

ДИНАМИКА ДВУМЕРНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ ВИХРЕЙ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

И. А. Ивонин

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 мая 1997 г.

Рассматривается динамика темных заряженных солитонов (вихрей) в двумерном ($2D$) нелинейном уравнении Шредингера (НУШ) с потенциалом отталкивательного типа. Динамика этих точечных вихрей в НУШ существенно отличается от динамики вихрей в несжимаемой жидкости возможностью волнового излучения энергии, импульса и момента импульса. Существенно также наличие характерного масштаба задачи — параметра экранировки. Численно и аналитически рассмотрены родственные задачи коллапса вихревого диполя и распада многозарядного вихря в ограниченной абсолютно отражающим кожухом области. Получены условия и скейлинг коллапса вихревого диполя; ограничения на распад многозарядного вихря в ограниченной области.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с потенциалом отталкивательного типа

$$i\Psi_t + \frac{1}{2}\Delta\Psi - U(|\Psi|^2)\Psi = 0 \quad (1)$$

описывает [1] распространение модулированных ионно-звуковых волн в плазме ($U = |\Psi|^2$); нелинейных волн в световодах с «нормальной» зависимостью показателя преломления от интенсивности света ($U = |\Psi|^2 + \alpha|\Psi|^4$); пространственную картину дифракции лазерного пучка, прошедшего через дифракционную решетку и рассеивающий материал ($U = |\Psi|^2$)... Кроме того, (1) в последнее время широко применяется для описания возбуждений в бозе-конденсате [2–4].

В $1D$ -случае это уравнение интегрируемо при $U = |\Psi|^2$ [5]; имеет однопараметрическое семейство частных решений в виде темных солитонов [1, 6] — экспоненциально экранированных понижений интенсивности амплитуды поля $|\Psi|^2$, выходящих на некоторое ненулевое фоновое значение. Глубина дырок (параметр решений) однозначно определяет скорость движения темных солитонов. Важность этих частных решений заключается в том, что они в неинтегрируемом НУШ, подобно обычным солитонам [7], являются нелинейными аттракторами: при взаимодействии с линейными волнами малой амплитуды не меняют своей формы, а лишь увеличивают амплитуду своей модуляции (глубину дырок) [8].

В $2D$ -случае одномерные темные солитоны неустойчивы относительно поперечных возмущений [9]. Развитие этой самофокусирующей неустойчивости приводит к образованию ограниченных $2D$ -решений [3]. Для интерпретации этих локальных решений весьма удобна «гидродинамическая» подстановка (Madelung). А именно, в поле

$\Psi = \sqrt{\rho} \exp(i\phi)$ квадрат амплитуды ρ и фаза ϕ имеют смысл плотности и потенциала скорости некоторой изомороженной сжимаемой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla \phi) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 &= -h, \end{aligned} \quad (2)$$

с нелокальной удельной энтальпией h . Далее для определенности в (1) выбран квадратичный потенциал $U = |\Psi|^2 - 1$ с фоновыми (невозмущенными) значениями поля и плотности: $|\Psi|^2 = \rho = 1$. В этом случае энтальпия h в уравнении Бернулли (2) имеет вид

$$h = \rho - 1 - \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}.$$

Однозначность поля Ψ требует лишь $2\pi N$ -определенности потенциала скорости ϕ . Возможные точки ветвления ϕ соответствуют наличию точечных вихрей с дискретной амплитудой N и потенциалом скорости вблизи вихря $\phi = N\theta$ (θ — азимутальный угол). Однозначному потенциалу скорости соответствуют чисто потенциальные течения типа звуковых волн.

Сохранение (вмороженность) амплитуды точечных вихрей приводит к сохранению «топологического» заряда N соответствующих им темных солитонов НУШ (1). В отличие от однопараметричных темных $1D$ -солитонов, «заряженные» ($N \neq 0$) темные $2D$ -солитоны не имеют параметра — наличие точки ветвления подразумевает достижение максимальной глубины (значения $\Psi = 0$) в месте нахождения точечного вихря. Но раз возникнув, вихрь не может исчезнуть, иначе чем в результате коллапса с другим вихрем противоположного заряда. Воздействие потенциальных волн произвольной амплитуды не может привести к исчезновению уединенного вихря, что и оправдывает повышенный интерес к изучению динамики заряженных солитонов.

