ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1841–1846

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В КОМПЕНСИРОВАННЫХ МЕТАЛЛАХ

В. Г. Песчанский[a,b], *Д. И. Степаненко*[b]

[a] *Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина Национальной академии наук Украины 310164, Харьков, Украина*

[b] *Харьковский государственный университет 310077, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 29 мая 1997 г.

Показано, что в проводниках, помещенных в квантующее магнитное поле H_0, могут распространяться нелинейные электромагнитные волны с малой амплитудой. Получено решение уравнений Максвелла для случая поперечного к H_0 направления распространения волны в компенсированных металлах.

В проводниках, помещенных в сильное однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, могут распространяться слабозатухающие электромагнитные волны с частотой, много меньшей циклотронной частоты электронов проводимости [1, 2]. Нелинейные эффекты в металлах из-за высокой плотности носителей заряда невелики и оказывают слабое влияние на волновые процессы. Спектр этих волн нетрудно определить с помощью системы уравнений Максвелла, линеаризованных по слабым электрическому и магнитному полям волны. Однако в квантующем магнитном поле нелинейность может оказаться существенной даже при малой амплитуде волны. Если расстояние между уровнями Ландау значительно превышает их ширину и температурное размытие β^{-1} равновесной фермиевской функции распределения носителей заряда, то амплитуда квантовой осциллирующей части магнитной восприимчивости χ может достигать значений порядка единицы [3]. При этом необходимо учитывать, что квантование уровней энергии носителей заряда обусловлено не точным микроскопическим полем, а его средним макроскопическим значением и, следовательно, намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ и магнитное поле $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{B})$ являются сложными функциями магнитной индукции $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$, где $\mathbf{B}_0$ — ее однородная часть, а $\tilde{\mathbf{B}}$ — поле волны. В области значений B_0, в которой выполнено условие $|1 - 4\pi\chi(B_0)| \ll 1$, член, линейный по амплитуде магнитного поля волны, $[1 - 4\pi\chi(B_0)]\partial\tilde{\mathbf{B}}(x,t)/\partial x$, входящий в уравнение Максвелла, может оказаться того же порядка, что и нелинейные слагаемые, и волновой процесс будет существенно нелинейным.

В компенсированных проводниках с равными концентрациями электронов и дырок ($n_e = n_h = n$) существуют магнитогидродинамические волны двух типов, одна из которых является аналогом альфвеновской, а другая — быстрой магнитозвуковой волны в газовой плазме. В настоящей работе рассмотрено распространение волн вдоль оси x перпендикулярно вектору $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, в предположении, что ось z совпадает с осью симметрии кристалла выше второго порядка. В этом случае альфвеновская волна не распространяется, а электромагнитное поле быстрой магнитозвуковой волны имеет вид

$\mathbf{E} = (0, E(x,t), 0)$, $\tilde{\mathbf{B}}_0 = (0, 0, \tilde{B}(x,t))$ и определяется из уравнений

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} = -c\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} = -\frac{4\pi J_y}{c}, \tag{1}$$

где c — скорость света в вакууме, а $\mathbf{J} = \mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ — плотность полного тока, состоящего из тока проводимости $\mathbf{j}$, возникающего под действием электрического поля $\mathbf{E}$, и тока $\mathbf{j}' = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, индуцированного магнитным полем.

В линейном приближении по электромагнитному полю волны плотность тока имеет вид [4]

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' Q_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') E_k(\mathbf{r}', t'), \tag{2}$$

$$j_1'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' Q_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) \tilde{A}_k(\mathbf{r}', t) - \\ - \frac{e^2}{2c} \tilde{A}_k(\mathbf{r}, t) \operatorname{Sp} \left\{ \hat{\rho}_0 \sum_n \left[\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{p}_{nk}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{p}_{nk}} \right] \right\}, \tag{3}$$

где $\hat{\rho}_0$ — равновесный статистический оператор системы электронов проводимости с законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ и, соответственно, со скоростью $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_n = -i\hbar\partial/\partial\mathbf{r}_n - \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_n)e/c$ — кинематический импульс, а $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ — векторные потенциалы поля $\mathbf{B}_0$ и магнитного поля волны, суммирование по n проводится по всем частицам с зарядом e.

