

## КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С ЗАМКНУТЫМИ ВРЕМЕНИПОДОБНЫМИ КРИВЫМИ

*А. Ю. Неронов\**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 апреля 1997 г.

Рассматривается постановка задачи Коши для уравнения Клейна–Гордона в пространстве-времени с кротовой норой. Показано, что если замкнутые времениподобные кривые проходят через поверхность Коши, то глобальное решение в высокочастотном (квазиклассическом) пределе существует, если только начальные данные удовлетворяют некоторым нелокальным условиям согласованности. В простейшем случае эти условия определяют дискретный спектр частот (энергии квазиклассической скалярной частицы).

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о поведении классических и квантовых полей на фоне решений уравнений Эйнштейна, содержащих замкнутые времениподобные кривые, исследовался в ряде работ [1, 2] в связи с вопросом о возможности существования пространства-времени с машиной времени, предложенного в [3–5], а также с проблемой самосогласованности физических законов в таком пространстве-времени [6, 7]. Глобальные решения динамических уравнений должны удовлетворять «принципу самосогласованности», исключающему возможность появления парадоксов, связанных с нарушением причинности в пространстве-времени с замкнутыми времениподобными кривыми.

Нетривиальная топология пространства-времени, а также наличие замкнутых времениподобных кривых, проходящих через поверхность Коши, накладывают ограничения на начальные данные для решения задачи Коши для уравнения Клейна–Гордона. Это связано с тем, что не любое решение, определенное в окрестности поверхности Коши, может быть продолжено до глобального решения во всем пространстве-времени.

Ситуация может быть полностью проанализирована для определенного класса решений уравнения Клейна–Гордона, а именно, для высокочастотных решений. В этом случае существует техника построения решения в целом, развитая Масловым (см., например, [8]), позволяющая строить глобальные решения по геометрическим объектам (лагранжевым подмногообразиям), заданным в фазовом пространстве гамильтоновой динамической системы, естественно сопоставляемой уравнению в частных производных.

В качестве модельного пространства-времени мы выбираем решение уравнений Эйнштейна с кротовой норой [3]. Асимптотически плоские области сшиты таким обра-

\*E-mail: aneronov@mech.math.msu.su

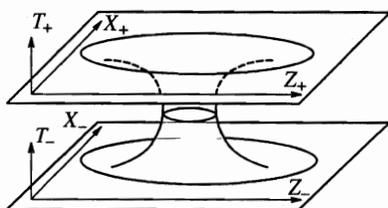


Рис. 1

зом, что кротовая нора служит «вечной» машиной времени. Такое же пространство-время использовано для анализа поведения скалярного поля в [9].

Глобальные высокочастотные решения уравнения Клейна–Гордона, построенные с помощью метода Маслова, удовлетворяют на поверхности Коши нелокальным условиям, выражающим корреляцию фаз решения в различных точках поверхности. В случае, когда решение сосредоточено в окрестности замкнутой траектории классической гамильтоновой системы (ситуация, соответствующая в данном случае причинному парадоксу), решение может иметь только дискретный набор частот. Этот результат приведен в разд. 4, разд. 2 содержит постановку задачи, разд. 3 — сведения по методу Маслова.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем постановку задачи Коши для скалярного поля  $\Phi$ :

$$\left( g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0, \tag{1}$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка (единицы измерения выбираем так, что скорость света  $c$  равна единице). Рассматривается случай, когда через трехмерную поверхность Коши  $\Sigma^3$  в пространстве-времени  $M^4$  проходят замкнутые времениподобные кривые.

