta, y, z$  являются циклическими, следовательно собственные значения операторов

$$\hat{\Lambda} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

сохраняются:  $\Lambda = \text{const}$ ,  $p_y = \text{const}$ ,  $p_z = \text{const}$ . Заметим, что сохранение двух компонент обобщенного импульса  $p_y, p_z$  является следствием того факта, что наличие плоской волны не нарушает однородность пространства в плоскости поляризации волны  $yz$  ( $\mathbf{p}_\perp = \text{const}$ ). Легко видеть, что в свободном решении уравнения (2.1)  $\Lambda$  представляет собой известный из классической электродинамики интеграл движения  $E - cp_x/n = \text{const}$  ( $\Lambda = (nE - cp_x)/2n$ ), только здесь, в квантовом случае, под  $\mathbf{p} = \{p_x, p_\perp\}$  и  $E$  нужно понимать начальные значения импульса и полной энергии свободной частицы.

Таким образом, решение уравнения (2.1) можно искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\tau) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \Lambda \eta + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\perp \mathbf{r} \right), \quad (2.3)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left( E - \frac{c}{n} p_x \right) = \text{const}, \quad \mathbf{p}_\perp = \text{const}, \quad (2.3a)$$

и для функции  $\Phi(\tau)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\hbar^2 (n^2 - 1) \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} + 2i\hbar \Lambda (n^2 + 1) \frac{d\Phi}{d\tau} - \left[ c^2 \left( \mathbf{p}_\perp - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 + \Lambda^2 (n^2 - 1) + m^2 c^4 \right] \Phi = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение можно свести к одномерному уравнению Шредингера с «потенциальной энергией  $U(\tau)$ », если исключить из него член, содержащий первую производную. Для этого проведем следующее преобразование:

$$\Phi(\tau) = F(\tau) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \Lambda \tau\right). \quad (2.5)$$

Тогда для неизвестной функции  $F(\tau)$  получим уравнение

$$\frac{d^2 F}{d\tau^2} + \frac{1}{\hbar^2(n^2 - 1)^2} \left\{ 4n^2 \Lambda^2 - (n^2 - 1)c^2 \left( \mathbf{p}_\perp - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 - (n^2 - 1)m^2 c^4 \right\} F = 0, \quad (2.6)$$

и решение уравнения Клейна–Гордона (2.1) запишется в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = F(\tau) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\perp \mathbf{r} - \frac{i}{\hbar} \Lambda \eta - \frac{i}{\hbar} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \Lambda \tau\right), \quad (2.7)$$

где  $F(\tau)$  — решение уравнения (2.6).

Таким образом, задача взаимодействия скалярной частицы с заданным полем электромагнитного излучения (2.2) в среде сводится к решению уравнению (2.6). Вид последнего зависит от поляризации волны. В общем случае эллиптической поляризации оно является уравнением Хилла. В случае циркулярной поляризации волны (2.6) представляет собой уравнение Матъе, а в случае линейной поляризации — опять уравнение Хилла. Мы будем рассматривать все случаи взаимодействия (а также зависимость от интенсивности волны), когда уравнение Клейна–Гордона сводится к уравнению Матъе

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} = (B + D \sin^2 \alpha) F. \quad (2.8)$$

В случае циркулярной поляризации волны (в (2.2)  $g = \pm 1$ ) имеется азимутальная симметрия относительно направления распространения волны (оси  $x$ ), поэтому, не умаляя общности, можно выбрать начальный импульс частицы в плоскости  $xz$  ( $p_y = 0$ ), т. е. в формулах (2.6), (2.7)  $p_\perp = p_z$ , а  $\alpha = \omega\tau/2$ . Тогда для коэффициентов уравнения (2.8) будем иметь

$$B_c = \frac{4(n^2 - 1)m^2 c^4 + 4(n^2 - 1)c^2 p_z^2 - 16n^2 \Lambda^2 - 8e c p_z A_0 + 4e^2 A_0^2}{\hbar^2 \omega^2 (n^2 - 1)^2}, \quad (2.9)$$

$$D_c = \frac{16e c p_z A_0}{\hbar^2 \omega^2 (n^2 - 1)}.$$

При линейной поляризации волны в общем случае для произвольных интенсивности и угла взаимодействия уравнение (2.6) не приводится к уравнению Матъе (2.8). Однако в реальных случаях для не слишком малых углов взаимодействия практически всегда  $\xi \ll (E/mc^2) \sin \theta$  и в уравнении (2.6) с большой точностью можно пренебречь членом, пропорциональным интенсивности волны ( $\propto A^2$ ), по сравнению с членом  $\propto \mathbf{p}_\perp \mathbf{A} = p A \sin \theta$  (где  $\theta$  — угол между векторами импульса частицы  $\mathbf{p}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  заданного поля излучения (2.2)). Таким образом, при условии