Вихревая пара (совокупность двух темных $2D$ -солитонов с противоположными зарядами) имеет, подобно $1D$ -солитонам, один параметр — расстояние между вихрями. Этот параметр полностью определяет значения интегралов движения и скорость стационарно распространяющегося диполя [2] и удобен для описания эволюции нестационарных вихревых решений, рассматриваемых ниже.

Линеаризация уравнения непрерывности и уравнения Бернулли (2) на постоянном фоне $\rho = 1$ определяет фазовую скорость акустических волн

$$V_k = \sqrt{1 + \frac{k^2}{2}} > 1,$$

распространяющихся в невозмущенной среде. Поэтому сразу можно сделать вывод об отсутствии устойчивых локализованных стационарных решений уравнения (1), движущихся со сверхзвуковой скоростью $V > C_s^0 = 1$, поскольку в противном случае заведомо выполнялись бы условия черенковского резонанса и излучение волн привело бы к потере стационарности.

Между тем уединенный точечный вихрь создает вокруг себя вращение среды с линейной скоростью $V \propto 1/r$ в зависимости от расстояния r между вихрем и точкой

наблюдения. Поэтому стационарно движущихся решений типа вихревого диполя с расстоянием между вихрями, меньшим некоторого критического, не существует. Это рассуждение подтвердилось в [2] при численном определении параметров стационарно движущихся решений: оказалось, что однозарядных вихревых диполей, стационарно движущихся со скоростями $V/C_s^0 > 1/\sqrt{2}$, нет. В следующем разделе этот вывод будет подтвержден аналитически.

Вихри диполя, движущиеся с большей скоростью, интенсивно излучают потенциальные волны и сближаются. В следующем разделе численно рассмотрено такое движение вихревой пары с учетом излучения в НУШ с квадратичным потенциалом отталкивательного типа. Это позволило дать ответ о скейлинге $L \sim \sqrt{z_0 - z}$, $z_0 - z = (t_0 - t)/\sqrt{2}$ коллапса в точке z_0 в момент t_0 противоположно заряженных темных солитонов, находящихся на расстоянии $L(t)$ и распространяющихся в направлении z . Следует отметить, что и в близком к НУШ по структуре комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау также происходит коллапс достаточно сблизившихся вихрей диполя [10]. Разумеется, аналогия здесь непрямая, поскольку вихри в рассматриваемом НУШ существенно отличаются от вихрей в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау (в котором далеко расположенные вихри расходятся, взаимодействуя лишь экспоненциально слабо [10]).

Еще одна интересная задача возникает при рассмотрении распада уединенного мультитаряженного ($N \gg 1$) темного солитона. Собственно темный солитон с зарядом $N > 1$ неустойчив и распадается на вихри единичной амплитуды, на начальном этапе расположенные в вершинах правильного N -угольника, что неоднократно численно проверялось [11]. Затем, по аналогии с гидродинамикой, при числе вихрей $N > 7$ развивается «неустойчивость многоугольника» [12] и вихри хаотично заполняют некоторую область. Если число вихрей велико, то картина течения эквивалентна полю скорости, возникающему от вихря конечных размеров. В [13] показано, что при надлежащих граничных условиях (жесткий кожух ограниченного размера) вихрь Кельвина (вихрь формы круглого цилиндра с равномерным распределением завихренности) трехмерно устойчив по Ляпунову даже при учете излучения. Таким образом, распад мультитаряженного темного солитона в замкнутой области может если не прекратиться, то ощутимо замедлиться. Выяснению деталей этого процесса посвящен последний раздел статьи.

Таким образом, в данной статье сделана попытка аналитического и численного рассмотрения особенностей нелинейной динамики как разноименно, так и одноименно заряженных топологически устойчивых темных $2D$ -солитонов (вихрей) НУШ с потенциалом отталкивательного типа.

2. КОЛЛАПС ВИХРЕВОГО ДИПОЛЯ В НУШ

В отличие от динамики точечных вихрей в несжимаемой жидкости, динамика вихрей в НУШ не определяется только лишь их зарядами и мгновенным взаимным расположением. Движение отдельного вихря определяется потенциальными полями, созданными в месте его расположения. Лишь если известно, что происхождение этих потенциальных волн (их амплитуды, волновые векторы и фазы) связано с эволюцией вихрей, задача определения динамики вихрей становится замкнутой. Аналогичная ситуация встречается и при рассмотрении эволюции излучающих заряженных частиц — их динамика вполне определена лишь при отсутствии свободного электромагнитного поля.