В качестве модельного пространства-времени, содержащего замкнутые времениподобные кривые, рассмотрим решение уравнений Эйнштейна, содержащее кротовую нору [1]. На цилиндре  $R^2 \times S^1$  выберем одну из метрик типа кротовой норы [3] (рис. 1), например:

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{2}$$

В окрестностях  $l \gg b_0$  и  $l \ll -b_0$  существуют две асимптотически плоские области с координатами  $(X_+, Y_+, Z_+, T_+)$  и  $(X_-, Y_-, Z_-, T_-)$ , в которых метрика слабо отличается от метрики Минковского. Зададим функции склейки координатных карт  $(X_+, Y_+, Z_+, T_+)$  и  $(X_-, Y_-, Z_-, T_-)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} T_+ &= T_- + \delta T, \\ X_+ &= X_-, \\ Y_+ &= Y_-, \\ Z_+ &= Z_- + \delta Z. \end{aligned} \tag{3}$$

Замкнутые времениподобные кривые начинаются в некоторой точке  $(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$ , попадают в горловину кротовой норы в момент времени  $T$ , выходят из другой горловины

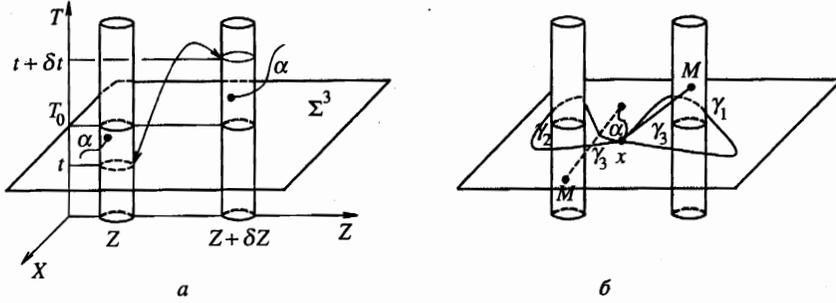


Рис. 2

в момент времени  $T - \Delta T$ , предшествующий моменту  $T_0$ , и после этого соединяются с точкой  $(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$  времениподобной кривой, направленной в будущее. Метрика (2) почти плоская везде за исключением окрестностей горловин кротовой норы. Если расстояние между горловинами много больше характерной длины ручки ( $b_0$  для метрики (2)), то как первое приближение можно использовать следующую модель. Из пространства-времени Минковского вырезаны два полых цилиндра  $C_1$  и  $C_2$  вида  $R^1 \times B^3$  ( $B^3$  — трехмерный шар) (см. рис. 2а), оси которых совпадают с мировыми линиями центров горловин  $X = 0, Y = 0, Z = 0$  и  $X = 0, Y = 0, Z = \delta Z$ . После этого берега разрезов склеены так, что сфера  $S^2 = \{(X, Y, Z, T) \in C_1, T = T_0\}$  склеивается со сферой  $S^2 = \{(X, Y, Z, T) \in C_2, T = T_0 + \delta T\}$ .

Поверхность Коши в таком пространстве-времени выберем следующим образом. Рассмотрим пространственноподобное сечение  $T = T_0$ . Существуют времениподобные кривые, которые не пересекают эту поверхность. Они попадают в горловину кротовой норы в момент времени  $T < T_0$  и выходят из нее в момент времени  $T > T_0$  (как, например, кривая  $\alpha$  на рис. 2а). Дополнив поверхность  $T = T_0$  частью цилиндра  $C_1$ :  $(X, Y, Z, T) \in C_1: T_0 - \delta T < T < T_0$ , мы получим поверхность  $\Sigma^3$ , через которую хотя бы раз проходит любая (полная) времениподобная кривая. Мы выберем  $\Sigma^3$  в качестве поверхности Коши. Такая поверхность Коши рассматривалась в работе [1].

Поскольку через поверхность  $\Sigma^3$  проходят замкнутые времениподобные кривые, данные Коши для скалярного поля не могут быть выбраны произвольно. Мы проведем анализ этого эффекта на примере высокочастотных решений уравнения Клейна–Гордона.

Высокочастотную асимптотику решений уравнения Клейна–Гордона естественно рассматривать как квазиклассическое приближение квантовой механики скалярной релятивистской частицы. Действительно, уравнение (1) можно интерпретировать как уравнение для волновой функции  $\Phi(x)$  скалярной частицы. Решение выбирается в виде произведения быстроосциллирующего фазового члена на медленноосциллирующую амплитуду:

$$\Phi(x) = \exp \left[ \frac{iS(x)}{\hbar} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \Psi_k, \tag{4}$$

где  $\hbar \rightarrow 0$  — малый параметр.