$$(E/mc^2) \sin \theta \gg \xi \quad (2.10)$$

взаимодействие частиц с волной линейной поляризации (в (2.2)  $g = 0$ ) уравнение (2.6) приводится к уравнению Матье (2.8), где

$$B_{l,\theta} = \frac{4(n^2-1)m^2c^4 + 4(n^2-1)c^2p_y^2 - 16n^2\Lambda^2 - 8\text{ecp}_y A_0}{\hbar^2\omega^2(n^2-1)^2}, \quad D_{l,\theta} = \frac{16\text{ecp}_y A_0}{\hbar^2\omega^2(n^2-1)}. \quad (2.11)$$

При условии обратном (2.10), в частности при  $\theta = 0$ , взаимодействие обусловлено интенсивностью волны, и для коэффициентов уравнения (2.8) имеем

$$B_{l,0} = \frac{(n^2-1)m^2c^4 - 4n^2\Lambda^2}{\hbar^2\omega^2(n^2-1)^2}, \quad D_{l,0} = \frac{e^2 A_0^2}{\hbar^2\omega^2(n^2-1)}. \quad (2.12)$$

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ПОМОЩЬЮ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

Как отмечалось в разд. 2, в настоящей работе мы рассмотрим все случаи, когда релятивистские уравнения движения частицы приводятся к уравнению Матье (2.8). Как известно [17], функция эллиптического синуса  $\text{Sn}(\alpha, k)$  при значениях  $k \ll 1$  стремится к функции обыкновенного синуса:

$$\text{Sn}(\alpha, k)|_{k \ll 1} \rightarrow \sin \alpha. \quad (3.1)$$

Воспользовавшись этим свойством двоякопериодической функции  $\text{Sn}(\alpha, k)$ , уравнение Матье (2.8) будем заменять обобщенным уравнением Ламе [17]:

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} = [B + N(N+1)k^2 \text{Sn}^2(\alpha, k)] U, \quad (3.2)$$

где коэффициент  $N(N+1)k^2$  при функции  $\text{Sn}^2(\alpha, k)$  — постоянная величина, зависящая от параметров частицы и поля (см. (2.9), (2.11), (2.12)). При произвольном значении  $B$  уравнение (3.2) точно решается для положительных целых чисел  $N$ .

Таким образом, воспользовавшись предельным переходом (3.1) можно построить приближенное решение уравнения (2.8) с помощью точного решения уравнения (3.2). С математической точки зрения при предельном переходе (3.1) расходимость по мнимой оси функции обыкновенного синуса в бесконечно удаленной точке (при аналитическом продолжении в комплексную плоскость) превращается в устранимую расходимость в виде простого полюса в элементарной ячейке двоякопериодической функции эллиптического синуса. На языке классификации алгебраических уравнений (2.8) имеет две регулярные и одну нерегулярную точку, а (3.2) — четыре регулярные точки. При замене уравнения Матье обобщенным уравнением Ламе нерегулярная точка уравнения Матье превращается в две регулярные точки уравнения Ламе, благодаря чему и последнее допускает точное решение (поскольку уравнение (3.2) при  $k \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  так, чтобы  $N(N+1)k^2 = D$ , переходит в (2.8), то в уравнении Матье фактически имеется слияние двух регулярных точек в одну нерегулярную).

С физической точки зрения найденное таким образом приближенное решение уравнения Матье (2.8) означает учет полюсов «брэгговских» резонансов в поле монохроматической волны (черенковские резонансы в системе отсчета, движущейся с волной), число которых бесконечно. Поэтому такое сугубо нелинейное решение будет, в принципе, с

любой необходимой точностью описывать нелинейное взаимодействие заряженных частиц со сколь угодно слабой волной в среде. Этому соответствует значение  $N = 1$  в уравнении (3.2). Решение справедливое в сильных полях соответствует значениям  $N \gg 1$ . Однако в этом случае очевидно, что любой процесс приобретает нелинейный характер и, с другой стороны, подавляется квантовость и картина взаимодействия приближается к классической. Поэтому подробное исследование проведем для значения  $N = 1$ , что будет соответствовать случаю очень слабых полей ( $D \ll 1$ ), выявляя при этом существенную нелинейность и отмеченные в разд. 1 квантовые черты индуцированного взаимодействия.