Аналогия между $2D$ -динамикой заряженных частиц с кулоновским потенциалом

взаимодействия и динамикой вихрей является полной лишь в несжимаемой жидкости — гамильтонианы квазистационарной системы зарядов и системы точечных вихрей в лэмбовском представлении совпадают [14]. Учет излучения, по крайней мере в первом приближении по параметру V/C_s , сохраняет эту аналогию. Так, уравнения Максвелла вместе с уравнением калибровки переходят в линеаризованные гидродинамические уравнения (2), если вместо заряда частиц использовать интенсивность вихря, вместо магнитного поля (имеющего в рассматриваемом случае $2D$ -динамики лишь одну компоненту) — отклонение плотности от фоновой величины ($\rho/\rho_0 = B_z$). Вектор электрического поля, повернутый на 90° вокруг магнитного поля, определяет скорость вихря

$$\mathbf{V} = [\mathbf{e}_z \mathbf{E}].$$

Действительно, дивергенция этого уравнения, с одной стороны, приводит к линеаризованному на постоянном фоне плотности ρ_0 уравнению непрерывности, а с другой стороны, — к уравнению для циркуляции электрического поля. Уравнение для циркуляции магнитного поля соответствует линеаризованному на постоянном фоне плотности уравнению Эйлера. А уравнение для дивергенции электрического поля совместно с условием калибровки дает связь завихренности (интенсивности вихря) с функцией тока скорости (соответствующей потенциалу электрического поля) в виде запаздывающих потенциалов. Таким образом, электродинамическое уравнение для электрического поля, создаваемого произвольно движущимися электрическими зарядами [15], полностью соответствует интегральному уравнению типа запаздывающих потенциалов для определения гидродинамического поля скорости, создаваемого излучающими движущимися вихрями. Это уравнение (не приводимое здесь ввиду громоздкости, см. [15]) вполне замкнуто — определяемое с помощью него поле скоростей определяет и скорости всех вихрей. В частном случае равномерного стационарного распространения пары однозарядных ($N = 1$) вихрей, находящихся на расстоянии L друг от друга, получаем из этого уравнения для скорости вихря

$$V = \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3)$$

(напомним, что $C_s^0 = 1$ при нашем выборе потенциала $U = |\Psi|^2 - 1$ в (1)).

Сразу же необходимо отметить, что эта формула имеет приближенный характер (из-за непостоянства скорости звука $C_s^2 \equiv \rho + \Delta\sqrt{\rho}/4\sqrt{\rho}$) и верна при $L \gg 1$. Тем не менее, как будет показано ниже, она качественно верна и при $L \sim 1$.

От обычной формулы для скорости вихревой пары в несжимаемой жидкости формула (3) отличается лишь наличием релятивистского множителя в знаменателе. Качественные последствия же его появления следующие. Во-первых, при L меньшем некоторой критической величины стационарно движущихся вихревых пар нет. Этому критическому расстоянию $L = 2$ соответствует критическая скорость $V/C_s^0 = 1/\sqrt{2}$, совпадающая количественно с численным результатом [2], что является приятным сюрпризом, подтверждающим, что формула (3) дает вполне верные количественные результаты на пределе своей применимости. Во-вторых, при $L > 2$ существуют сразу два решения: первое при $L \rightarrow \infty$ асимптотически переходит в соответствующее решение для несжимаемой жидкости, скорость второго (неустойчивого относительно направления распространения вихрей) стремится к скорости звука.

Доказательство отсутствия стационарно движущихся (вдоль z) решений типа вихревой пары с расстоянием между вихрями меньше некоторого критического можно получить, и непосредственно линеаризуя НУШ (1) вблизи $\Psi = 0$ (около вихревой пары), и раскладывая гладкие линейные возмущения поля в ряд Фурье. В результате получаем соотношение

$$k_z^2 V^2 = (1 - k^2/2)^2,$$

имеющее действительные корни k_z при $V < 1$ и $k_{xm} = m\pi/L$ лишь при $L > \pi/2$.