Ядро интегрального оператора в формулах (2) и (3) в однородной среде зависит лишь от разности $r - r'$:

$$Q_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int\limits_{0}^{\beta} d\zeta \operatorname{Sp} \left[\hat{\rho}_0 \hat{I}_k(\mathbf{r}', t' - i\hbar\zeta) \hat{I}_i(\mathbf{r}, t) \right], \tag{4}$$

где $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}, t)$ — оператор плотности тока невозмущенной системы носителей заряда в представлении взаимодействия.

Если длина волны λ много больше радиуса r_0 орбиты носителей заряда в магнитном поле, а ее частота много меньше циклотронной частоты ω_B, то интегральное выражение для плотности тока $\mathbf{J}$ можно привести к локальному виду, т. е. представить в виде разложения по степеням $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{E}$ и их производных по x и t. В выражении для тока проводимости можно пренебречь градиентными слагаемыми, пропорциональными степеням малого параметра r_0/λ, и квантовой осциллирующей поправкой, пропорциональной $\sqrt{\hbar\omega_B/\varepsilon_F}$, где ε_F — энергия Ферми. В результате в выражении для плотности тока достаточно ограничиться следующими двумя слагаемыми:

$$j_y = \frac{\sigma_0}{(\Omega\tau)^2} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) E(x, t). \tag{5}$$

Здесь σ_0 — статическая электропроводность в отсутствие внешнего магнитного поля, τ — время свободного пробега, величина Ω с точностью до безразмерного множителя порядка единицы равна $\omega_B = eB_0/mc$, m — характерная циклотронная масса электронов проводимости.

При вычислении плотности индуцированного тока $\mathbf{j}'$, напротив, учет квантования уровней энергии носителей заряда весьма существен, поскольку осциллирующая с обратной величиной магнитного поля часть магнитной восприимчивости значительно превышает ее плавно меняющуюся часть.

Для нахождения $\mathbf{j}'$ приведем выражение (3) к виду

$$j_1'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' Q_{ik}(\mathbf{r}',0)\left[\tilde{A}_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) - \tilde{A}_k(\mathbf{r},t)\right]. \tag{6}$$

Разлагая функцию $\tilde{A}_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$ в ряд по степеням $\mathbf{r}'$ и воспользовавшись свойством симметрии $Q_{ik}(\mathbf{r},0) = Q_{ki}(-\mathbf{r},0)$, получим линейную часть тока намагниченности:

$$j_y' = -c\chi(B_0)\frac{\partial\tilde{B}}{\partial x} - c\gamma(B_0)r_0^2\frac{\partial^3\tilde{B}}{\partial x^3}, \tag{7}$$

где

$$\chi(B_0) = \chi_{zz} = -\frac{1}{2c^2}\int d^3r Q_{yy}(\mathbf{r},0)x^2, \tag{8}$$

$$\gamma(B_0) = -\frac{1}{24c^2r_0^2}\int d^3r Q_{yy}(\mathbf{r},0)x^4. \tag{9}$$

Легко заметить, что χ и γ — величины одного порядка.

Нелинейная добавка к намагниченности будет пропорциональна лишь третьей степени магнитного поля волны, поскольку значение магнитного поля B_0, при котором $\chi(B_0) = 1/4\pi$ является точкой перегиба на кривой $H = H(B)$, т.е. $\partial^2 M(B)/\partial B^2 = 0$. Слагаемыми, содержащими одновременно нелинейность и производные по x в асимптотическом разложении намагниченности, можно пренебречь, поскольку они пропорциональны степеням произведения двух малых параметров r_0/λ и $\tilde{B}/B_0$. В результате для плотности тока, индуцированного магнитным полем, получим следующее выражение:

$$j_y' = -c\chi(B_0)\frac{\partial\tilde{B}}{\partial x} + \frac{c\xi}{B_0^2}\frac{\partial\tilde{B}^3}{\partial x} - c\gamma(B_0)r_0^2\frac{\partial^3\tilde{B}}{\partial x^3}, \tag{10}$$

где $\xi = \alpha(\varepsilon_F/\hbar\Omega)^2\chi(B_0)$, α — безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от конкретного вида закона дисперсии носителей заряда.