Точное решение уравнения (3.2) в этом случае имеет следующий вид [17]:

$$U(\alpha) = C_1 \frac{H(\alpha + \alpha_1)}{\theta(\alpha)} \exp[-Z(\alpha_1)\alpha] + C_2 \frac{H(\alpha - \alpha_1)}{\theta(\alpha)} \exp[Z(\alpha_1)\alpha], \quad (3.3)$$

где  $\alpha_1$  определяется уравнением

$$\frac{\text{Cn}^2 \alpha_1 \cdot \text{dn}^2 \alpha_1}{\text{Sn}^2 \alpha_1} - \frac{1}{\text{Sn}^2 \alpha_1} = B. \quad (3.4)$$

Здесь  $\text{Cn} \alpha_1$ ,  $\text{dn} \alpha_1$  — соответственно эллиптический косинус и дельта-эллиптическая функция,  $C_1, C_2$  — нормировочные постоянные, а функции  $H(\alpha)$ ,  $\theta(\alpha)$ ,  $Z(\alpha)$  определяются следующим образом:

$$H(\alpha) = \vartheta_1(\alpha \vartheta_3^{-2} | \zeta), \quad \theta(\alpha) = \vartheta_4(\alpha \vartheta_3^{-2} | \zeta), \quad Z(\alpha) = \frac{\theta'(\alpha)}{\theta(\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\beta, q) &= 2q^{1/4} \sin \beta - 2q^{9/4} \sin 3\beta + 2q^{25/4} \sin 5\beta - \dots, \\ \vartheta_2(\beta, q) &= 2q^{1/4} \cos \beta + 2q^{9/4} \cos 3\beta + 2q^{25/4} \cos 5\beta + \dots, \\ \vartheta_3(\beta, q) &= 1 + 2q \cos 2\beta + 2q^4 \cos 4\beta + 2q^9 \cos 6\beta + \dots, \\ \vartheta_4(\beta, q) &= 1 - 2q \cos 2\beta + 2q^4 \cos 4\beta - 2q^9 \cos 6\beta + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что  $\vartheta_1(\beta, q)$  — нечетная, а  $\vartheta_{2,3,4}(\beta, q)$  — четные функции. В аргументы  $\vartheta$ -функций входят  $\vartheta_3 \equiv \vartheta_3(0, q)$  (вообще  $\vartheta_i \equiv \vartheta_i(0, q)$ ), а  $q = \exp(i\pi\zeta)$ , где  $\zeta$  — произвольное комплексное число с положительной мнимой частью, так что  $|q| < 1$ . С другой стороны, параметр  $q$  связан с аргументом  $k$  эллиптического синуса  $\text{Sn}(\alpha, k)$  следующим образом:

$$k = \frac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}. \quad (3.7)$$

Поскольку решение уравнения (3.2) — волновая функция частицы, которая должна быть ограниченной, то в (3.3) величина  $Z(\alpha_1)$  должна быть либо чисто мнимой, либо равной нулю,  $Z(\alpha_1) = 0$ . Функция  $Z(\alpha)$  обладает следующими свойствами:

$$Z(\alpha + 2K) = Z(\alpha),$$

$$Z(\alpha + 2iK') = Z(\alpha) - i\pi/K.$$

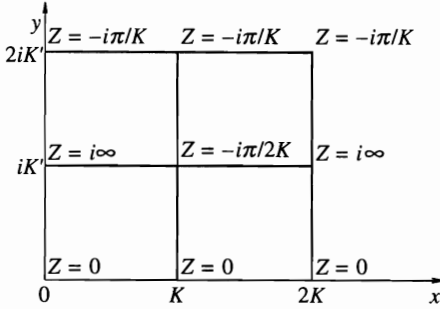


Рис. 1

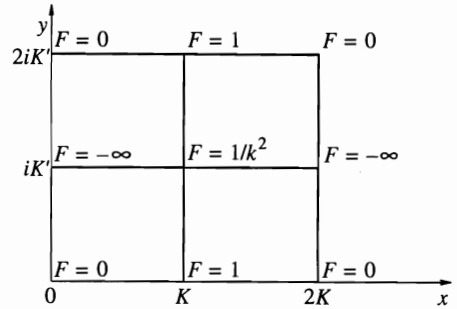


Рис. 2

Рис. 1. Узловые значения функции  $Z(\alpha)$  в элементарной ячейке комплексной переменной  $\alpha$

Рис. 2. Узловые значения функции  $F(\alpha) = \text{Sn}^2 \alpha$  в элементарной ячейке комплексной переменной  $\alpha$

Следовательно, функцию  $Z(\alpha)$  достаточно исследовать в прямоугольнике  $[2K; 2iK']$  комплексной плоскости (см. рис. 1). Как следует из соотношений (3.5),  $Z(\alpha)$  — чисто мнимая величина или обращается в нуль на прямых  $x = 0$  и  $x = K$ .