Формулу (3) при $L \gg 1$ также можно получить при линеаризации НУШ (1). Действительно, вдали от вихрей $\Psi \rightarrow 1$. Линеаризуя НУШ на фоне этого значения и пренебрегая высшими производными [2, 16], получим для потенциала скорости ϕ :

$$(\Delta - V^2 \partial^2 / \partial z^2) \phi = 0.$$

Поэтому после релятивистского преобразования координат $\zeta = z/\sqrt{1 - V^2}$ потенциал $\phi(x, \zeta)$ становится гармоническим, с учетом источников — пары вихрей единичной интенсивности — он равен

$$\phi = \arctg \left(\frac{\zeta}{x + L/2} \right) - \arctg \left(\frac{\zeta}{x - L/2} \right).$$

Градиент этого потенциала, усредненный в месте нахождения одного из вихрей, дает формулу для искомой скорости V , совпадающую с (3).

Стационарно распространяющиеся решения НУШ (1) симметричны по отношению «вперед–назад» [2]. Это значит, что они движутся по специально подобранному неоднородному фоновому полю Ψ , обеспечивающему когерентный возврат к вихревой паре излученных волн. Если поле Ψ впереди вихревого диполя не столь тщательно подобрано (например, при распространении по изначально постоянному фону), то вихри начнут тратить свою энергию на излучение волн (создание специального фона) и перестанут распространяться стационарно. При уменьшении энергии вихри в диполе сближаются. Если расстояние между ними уменьшится до критического (при котором скорость вихревой пары достигнет местной скорости звука), то станет возможным локальный черенковский резонанс и возврат к стационарному движению станет невозможным. Энергия вихревой пары будет тратиться на излучение, а расстояние между вихрями — уменьшаться вплоть до их аннигиляции. Как показали приведенные ниже численные эксперименты, этот коллапс происходит за конечное время, сравнимое со временем распространения излученных вихрями волн на расстояние экранировки. Поэтому для самой возможности коллапса совершенно неважно, какая доля излученных волн переизлучится на бесконечность, а какая вернется обратно, поскольку вихри к этому моменту уже аннигилируют.

Для определения скейлинга этого коллапса противоположно заряженных темных солитонов НУШ были выполнены численные эксперименты, проведенные по конечно-разностной эйлеровой схеме «предиктор–корректор» второго порядка точности по координатам и времени. Размер расчетной области составлял 100×100 точек, что соответствовало более чем 10 точкам на размер экранирования в НУШ (1). Интенсивность вихрей в каждой ячейке определялась по циркуляции скорости $\nabla \phi$ на ее границе. Истинное местоположение вихря затем вычислялось как центр получающейся вихревой