Метрика (2) стационарна, и поэтому решение можно разложить по модам с посто-

янной частотой  $\Phi = e^{i\omega t}\Psi$ . Рассматривая высокочастотную асимптотику, мы ограничиваемся модами  $\omega \rightarrow \infty$  при  $\hbar \rightarrow 0$ .

### 3. МЕТОД МАСЛОВА ПОСТРОЕНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ РЕШЕНИЙ

Метод Маслова [8] позволяет строить высокочастотные решения уравнения (1) на многообразии  $M^4$  в целом, основываясь на анализе геометрии классической гамильтоновой системы, соответствующей уравнению в частных производных. Ниже мы приводим необходимые сведения об этом методе.

Фазовое пространство гамильтоновой системы, соответствующей уравнению (1), — кокасательное расслоение  $T^*M$  к пространственно-временному многообразию  $M^4$  со стандартной симплектической формой  $\Omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ . Гамильтониан имеет вид

$$H = g^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu. \quad (5)$$

Подстановка функции вида (4) в уравнение (1) дает уравнение Гамильтона–Якоби в нулевом порядке по  $\hbar$ :

$$H(x, \partial S/\partial x) = -m^2.$$

Функция  $S(x)$  задает в фазовом пространстве  $T^*M$  четырехмерную поверхность по формуле  $\Lambda^4 = \{(x, p(x) = \partial S/\partial x)\}$ . Эта поверхность обладает таким свойством: симплектическая форма  $\Omega$  обращается в нуль при ограничении на поверхность  $\Sigma^4$ . Четырехмерные поверхности в восьмимерном фазовом пространстве, на которых  $\Omega$  обращается в нуль, называются лагранжевыми. Лагранжева поверхность  $\Lambda^4$ , определяющая решение уравнения Гамильтона–Якоби, может быть построена так. Необходимо задать начальные значения  $S(x)$  и  $\partial S/\partial x^0$  при  $x \in \Sigma^3$ . Тем самым определена поверхность  $\Lambda^3 = \{(x, p): x \in \Sigma^3, p = \partial S(x)/\partial x\}$ . После этого, выпустив из точек  $\Lambda^3$  траектории гамильтоновой системы (5), мы получим четырехмерную поверхность  $\Lambda^4$ . В некоторой окрестности начальной поверхности  $\Sigma^3$  поверхность  $\Lambda^4$  однозначно проектируется на  $R^4 = \{x\}$ , т. е.  $\Lambda^4 = \{(x, p(x) = \partial S/\partial x)$  для некоторой функций  $S(x)$ . Однако  $\Lambda^4$  не обязательно всюду однозначно проектируется на  $R^4 = \{x\}$ . Точки, в которых однозначная проектируемость нарушается, образуют цикл особенностей проектирования многообразия  $\Lambda^4$ , а их проекции на  $R^4 = \{x\}$  являются каустиками траектории динамической системы с гамильтонианом (5). Таким образом, решение уравнения Клейна–Гордона не может, вообще говоря, быть всюду выбрано в виде (4) (так же, как квазиклассическое разложение справедливо вдали от точек поворота). Тем не менее можно продолжить решение за каустики, используя конструкцию оператора Маслова. Решение за точками каустики определяется тем же лагранжевым подмногообразием  $\Lambda^4$ . Для построения решения в целом, оказывается, важна глобальная структура подмногообразия  $\Lambda^4$ , которая может быть достаточно сложной. Например, на нем могут существовать замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в точку, оставаясь на данном лагранжевом многообразии (нетривиальные циклы).