Определим теперь область допустимых значений параметра  $B$  при фиксированном значении  $K$ , удовлетворяющем условию ограниченности волновой функции (3.3). Для этого воспользуемся связью величин  $\alpha_1$  и  $B$ , которая определяется уравнением (3.4). Из последнего имеем

$$k^2 \text{Sn}^2 \alpha_1 = B + k^2 + 1, \tag{3.8}$$

т. е. мы должны найти те удовлетворяющие (3.8) значения параметра  $B$ , для которых  $\alpha_1$  меняется на прямых  $x = 0$  или  $x = K$ . Для этого построим узловые значения в элементарной ячейке  $[2K; 2iK']$  комплексной переменной  $\alpha$ , так как  $\text{Sn}^2(\alpha, k)$  — двоякопериодическая функция с действительным ( $2K$ ) и мнимым ( $2K'$ ) периодами (рис. 2).

Как видно из рис. 2, функция  $\text{Sn}^2(\alpha, k)$  на прямых  $x = 0$  и  $x = K$  меняется в полузамкнутой области  $(-\infty, 0]$  и в интервале  $[1, 1/k^2]$ . Из уравнения (3.8) в области  $(-\infty, 0]$  имеем

$$B + k^2 + 1 \leq 0. \tag{3.9}$$

В интервале  $[1, 1/k^2]$  при  $\alpha_1 = K$  имеем

$$B + 1 = 0, \tag{3.10}$$

а при  $\alpha_1 = K + iK'$

$$B + k^2 = 0, \tag{3.11}$$

т. е. в интервале  $[1, 1/k^2]$  допустимые значения параметра  $B$  лежат в области

$$-1 \leq B \leq -k^2. \tag{3.12}$$



Таким образом, ограниченные решения обобщенного уравнения Ламе (3.2) лежат в областях (3.9) и (3.12) изменения параметра  $B$ , т. е. существуют разрешенные и запрещенные зоны. Покажем, что на границах этих зон два линейно независимых решения в (3.3) совпадают и превращаются соответственно в двоякопериодические функции  $\text{Sn}(\alpha, k)$ ,  $\text{Cn} \alpha_1$ ,  $\text{dn} \alpha_1$ . Последнее находится в согласии с тем общим свойством, что на краях разрешенных зон волновая функция частицы должна быть периодической.

Так, при  $\alpha_1 = 0$  из решения (3.3) имеем

$$U(\alpha) = C \frac{H(\alpha)}{\theta(\alpha)} = C \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \text{Sn} \alpha \quad (C = C_1 + C_2).$$

При  $\alpha_1 = K$

$$U(\alpha) = C_1 \frac{H(\alpha + K)}{\theta(\alpha)} + C_2 \frac{H(\alpha - K)}{\theta(\alpha)} = C \frac{\vartheta_2}{\vartheta_4} \text{Cn} \alpha.$$

При  $\alpha_1 = K + iK'$  имеем

$$U(\alpha) = C_1 \frac{H(\alpha + K + iK')}{\theta(\alpha)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2K} \alpha\right) + C_2 \frac{H(\alpha - K - iK')}{\theta(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{2K} \alpha\right).$$

Далее, учитывая, что  $H(\alpha)$  — нечетная функция и

$$H(\alpha + K + iK') = q^{-1/4} \exp\left(i \frac{\pi}{2K} \alpha\right) \vartheta_3(\alpha \vartheta_3^{-2}),$$

получаем

$$U(\alpha) = C' q^{-1/4} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_4} \text{dn} \alpha \quad (C' = C_1 - C_2).$$

#### 4. ЗОННАЯ СТРУКТУРА СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ В ВЫНУЖДЕННОМ ЧЕРЕНКОВСКОМ ПРОЦЕССЕ

Существование определенных областей допустимых значений параметра  $B$  уравнения (3.2), которое при  $k^2 \ll 1$  переходит в уравнение (2.8), приводит к ограничению области движения заряженной частицы в поле поперечной электромагнитной волны в среде. Действительно, условия (3.9), (3.12) определяют допустимые значения сохраняющихся величин  $\Lambda$  (3.2а) и поперечных компонент обобщенного импульса  $p_{\perp}$ , т. е. начальные значения энергии и импульса свободной частицы (скорости и черенковского угла), при которых она может находиться в поле волны. Таким образом, в поле плоско-поперечной волны в среде для заряженной частицы имеются разрешенные и запрещенные области движения — зоны. Как будет показано ниже, такая зонная структура состояний частиц имеет место только в среде с показателем преломления  $n > 1$ , что обусловлено нелинейным черенковским взаимодействием. Физически это означает возможность связанных состояний частицы с поперечной волной, т. е. захват, что во всяком случае исключено в плазме ( $n < 1$ ), где фазовая скорость волны  $v_{ph} > c$ .