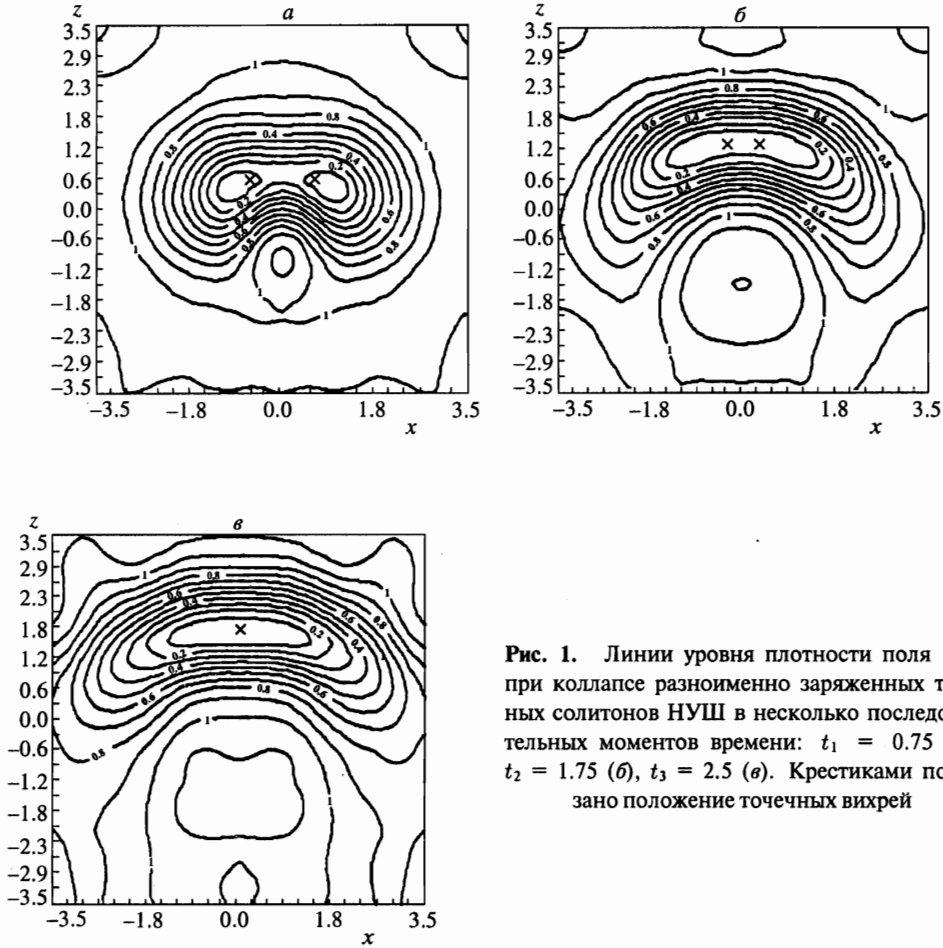


Рис. 1. Линии уровня плотности поля $|\Psi|^2$ при коллапсе разноименно заряженных темных солитонов НУШ в несколько последовательных моментов времени: $t_1 = 0.75$ (а), $t_2 = 1.75$ (б), $t_3 = 2.5$ (в). Крестиками показано положение точечных вихрей

области. Поперечные размеры этой области в расчетах не превышали 2–3 точек, что позволяло достаточно точно определять положение вихрей. На рис. 1 приведены линии уровня плотности поля $|\Psi|^2$ в несколько последовательных моментов времени ($t_1 = 0.75$, $t_2 = 1.75$, $t_3 = 2.5$). Начальное расстояние $L_0 = 1$ между вихрями единичной амплитуды соответствовало половине критического для заведомого выхода на режим коллапса. На рис. 1 видно нарастание асимметрии формы диполя по отношению «вперед-назад», возникшее из-за черенковского излучения потенциальных волн. Оказалось, что коллапс движущихся в направлении z разноименно заряженных вихрей происходит за конечное время, и на конечном этапе расстояние между вихрями L уменьшалось как $L \propto \sqrt{t_0 - t}$ в зависимости от времени до момента коллапса t_0 (на рис. 1 $t_0 \approx t_3 = 2.5$). На рис. 2 приведена расчетная зависимость $L(t_0 - t)$. Четко видны осцилляции, связанные с излучением волн с длиной волны, соизмеримой с расстоянием L между вихрями. Штриховой линией показана кривая наилучшего степенного приближения зависимости $L(t_0 - t)$ с показателем степени $\alpha = 0.5$. Ошибка этой величины показателя, связанная с неточностью определения момента коллапса, $\delta\alpha = 0.1$. На рис. 3 показано положение $z_0 - z$

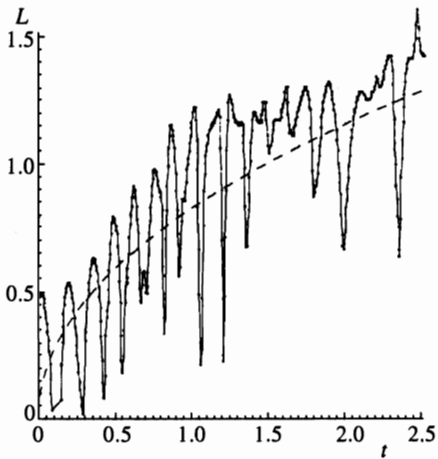


Рис. 2

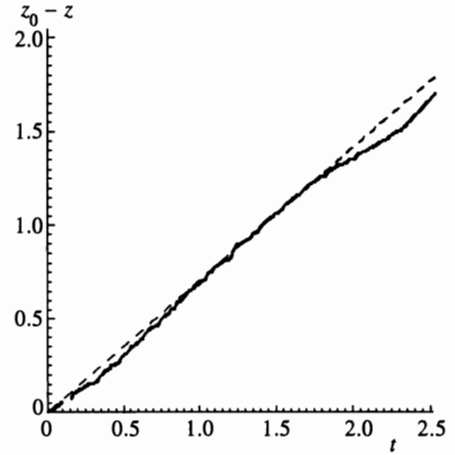


Рис. 3

Рис. 2. Расстояние между разноименно заряженными темными солитонами НУШ в зависимости от времени до коллапса $t_0 = 2.5$. Штриховой линией показана кривая наилучшего степенного приближения с показателем степени 0.5