В первом порядке по  $\hbar$  возникает уравнение для функции  $\Psi_0(x)$ , называемое уравнением переноса. В области, где  $\Lambda^4$  однозначно проектируется на  $R^4 = \{x\}$ , функцию  $\Psi_0(x)$  можно считать функцией на подмногообразии  $\Lambda^4$ . Определим

$$\tilde{\Psi}_0(y) = \sqrt{\frac{\partial y}{\partial x}} \Psi_0(x(y)),$$

где  $y$  — координаты на лагранжевом подмногообразии  $\Lambda^4$ . Уравнение переноса имеет вид  $d\tilde{\Psi}_0/\partial\tau = 0$  — условие постоянства функции  $\tilde{\Psi}_0$  вдоль траекторий системы (5) ( $\tau$  — время вдоль траекторий в фазовом пространстве). В точках в окрестности каустик и за каустиками разложение (4) несправедливо. Однако можно построить функцию  $\Psi_0$ , постоянную вдоль траекторий системы на всем лагранжевом многообразии  $\Lambda^4$ .

Для того чтобы получить решение в целом, необходимо построить некоторый специальный (канонический) атлас карт лагранжева подмногообразия  $\Lambda^4$ . С помощью оператора Маслова по функции  $\Psi_0$  на  $\Lambda^4$  определяется часть решения уравнения Клейна–Гордона. Для нас важно то, что при согласовании различных частей решения, полученных таким образом, возникают ограничения на выбор лагранжева подмногообразия  $\Lambda^4$ . А именно, на каждом нетривиальном цикле  $\gamma$  на  $\Lambda^4$  должно выполняться интегральное условие

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma} p_a dx^a - \frac{1}{4} \text{ind } \gamma = k, \quad (6)$$

называемое условием квантования. Здесь  $\text{ind } \gamma$  — индекс кривой  $\gamma$ , который подсчитывает с соответствующими знаками точки пересечения кривой  $\gamma$  с циклом особенностей проектирования подмногообразия  $\Lambda^4$ . Если на каждом нетривиальном цикле  $\Lambda^4$  выполнено условие (6), то можно построить приближенное (в различных порядках по  $\hbar$ ) решение уравнения Клейна–Гордона. Условия (6) являются многомерными аналогами условия квантования Бора–Зоммерфельда. Лагранжево подмногообразие, удовлетворяющее этим условиям, называется квантованным.

Мы не приводим явный вид оператора Маслова, отображающего функцию  $\tilde{\Psi}_0$  на квантованном лагранжевом подмногообразии  $\Lambda^4$  в глобальное приближенное решение уравнения Клейна–Гордона на многообразии  $M^4$  (см. [8]). Нас интересуют лишь условия существования такого глобального решения, задаваемое выражением (6).

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С ЗАМКНУТЫМИ ВРЕМЕНИПОДОБНЫМИ КРИВЫМИ

Решение задачи Коши в высокочастотном пределе сводится к нахождению подходящего начального подмногообразия  $\Lambda^3$  в фазовом пространстве  $\Pi$ , проектирующегося на поверхность Коши  $\Sigma^3$  в пространстве-времени. Выпуская интегральные траектории гамильтонова векторного поля с гамильтонианом (5) из точек  $\Lambda^3$ , мы получим четырехмерное инвариантное относительно гамильтонова потока лагранжево подмногообразие  $\Lambda^4$ . Далее необходимо проверить выполнение условий квантования (6) на базисных нетривиальных циклах этого подмногообразия. Тем самым мы ограничиваем выбор  $\Lambda^4$  и, следовательно, начального подмногообразия  $\Lambda^3$ . Это значит, что мы получаем ограничения на выбор начальных данных на поверхности Коши  $\Sigma^3$ .

Рассмотрим ситуацию, когда траектории классической системы попадают в правый вход в кротовую нору (см. рис. 2б). Тогда, выйдя из левого входа в момент времени  $T$ , предшествующий моменту  $T_0$ , в который задана поверхность Коши  $\Sigma^3$ , траектория с необходимостью пересечет  $\Sigma^3$  снова. Первое простое требование самосогласованности начальных данных состоит в том, чтобы эта траектория попала снова на начальную поверхность  $\Lambda^3$ . Таким образом, начальное подмногообразие  $\Lambda^3$  не может быть произвольным, как это было в отсутствие замкнутых времениподобных кривых.