Исследуем квантовую динамику индуцированного черенковского взаимодействия, выявляя указанную зонную структуру состояний частицы в зависимости от интенсивности и поляризации волны, а также от угла взаимодействия  $\theta$ .

В поле циркулярно поляризованной волны из условий (3.9), (3.12), с учетом (2.9), имеем следующую зонную структуру для сохраняющейся величины  $\Lambda = (nE - cp_x)/2n$ :

$$\begin{aligned} nE - cp_x &\geq [(n^2 - 1)(c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + e^2 A_0^2) + (n^2 - 1)^2 \hbar^2 \omega^2 / 4]^{1/2}, \\ [(n^2 - 1)(c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + e^2 A_0^2)]^{1/2} &\leq nE - cp_x \leq \\ &\leq [(n^2 - 1)(c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + e^2 A_0^2 - 2eA_0 cp_z) + (n^2 - 1)^2 \hbar^2 \omega^2 / 4]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Такая зонная структура состояний частицы имеет простое физическое объяснение в системе отсчета  $R$ , движущейся вместе с волной ( $V = c/n$ ). Поскольку в этой системе имеется только статическое магнитное поле, то задача стационарна и, следовательно, энергия частицы сохраняется. Тогда из условий (4.1) получаем, что зонной структурой обладает энергетический спектр частицы:

$$\begin{aligned} E' &\geq [c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + e^2 A_0^2 + n^2 \hbar^2 \omega'^2 / 4]^{1/2}, \\ [c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + e^2 A_0^2]^{1/2} &\leq E' \leq [c^2 p_z^2 + m^2 c^4 - 2eA_0 cp_z + e^2 A_0^2 + n^2 \hbar^2 \omega'^2 / 4]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $\omega' = (\omega/n)\sqrt{n^2 - 1}$  — частота волны в  $R$ -системе.

Для выяснения физической картины зонной структуры состояний частицы в лабораторной системе выразим сохраняющиеся величины  $\Lambda$  и  $p_{\perp}$  через начальную расстройку черенковского резонанса  $v \cos \theta - c/n$ . Тогда из (4.1) получим следующую зонную структуру для начальной продольной скорости частицы:

$$v \cos \theta \leq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 + \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 \right]^{1/2}, \quad (4.3a)$$

$$v \cos \theta \geq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 + \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 \right]^{1/2};$$

$$v \cos \theta \geq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 \right]^{1/2}, \quad (4.3b)$$

$$v \cos \theta \leq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 \right]^{1/2};$$

$$v \cos \theta \leq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \times$$

$$\times \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 - (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{2p \sin \theta}{mc} \xi + \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 \right]^{1/2},$$

$$v \cos \theta \geq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \times$$

$$\times \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 - (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{2p \sin \theta}{mc} \xi + \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (4.3b)$$

Как видно из этих условий, благодаря эффекту интенсивности волны в вынужденном черенковском процессе существует запрещенная зона, ширина которой не зависит ни от угла взаимодействия, ни от квантовой отдачи (условие (4.36)) и, следовательно, имеет классический характер и присутствует всегда, при сколь угодно слабом поле излучения. Поэтому назовем ее основной запрещенной зоной, ширина которой равна

$$\Delta_0(\xi^2) = 2 \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 \right]^{1/2}. \quad (4.4)$$

Это и есть характерная особенность когерентного спонтанного процесса, приводящая к существенной нелинейности в соответствующем вынужденном процессе (см. подстрочное примечание<sup>3)</sup>), рассмотренной в разд. 1. Благодаря именно запрещенной зоне (4.4) имеет место нелинейное явление «отражения» частицы от фронта плоско-поперечного импульса волны. Действительно, как видно из условий (4.36), границы этой зоны определяют критическое значение (1.2) интенсивности волны (при  $\theta = 0$ ), выше которого волна становится потенциальным барьером для частицы и «отражает» ее [1, 3]. Две другие запрещенные зоны связаны с индуцированным черенковским взаимодействием по полю, т. е. когда угол взаимодействия  $\theta \neq 0$ . В этом случае появляется возможность также финитного движения частицы в волне — захват — с проявлением полной квантовой картины взаимодействия заряженной частицы с поперечной электромагнитной волной в среде. При этом из-за периодической структуры поля дискретные уровни связанных состояний частицы в режиме захвата переходят в зоны, возникает структура, аналогичная зонной структуре электронных состояний в твердых телах. Запрещенные зоны, возникающие при  $\theta \neq 0$ , расположены симметрично относительно фазовой скорости волны  $c/n$  и имеют одинаковую ширину  $\Delta_1(\xi, \theta) = \Delta_2(\xi, \theta) \equiv \Delta(\xi, \theta)$ :