Рис. 3. Зависимость положения вихревой пары (отсчитываемого от места коллапса $z_0 = 1.7$) в зависимости от времени до коллапса. Штриховой линией показано равномерное движение с критической скоростью $V = 1/\sqrt{2}$

вихревой пары вдоль направления распространения, отсчитанное от места коллапса z_0 (в соответствии с рис. 1 $z_0 \approx 1.7$), в зависимости от времени до коллапса. Штриховой линией на этом рисунке показана линейная зависимость движения с критической скоростью $V/C_s^0 = 1/\sqrt{2}$, максимально возможной по формуле (3). Видно, что вплоть до момента коллапса скорость движения вихревой пары практически совпадает с критической.

3. РАСПАД МНОГОЗАРЯДНОГО ТЕМНОГО СОЛИТОНА НУШ

Граничное условие на поле Ψ в НУШ (1) с потенциалом отталкивающего типа предполагает стремление $|\Psi|^2$ к постоянному фоновому значению. Фаза поля может принимать произвольные значения. Это позволяет рассматривать несбалансированные по суммарному заряду совокупности вихрей — заряженных темных $2D$ -солитонов. Как и при анализе любого нелинейного дифференциального уравнения, важную роль при исследовании НУШ (1) имеют его интегралы (2) — энергия E , число частиц N , импульс

P , момент импульса M :

$$\begin{aligned}
 E &= \int \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{2} (|\Psi|^2 - 1)^2 d^2 r, \\
 N &= \int (|\Psi|^2 - 1) d^2 r, \\
 P &= \frac{i}{2} \int (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) d^2 r, \\
 M &= \frac{i}{2} \int [\mathbf{r} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)]_z d^2 r,
 \end{aligned} \tag{4}$$

названные так по аналогии с гидродинамическими интегралами. Ненулевое фоновое граничное значение поля Ψ требует задания корректного граничного условия для фазы поля, гарантирующего сохранение интегралов (4). Гидродинамическое условие непротекания, или жесткого кожуха,

$$\mathbf{V}|_n \equiv \nabla \phi|_n \equiv \frac{i}{2|\Psi|^2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)|_n = 0$$

является достаточным для сохранения интегралов (4).

Темные солитоны с зарядами одного знака вращаются вокруг неподвижной точки аналогично гидродинамическим точечным вихрям. Энергия системы вихрей убывает при увеличении расстояния между вихрями, поэтому темные солитоны одного заряда расходятся друг от друга при учете излучения ими потенциальных волн. Даже, собственно, темный солитон с зарядом $N > 1$ неустойчив и распадается на вихри единичной амплитуды, на начальном этапе расположенные в вершинах правильного N -угольника, что неоднократно численно проверялось [11]. Размеры этого N -угольника за счет излучения энергии со временем растут (в акустике — по степенному закону $\propto t^{1/2(N+1)}$ [12]). Одновременно, по аналогии с гидродинамикой, при числе вихрей $N > 7$ развивается «неустойчивость многоугольника» [12] и вихри хаотично заполняют некоторую область. Вдали от этой области поле скорости, создаваемое вихрями, имеет асимптотически лишь вращательную компоненту. Поэтому картина течения в целом эквивалентна полю скорости, возникающему от вихря конечных размеров.

В неограниченной области процесс распыливания вихрей неограничен. В ограниченной жесткими стенками области волны, излученные вихрями, отражаются от границы и возвращаются в вихревую зону. При последующем переизлучении импульс волн передается вихрям и может привести к стабилизации их распыливания. Косвенные свидетельства подобной стабилизации содержатся, например, в [14]. В [13] методом замороженных вариаций Арнольда [17] показано, что при надлежащих граничных условиях (жесткий кожух конечного размера) вихрь, имеющий форму круглого цилиндра с равномерным распределением завихренности, трехмерно устойчив по Ляпунову даже при учете излучения. Функционал Ляпунова $\Phi = E - \Omega M$ строится из интегралов энергии E и момента импульса M . Действительно, при увеличении расстояния между вихрями одного знака энергия вихрей падает, но зато интеграл момента импульса растет. Компенсация уменьшения энергии с ростом момента импульса (равенство нулю вариации функционала Φ) достигается при лагранжевом множителе Ω , равном средней угловой скорости вращения области, занятой вихрями. Таким образом, знакоопределенность второй вариации Φ (и, следовательно, устойчивость размеров области, занятой