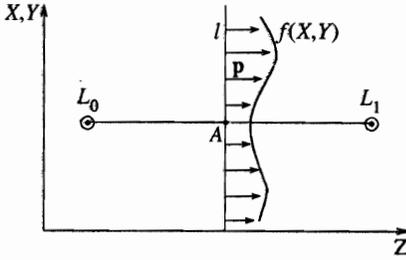


Рис. 3

Рассмотрим естественный способ «согласования» начальной поверхности  $\Lambda^3$ , позволяющий получать согласованную в вышеизложенном смысле поверхность  $\Lambda^3$ . Начнем с произвольной поверхности  $\Lambda_0^3 = \{(x, p(x) = \partial S/\partial x), x \in \Sigma^3\}$ . Она, вообще говоря, не является самосогласованной. Построим траектории гамильтоновой системы (5). Рассмотрим те из них, которые, пройдя через кротовую нору, пересекают поверхность  $Q = \{(x, p): x \in \Sigma^3\}$  в некоторый момент  $\tau$  времени вдоль траектории. Такое поведение траекторий определяет некоторое отображение последования на поверхности  $Q$ , в которую вложено  $\Lambda_0^3$ . Образы  $(x(\tau), p(\tau))$ , вообще говоря, не принадлежат  $\Lambda_0^3$ . Это значит, что в  $Q$  существует другая компонента  $V_1^3 = \Lambda^4 \cap Q$ , отличная от  $\Lambda_0^3$ . Мы можем «согласовать» начальные данные для  $\Sigma^3$  на этом шаге, определив новое начальное подмногообразие  $\Lambda_1^3 = \Lambda_0^3 \cup V_1^3$ . Повторяя описанную процедуру для нового начального подмногообразия, получим новую коррекцию начальных данных  $\Lambda_2^3$  и т. д. В пределе этой процедуры получается согласованное начальное подмногообразие  $\Lambda_\infty^3$ .

В качестве иллюстрации того, что итоговое подмногообразие  $\Lambda_\infty^3$  может оказаться достаточно сложным, рассмотрим пример, изображенный на рис. 3. Рассматривается безмассовое скалярное поле. Для него  $p_0^2 = |\mathbf{p}|^2$ , поэтому можно изобразить лишь пространственную часть импульса. Пусть направление  $\mathbf{p}$  совпадает с направлением между входами в кротовую нору, а модуль вектора  $\mathbf{p}$  на плоскости  $l = \{x \in \Sigma^3, Z = \text{const}\}$  задается некоторой функцией  $|\mathbf{p}|^2 = f(X, Y)$ . Число образов точки  $A$  на рис. 3 при отображении последования бесконечно, если только параметры расположения кротовой норы не подобраны специальным образом. Точки в окрестности  $A$  имеют конечное число образов, которое, однако, неограниченно возрастает при приближении к точке  $A$ . Таким образом, можно видеть, что структура предельного начального подмногообразия  $\Lambda_\infty^3$  достаточно сложна.

Теперь мы ограничимся простейшим случаем, когда начальное подмногообразие  $\Lambda^3$  состоит из единственного связанного куска, который однозначно проецируется на  $\Sigma^3$  и является сразу согласованным в смысле процедуры, описанной в предыдущем абзаце, т. е. образы  $(x(\tau), p(\tau))$  точек  $(x(0), p(0))$  при отображении последования лежат в  $\Lambda^3$ .

Лагранжево подмногообразие  $\Lambda^4$ , построенное по начальному подмногообразию  $\Lambda^3$ , определяет решение уравнения Клейна–Гордона, если на базисных нетривиальных циклах удовлетворены условия (6). У лагранжева подмногообразия  $\Lambda^4$  существует нетривиальный цикл  $\gamma_3$  (см. рис. 2б). Он начинается в некоторой точке  $x \in \Lambda^3$ , идет вдоль траектории, которая попадает в правый вход кротовой норы, выходит из левого входа, попадает в некоторую точку  $x'$  поверхности  $\Lambda^3$  и после этого соединяется некоторой кривой  $\alpha$ , лежащей на  $\Lambda^3$  с точкой  $x$ .