$$\Delta(\xi, \theta) \approx \frac{c}{n} (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{p}{mc} \xi \sin \theta \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \xi^2 + \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.5)$$

Наличие этих запрещенных зон приводит к «отражению» частицы от соответствующих фазовых плоскостей, а также к возможности образования связанных состояний в волне, являющихся уже эффектами первого порядка по полю, что в классическом пределе согласуется с известными результатами [1, 5].

Отметим, что выражение (4.5) написано в соответствии с условием малости параметра задачи  $k^2 \ll 1$ , при котором справедливы полученные выше результаты. Последнее имеет следующий вид:

$$\frac{8eA_0cp \sin \theta}{\hbar^2 \omega^2 (n^2 - 1)} \ll 1. \quad (4.6)$$

При выполнении условия (4.6) формулы (2.7) и (3.3) с учетом (2.9) определяют волновую функцию частицы со спином  $S = 0$  в поле плоско-поперечной монохроматической волны в среде в следующем окончательном виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\perp \mathbf{r} + \frac{i}{\hbar} \frac{nE - cp_x}{n^2 - 1} \left( \frac{x}{c} - nt \right) \right] \left\{ C_1 \frac{H((\omega/2)(t - nx/c) + \alpha_1)}{\theta((\omega/2)(t - nx/c))} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -Z(\alpha_1) \frac{\omega}{2} \left( t - \frac{nx}{c} \right) \right] + C_2 \frac{H((\omega/2)(t - nx/c) - \alpha_1)}{\theta((\omega/2)(t - nx/c))} \times \right.$$

$$\times \exp \left[ Z(\alpha_1) \frac{\omega}{2} \left( t - \frac{n x}{c} \right) \right] \} . \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь случай линейной поляризации волны. Условия (3.9), (3.12) с учетом (2.11) определяют следующие области движения частицы в волне в зависимости от ее начальной скорости и угла взаимодействия (при выполнении условия (2.10), когда эффект интенсивности волны несуществен):

$$v \cos \theta \leq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1), \quad v \cos \theta \geq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1); \quad (4.8a)$$

$$v \cos \theta \leq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \left\{ \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 - (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{2p \sin \theta}{mc} \xi \right\}^{1/2}, \quad (4.8b)$$

$$v \cos \theta \geq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \left\{ \left[ \frac{\hbar \omega}{2E} (n^2 - 1) \right]^2 - (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{2p \sin \theta}{mc} \xi \right\}^{1/2}.$$

При  $\theta = 0$ , или при условии обратном (2.10), когда взаимодействие обусловлено интенсивностью волны, имеем

$$v \leq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \left\{ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{\xi^2}{2} + \left[ \frac{\hbar \omega}{E} (n^2 - 1) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (4.9a)$$

$$v \geq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \left\{ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{\xi^2}{2} + \left[ \frac{\hbar \omega}{E} (n^2 - 1) \right]^2 \right\}^{1/2};$$

$$v \geq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{\xi^2}{2} \right]^{1/2}, \quad v \leq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \left[ (n^2 - 1) \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \frac{\xi^2}{2} \right]^{1/2}; \quad (4.9b)$$

$$v \leq \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \frac{\hbar \omega}{E} (n^2 - 1), \quad v \geq \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \frac{\hbar \omega}{E} (n^2 - 1). \quad (4.9b)$$

При этом отдельное рассмотрение двух противоположных пределов угла взаимодействия или величины поля выявляет прямую зависимость индуцированного черенковского процесса и от интенсивности, и от поляризации волны. В отличие от случая циркулярной поляризации в поле линейно поляризованной волны связанные состояния частицы (захват) благодаря эффекту интенсивности образуются и при  $\theta = 0$ . В этом случае приведенные результаты справедливы при условии

$$\frac{e^2 A_0^2}{2(n^2 - 1)\hbar^2 \omega^2} \ll 1. \quad (4.10)$$

Что касается исчезновения первой запрещенной зоны вблизи черенковской скорости при  $\theta \neq 0$ , то это связано с пренебрежением эффектом интенсивности волны при условии (2.10). Как было показано выше, эта основная запрещенная зона для заряженной частицы в поле поперечной волны в преломляющей среде не зависит от угла

взаимодействия и присутствует всегда, при сколь угодно слабой интенсивности поля, и имеет чисто классическое происхождение.