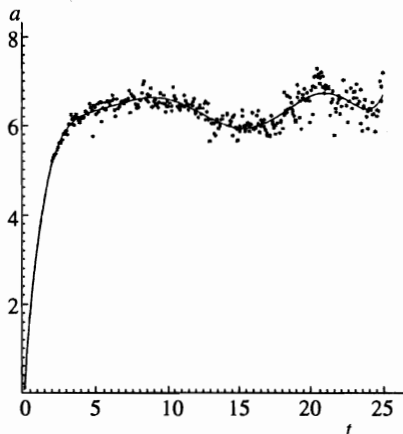


Рис. 4. Зависимость радиуса вихревой области от времени

равномерно распределенными заряженными темными солитонами НУШ) гарантирована, по аналогии с [13], при определенном выборе размера граничного жесткого кожуха. А именно, радиус R круглого кожуха должен быть таким, чтобы всюду вне круговой области радиуса a , равномерно заполненной N вихрями, выполнялось неравенство

$$C_s^2 > \left(\Omega r - \Omega \frac{a^2}{r} \right)^2, \quad a < r < R, \quad \Omega = \frac{N}{a^2}. \quad (5)$$

Физический смысл этого условия в «дозвуковости» течения во вращающейся с частотой Ω системе координат. На границе вихревой области ($r = a$) правая часть неравенства (5) равна нулю. Плотность поля $\rho \equiv |\Psi|^2$ в вихревой области близка к нулю. Но местная скорость звука $C_s^2 \equiv \rho + \Delta\sqrt{\rho}/4\sqrt{\rho}$ на этой границе остается конечной величиной из-за больших неоднородностей плотности поля. Поэтому вблизи вихревой области условие (5) выполнено. Вдали от вихревой области $C_s^0 = 1$. Поэтому (5) в целом выполнится при

$$R \leq \frac{a^2}{2N} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{2N} \right)^2}.$$

При малой плотности упаковки ($N/RC_s^0 \ll 1$) радиус a устойчивой области, занятой вихрями, может быть много меньше радиуса границы R

$$a_{min} \simeq \frac{R}{\sqrt{\frac{R}{N} + 1}} \sim \sqrt{NR} \ll R. \quad (6)$$

Иными словами, глядя на (6), можно сказать, что если размер кожуха R , ограничивающий систему темных солитонов НУШ (1), много больше их суммарного заряда N , то все темные солитоны могут быть устойчиво локализованы в области с существенно меньшими, чем кожух, размерами $a_{min} \sim \sqrt{NR}$.

Для иллюстрации сказанного на рис. 4 приведен численный расчет распада единственного многозарядного темного солитона НУШ в ограниченной жестким кожухом