Рассмотрим условие квантования (6) на нетривиальном цикле  $\gamma_3$ . Пусть  $(t, l, \theta, \phi)$  — координаты в окрестности горловины кротовой норы,  $(p_t, p_l, p_\theta, p_\phi)$  — соответствующие

сопряженные импульсы. Гамильтониан (5) при учете явного вида метрики (2) принимает форму

$$H = -p_t^2 + p_l^2 + \frac{1}{b_0^2 + l^2} \left( p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) = -m^2. \quad (7)$$

Гамильтонова система с гамильтонианом (7) интегрируема. Рассмотрим траектории с  $\theta = \pi/2$ ,  $p_\theta = 0$  для простоты. Первые интегралы

$$E = p_t, \quad M = p_\phi. \quad (8)$$

Траектории в фазовом пространстве определяются выражением

$$p_l(l) = \sqrt{E^2 - m^2 - \frac{M^2}{b_0^2 + l^2}}. \quad (9)$$

Тогда интеграл вдоль траектории, входящий в условие квантования (6), есть

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_3} p_i dx^i &= \int_{\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i + \int \left\{ p_t \frac{dt}{d\tau} + p_l \frac{dl}{d\tau} + p_\phi \frac{d\phi}{d\tau} \right\} d\tau = \\ &= \int_{\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i + \int \left\{ -2E^2 + 2p_l^2 + \frac{2M^2}{b_0^2 + l^2} \right\} d\tau = \\ &= S(x) - S(x') - m^2 \int_{l_-}^{l_+} \frac{dl}{p_l(l)} = S(x) - S(x') - \frac{m^2}{E} \Delta T, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta T$  — сдвиг времени в прошлое, происходящий за счет распространения через кротовую нору. Принимая во внимание явное выражение (9) для  $p_l$ , находим, что  $\Delta T$  выражается через эллиптический интеграл:

$$\Delta T = \int \frac{d\tau}{d\tau} d\tau = \int \frac{\partial H}{\partial p_t} \frac{d\tau}{dl} dl = -2E \int_{l_-}^{l_+} \frac{dl}{\sqrt{E^2 - \tilde{m}^2 - M^2/(b_0^2 + l^2)}}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (10) в условие квантования (6), находим, что это условие выражает корреляцию фаз решения в точках образа и прообраза при отображении последования:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \left[ S(x) - S(x') - \frac{m^2}{E} \Delta T \right] + \text{ind } \gamma_3 = k. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, который в данной задаче является аналогом ситуации, возникающей в причинном парадоксе. Пусть решение сосредоточено в окрестности траектории, которая проходит через кротовую нору, и начальная точка  $x$  близка к своему образу  $x'$ . Это значит, что некоторый наблюдатель испускает квазиклассические частицы так, что эти частицы, пройдя через нору, попадают к наблюдателю в тот же момент времени.

При  $x = x'$  фазы решения автоматически совпадают и условие квантования (12) дает условие для энергии квазиклассической частицы:

$$-\frac{m^2}{2\pi\hbar E} \Delta T + \text{ind } \gamma_3 = k. \quad (13)$$

Энергия  $E$  входит в выражение (11) для  $\Delta T$ , поэтому условие (13) — достаточно сложная функция  $E$  и параметров кротовой норы. В простейшем случае, когда частица распространяется вдоль линии, соединяющей входы в нору, угловой момент  $M$  равен нулю и интеграл (11) может быть вычислен. Тогда условие квантования (13) следующее:

$$\frac{m^2 \Delta Z}{2\pi\hbar \sqrt{E^2 - m^2}} + \text{ind } \gamma_3 = k, \quad (14)$$

где  $\Delta Z$  — расстояние между входами в кротовую нору. Если лагранжево многообразие всюду однозначно проектируется на конфигурационное пространство  $R^4 = \{x\}$ , то индекс кривой  $\gamma_3$  равен нулю и условие квантования определяет дискретный спектр энергии квазиклассической частицы:

$$E = \pm m \sqrt{1 + m^2 \frac{(\Delta Z)^2}{4\pi^2 \hbar^2 k^2}}. \quad (15)$$

Интерпретация такого правила квантования следующая. Наблюдатель может испускать частицы «в прошлое», только при этом эти частицы должны удовлетворять некоторому условию самосогласованности, которое в данном случае принимает вид условия дискретности спектра энергий.