До сих пор мы исследовали основные зоны, соответствующие значению  $N = 1$  в решении обобщенного уравнения Ламе. В общем случае для произвольного  $N$  волновая функция скалярной частицы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) = & \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_{\perp} \mathbf{r} + \frac{i}{\hbar} \frac{nE - cp_x}{n^2 - 1} \left( \frac{x}{c} - nt \right) \right] \left\{ C_1 \prod_{i=1}^N \frac{H \left( (\omega/2)(t - nx/c) + \alpha_i \right)}{\theta \left( (\omega/2)(t - nx/c) \right)} \times \right. \\ & \times \exp \left[ -Z(\alpha_i) \frac{\omega}{2} \left( t - \frac{nx}{c} \right) \right] + C_2 \prod_{i=1}^N \frac{H \left( (\omega/2)(t - nx/c) - \alpha_i \right)}{\theta \left( (\omega/2)(t - nx/c) \right)} \times \\ & \left. \times \exp \left[ Z(\alpha_i) \frac{\omega}{2} \left( t - \frac{nx}{c} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) определяются из системы уравнений [17]

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\operatorname{Sn} \alpha_j \operatorname{Cn} \alpha_j \operatorname{dn} \alpha_j + \operatorname{Sn} \alpha_i \operatorname{Cn} \alpha_i \operatorname{dn} \alpha_i}{\operatorname{Sn}^2 \alpha_j - \operatorname{Sn}^2 \alpha_i} = 0, \\ \left[ \sum_{i=1}^N \operatorname{Cn} \alpha_i \frac{\operatorname{dn} \alpha_i}{\operatorname{Sn} \alpha_i} \right]^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\operatorname{Sn}^2 \alpha_i} = B. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формула (4.11) справедлива при выполнении условия

$$\frac{16eA_0cp \sin \theta}{N(N+1)\hbar^2\omega^2(n^2-1)} \ll 1, \quad (4.13)$$

из которого видно, что при  $N \gg 1$  волновая функция (4.11) справедлива в максимально допустимых сильно преломляющих средах, в лазерных полях. Оно также показывает, что обсужденные результаты для основных зон в поле циркулярно поляризованной волны в случае  $N = 1$  также могут быть применены в сильных полях при достаточно малых углах взаимодействия  $\theta \ll 1$ .

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Квантовое описание взаимодействия заряженной частицы с плоско-поперечной электромагнитной волной в среде на основе релятивистского уравнения движения сводится к решению уравнения Матье (одномерная задача по волновой координате). Развитый в настоящей статье метод построения нелинейного приближенного решения уравнения Матье основан на точном решении обобщенного уравнения Ламе при малом значении модуля функции эллиптического синуса, когда последняя стремится к функции обыкновенного синуса (см. (3.1)). Используя это свойство двоякопериодической функции  $\operatorname{Sn}(\alpha, k)$ , уравнение Матье мы заменяем обобщенным уравнением Ламе, обладающим основными свойствами уравнения Матье, но в отличие от него допускающим

точное решение. Исследован класс ограниченных решений уравнения Ламе и с помощью них построена волновая функция частицы. Согласно последней, спектр собственных значений величин, характеризующих состояние частицы в поле поперечной монохроматической волны в диэлектрической среде, обладает зонной структурой. В системе отсчета, связанной с волной, имеется только статическое магнитное поле, т. е. задача стационарна, следовательно, энергия сохраняется (сохраняется также обобщенный импульс частицы в плоскости поляризации плоско-поперечной волны), и энергетический спектр частицы обладает зонной структурой. В лабораторной системе сохраняющимися величинами являются

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left( E - \frac{c}{n} p_x \right) = \text{const}, \quad p_{\perp} = \text{const}$$