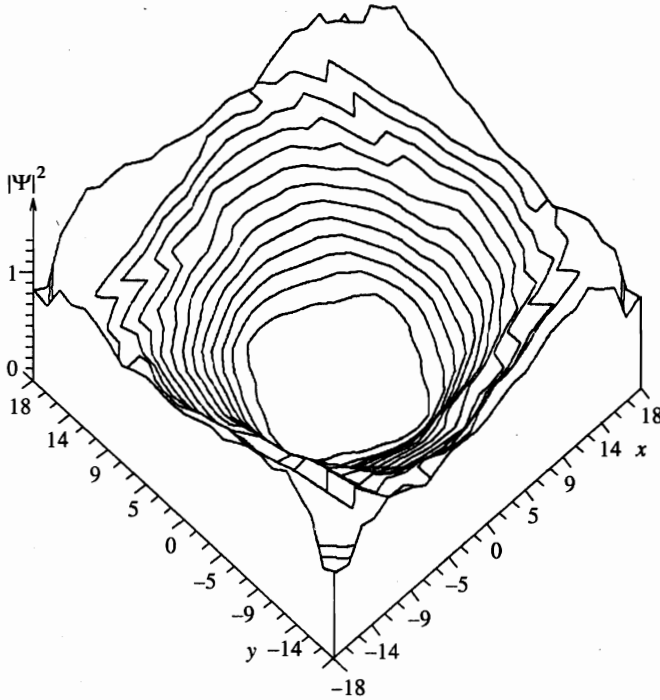


Рис. 5. Линии уровня поля $|\Psi|^2$ в момент времени $t = 10$

области. По оси абсцисс рис. 4 отложено время, по оси ординат — среднеквадратичный радиус a области локализации единичных вихрей, возникших при распаде. При расчете приняты следующие значения: радиус кожуха $R = 25$, заряд темного солитона $N = 11$. На рис. 4 видно, что рост зоны, занятой вихрями, прекращается при достижении размера $a \simeq 7$, что даже меньше, чем размер, оцененный по формуле (6). На рис. 5 приведены линии уровня плотности поля $|\Psi|^2$ в момент времени $t = 10$, когда рост вихревой области прекращается. На этом рисунке четко видна практически круглая вихревая область, занятая нестационарно движущимися вихрями и сохраняющаяся вплоть до окончания счета.

4. ВЫВОДЫ

В этой статье рассмотрено взаимодействие темных как разноименно, так и одноименно заряженных $2D$ -солитонов НУШ. Весьма полезным оказалось использование гидродинамической аналогии (Madelung) между этими темными солитонами и точечными вихрями с дискретной амплитудой в сжимаемой среде. Однозарядный уединенный темный солитон не может быть разрушен никакими потенциальными волнами, что делает его весьма привлекательным объектом исследования.

Использование электромагнитной аналогии между темными солитонами и излучающими электромагнитными волнами электрическими зарядами позволило определить по-

ступательную скорость дипольной пары (3) темных солитонов. Показано, что существует максимальная критическая скорость способного стационарно распространяться диполя, что качественно и количественно соответствует результатам численной работы [2]. Приведено доказательство отсутствия возможности стационарного распространения темных заряженных солитонов с характерными размерами, меньшими длины экранировки НУШ. Это доказательство справедливо и для 3D-НУШ (например, для решений типа вихревых колец). Численно показано, что происходит с вихревой парой темных солитонов, сблизившихся на расстояние меньше критического: они начинают излучать волны и за конечное время коллапсируют. Во время этого коллапса поступательная скорость вихревой пары остается конечной и не превышает критическую скорость $V/C_s^0 = 1/\sqrt{2}$, максимально возможную по формуле (3). Усредненное по осцилляциям расстояние между вихрями $L \propto (t_0 - t)^\alpha$ с показателем $\alpha = 0.5 \pm 0.1$ на конечном этапе коллапса в момент t_0 уменьшается со все возрастающей скоростью.

Численно и аналитически рассмотрена также задача распада мультитаряженного, $N \gg 1$, темного солитона НУШ в ограниченной твердыми стенками области (граничные условия «непротекания»). Показано, что распад этого вихря на темные солитоны единичного заряда не приводит к равномерному пространственному распределению вихрей. А именно, вихри равномерно заполняют лишь некоторую область, размеры которой в некоторых случаях $\sim \sqrt{NR}$ (см. (6)), что существенно меньше размеров кожуха R .

Автор благодарен К. В. Чукбару и В. В. Янькову за полезные советы и обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17249а) и Российской государственной программы «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

Литература

1. К. Лонгрен, Э. Скотт, *Солитоны в действии*, Мир, Москва (1981).
2. C. F. Jones and P. H. Roberts, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 2599 (1982).
3. C. Josserand and Y. Pomeau, *Europhys. Lett.* **30**, 43 (1995).
4. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ* **64**, 1627 (1973).
6. I. V. Barashenkov and E. V. Panova, *Physica D* **69**, 114 (1993).
7. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, А. Н. Пушкарев, В. Ф. Швеиц, В. В. Яньков, *ЖЭТФ* **69**, 1144 (1989).
8. И. А. Ивонин, *ЖЭТФ* **103**, 107 (1993).
9. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *ЖЭТФ* **67**, 1583 (1988).
10. H. Sakaguchi, *Prog. Theor. Phys.* **82**, 7 (1989).
11. J. Neu, *Physica D* **43**, 385, 407 (1990).
12. И. М. Гряник, *Изв. АН СССР, ФАО* **19**, 203 (1983).
13. И. А. Ивонин, *Физика плазмы* **18**, 581 (1992).
14. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва (1949).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Теория поля*, Наука, Москва (1988).
16. Е. А. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **51**, 4479 (1995).
17. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1974).