В случае, когда масса равна нулю, уравнение Клейна–Гордона становится волновым уравнением и может описывать распространение света. Условие квантования (13) в этом случае тривиально. Таким образом, метод Маслова не дает никаких ограничений на распространение света по замкнутым изотропным геодезическим в рассматриваемой задаче.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы рассмотрели постановку задачи Коши для скалярного поля на фоне пространства-времени  $M^4$ , содержащего замкнутые времениподобные кривые. Наличие замкнутых времениподобных кривых, проходящих через поверхность Коши  $\Sigma^3$  накладывает ограничения на выбор начальных данных на этой поверхности. Для того чтобы локальное решение задачи Коши можно было бы продолжить до глобального, начальные данные должны удовлетворять некоторым нелокальным условиям самоогласованности (12). Геометрический смысл этих условий состоит в том, что лагранжево подмногообразие  $\Lambda^4$  в фазовом пространстве  $\Pi$  классической гамильтоновой системы, соответствующей уравнению Клейна–Гордона, определяющее глобальное решение в высокочастотном пределе, должно быть квантованным в смысле теории Маслова. В простейшем случае такие нелокальные условия самосогласованности дают ограничения (15) на спектр частот решений уравнения Клейна–Гордона или на спектр энергий квазиклассической скалярной релятивистской частицы, описываемой этим уравнением. Таким образом, сигналы (квазиклассические частицы), посылаемые «в прошлое», могут иметь только специальную форму и дискретную энергию.

Мы рассмотрели только простейший случай самосогласованных начальных данных для  $\Sigma^3$ , соответствующий наиболее простому типу геометрии лагранжевой поверхности: начальное подмногообразие  $\Lambda^3$  над  $\Sigma^3$  состоит из одного связного куска  $\Lambda^3 = \{(x, p(x)), x \in \Sigma^3\}$ . В случае, когда  $\Lambda^3$  состоит более чем из одного куска, на  $\Lambda^4$  появляются нетривиальные циклы более сложного вида (например, соответствующие траекториям, попадающим в исходный связный кусок после многократного прохождения через кротовую нору). На этих циклах также должны выполняться условия квантования (6). Это дает новые ограничения на выбор начальных данных для  $\Sigma^3$ .

Задача построения квазиклассических решений уравнения Дирака в пространстве-времени с замкнутыми времениподобными кривыми может быть рассмотрена в рамках такого же формализма. Наблюдаемый в данной задаче эффект влияния глобальной структуры пространства-времени на постановку задачи Коши для уравнения в частных производных может быть проанализирован в рамках метода Маслова на фоне других решений уравнений Эйнштейна.

Автор хотел бы выразить благодарность В. А. Березину, А. М. Боярскому и А. И. Шафаревичу за плодотворное обсуждение затронутого в статье вопроса. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-17064-а).

## Литература

1. J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverria, G. Klinkhammer, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Phys. Rev. D **42**, 1915 (1990).
2. F. Echeverria, G. Klinkhammer, and K. S. Thorne, Phys. Rev. D **44**, 1077 (1991).
3. M. S. Morris and K. S. Thorne, Amer. J. Phys. **56**, 395 (1988).
4. И. Д. Новиков, ЖЭТФ **95**, 769 (1989).
5. M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
6. E. V. Mikheeva and I. D. Novikov, Phys. Rev. D **47**, 1432 (1993).
7. A. Carlini, V. P. Frolov, M. B. Mensky, and I. D. Novikov, Int. J. Mod. Phys. **4**, 557 (1995).
8. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, Москва (1976).
9. J. L. Friedman and M. S. Morris, Phys. Rev. Lett. **66**, 401 (1991).