(2.3а), из которых следует зонная структура для начальной продольной скорости частицы. Последней и определяется допустимая ширина черенковского резонанса или степень близости к черенковскому конусу с внешней волной в индуцированном черенковском процессе. Это типичный нелинейный резонанс при вынужденных колебаниях, когда ширина резонанса нелинейным образом зависит от амплитуды внешней периодической силы, в данном случае — от величины поля волны. Допустимые значения ширины нелинейного черенковского резонанса определяются условиями (4.3) и (4.8), (4.9) соответственно для циркулярной и линейной поляризации волны. При меньших значениях этой ширины, т. е. при приближении к начальному черенковскому конусу ближе чем на определенное «критическое» значение (границы указанных условий), частица не может дальше проникнуть в волну — существуют запрещенные области для движения частицы в поле волны. Наличие этих запрещенных зон в зависимости от угла взаимодействия, интенсивности и поляризации волны, приводит к «отражению» частицы от соответствующих фазовых плоскостей, а также к образованию связанных состояний — захвату частицы поперечной волной. Из последнего, в частности, следует отсутствие зонной структуры в плазмоподобных средах, поскольку невозможны связанные состояния частицы с поперечной волной, распространяющейся с фазовой скоростью  $v_{ph} > c$ .

Найденные нелинейные решения уравнения Матье на основе точного решения уравнения Ламе справедливы при условии малости модуля функции эллиптического синуса  $k^2 \ll 1$ , когда обобщенное уравнение Ламе переходит в уравнение Матье. Это единственное приближение для построения нелинейного решения уравнения Матье на основе развитого в настоящей статье метода. В случае циркулярной поляризации волны уравнение движения частицы имеет вид уравнения Матье, поэтому полученные результаты справедливы при условии  $k^2 \ll 1$ , что дается выражением (4.6) для первой зоны ( $N = 1$ ) и выражением (4.13) для произвольного  $N$ . В случае линейной поляризации уравнение движения частицы сводится к уравнению Матье при пренебрежении членом, пропорциональным интенсивности волны (условие (2.10)), поэтому полученные результаты в этом случае справедливы при выполнении кроме (4.6) также и условия (2.10). Однако в реальных случаях для черенковского процесса условие (2.10), при котором уравнение движения сводится к уравнению Матье, выполняется практически всегда, так что остается опять условие  $k^2 \ll 1$  (условие (4.6)). При  $\theta = 0$  вместо (4.6) имеем условие (4.10).

Приведенные формулы для первой зоны ( $N = 1$ ) соответствуют случаю весьма слабых полей. Именно в таких полях выявлена характерная для индуцированного черен-

ковского процесса существенная нелинейность, которая обусловлена когерентным накоплением квантовых эффектов туннельного прохождения или надбарьерного отражения от бесконечного числа неглубоких «потенциальных ям волны». В рассмотренных полях (см. (4.6)) вероятности этих эффектов в каждой отдельной яме чрезвычайно малы. Однако благодаря когерентному характеру черенковского процесса (обладающего в принципе бесконечной длиной когерентности) и трансляционной симметрии поля монохроматической волны происходит резонансное увеличение вероятностей этих эффектов, приводящих к зонной структуре. Именно развитый в статье метод учитывает одновременный вклад от бесконечных полюсов вида «брэгговских резонансов».

Что касается учета спинового взаимодействия, то рассмотрение задачи на основе уравнения Дирака будет представлено отдельно.

## Литература

1. В. М. Арутюнян, Г. К. Аветисян КЭ **7**, 54 (1972).
2. В. М. Арутюнян, Г. К. Аветисян, ЖЭТФ **62**, 1639 (1972).
3. V. M. Haroutunian and H. K. Avetissian, Phys. Lett. A **44**, 281 (1973).
4. Г. К. Аветисян, С. Г. Оганесян, Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ. **8**, 12 (1973).
5. Н. К. Avetissian, Phys. Lett. A **69**, 399(1978).
6. Г. К. Аветисян, А. К. Аветисян, Х. В. Седракян, ЖЭТФ **94**(4), 21 (1988).
7. V. M. Haroutunian and H. K. Avetissian, Phys. Lett. A **59**, 115 (1976).
8. Н. К. Avetissian, А. А. Jivanian, and R. G. Petrossian, Phys. Lett. A **66**, 161 (1978).
9. Г. К. Аветисян, А. К. Аветисян, Х. В. Седракян, ЖЭТФ **99**, 50 (1991).
10. Н. К. Avetissian et al., Phys. Rev. D **54**, 5509 (1996).
11. В. М. Арутюнян, С. Г. Оганесян, УФН **164**, 1089 (1994).
12. V. M. Haroutunian and S. G. Oganesyian, Phys. Rep. **270**, 217 (1996).
13. Г. К. Аветисян, УФН **167**, 793 (1997).
14. С. Г. Оганесян, Г. К. Аветисян, Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ. **8**, 19 (1975).
15. Н. К. Avetissian, Phys. Lett. A **63**, 9 (1977).
16. Н. К. Avetissian, Phys. Lett. A **58**, 144 (1976).
17. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа. Ч. 2, Наука, Москва (1963).