Подставляя соотношения (5) и (10) в уравнения Максвелла, получим для $\tilde{B}$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{[1-4\pi\chi(B_0)]\,\tilde{B} + \frac{4\pi\xi}{B_0^2}\,\tilde{B}^3 - 4\pi\gamma(B_0)r_0^2\frac{\partial^2\tilde{B}}{\partial x^2}\right\} = \frac{4\pi\sigma_0}{(c\Omega\tau)^2}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\tilde{B}}{\partial t}. \tag{11}$$

В безразмерных переменных это уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\pm u + 2u^3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{1}{\omega_0\tau}\frac{\partial u}{\partial t_1}, \tag{12}$$

где

$$x_1 = x/\delta, \quad t_1 = \omega_0 t, \quad \delta = \sqrt{4\pi\gamma}\, r_0/\kappa, \quad \kappa^2 = |1 - 4\pi\chi(B_0)|,$$

$$\omega_0 = \Omega c\kappa/\omega_p\delta, \quad \omega_p^2 = 4\pi\sigma_0/\tau, \quad u = \tilde{B}/b, \quad b = B_0\sqrt{\kappa^2/2\pi\xi}.$$

Знак «+» в уравнении (12) соответствует случаю, когда $\chi(B_0) < 1/4\pi$, а знак «−» относится к случаю, когда $\chi(B_0) > 1/4\pi$. Параметры δ, b, ω_0 и ω_p имеют очевидный физический смысл: $\delta \simeq r_0/\kappa \gg r_0$ — расстояние, на котором существенно изменяется электромагнитное поле; b и ω_0 по порядку величины равны амплитуде и частоте волны, а ω_p — плазменная частота.

Для существования слабозатухающих нелинейных волн необходимо выполнение двух условий: $\varepsilon_F/\hbar\Omega \geq 10^3$ и $\omega_0\tau \simeq \Omega\tau(\Omega c/\omega_p v_F)\kappa^2 \gg 1$, где v_F — скорость носителей заряда с энергией Ферми. Первое из них обеспечивает достижение магнитной восприимчивости значений порядка единицы при достаточно низких температурах, а второе — малость диссипативного члена в уравнении (12). В металлах с числом носителей заряда порядка одного на атом эти условия выполнимы в достаточно чистых образцах, в которых время свободного пробега носителей заряда больше или порядка 10^{-9} с, в магнитных полях порядка 10 Тл.

В нулевом приближении по малому параметру $\eta = (\omega_0\tau)^{-1}$ уравнение (12) имеет волновое решение, зависящее от переменной $\theta(x_1, t_1) = x_1 - Vt_1$:

$$u(\theta(x_1, t_1)) = a\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\frac{a}{\sqrt{k}}(x_1 - Vt_1), k\right]. \tag{13}$$

Здесь $a = \sqrt{\partial u(\theta)/\partial\theta}$ при $\theta = 0$, k — модуль эллиптической функции sn, скорость волны V связана с k соотношением

$$V^2 = \frac{1}{k}\left[a^2(1 + k^2) + sk\right], \tag{14}$$

где $s = \mathrm{sign}\,[1 - 4\pi\chi(B_0)]$.

Влияние слабой диссипации нетрудно учесть, представив решение уравнения (12) в виде ряда по степеням η:

$$u(x_1, t_1) = u^{(0)}(x_1, t_1) + \eta u^{(1)}(x_1, t_1) + \ldots, \tag{15}$$

где

$$u^{(0)}(x_1, t_1) = a(T)\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\frac{a(T)}{\sqrt{k}}\theta(x_1, t_1), k\right], \tag{16}$$

а $T = \eta t_1$ — «медленное время»,

$$\frac{\partial\theta(x_1, t_1)}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial\theta(x_1, t_1)}{\partial t_1} = -V(T) = -\sqrt{\frac{a^2(T)(1 + k^2) + sk}{k}}.$$

Амплитуда волны $a(T)$ и скорость ее распространения $V(T)$ являются теперь медленно меняющимися функциями времени. Подставляя выражение (15) для u в уравнение (12) и собирая члены одного порядка по параметру η, убедимся в том, что функция (16) удовлетворяет уравнению нулевого приближения, а уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(-V^2+s)u^{(1)}+6u^{(0)2}u^{(1)}-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\theta^2}\right]=$$
$$=-u^{(0)}\left(V+\frac{\partial V}{\partial T}\right)-2\left(u^{(0)}+\theta\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta}\right)V\frac{\partial\ln a}{\partial T}\equiv F(\theta). \qquad (17)$$

Зависимости амплитуды и скорости распространения волны от времени найдем из условия ортогональности правой части уравнения (17) решению u^* сопряженного уравнения

$$\left[(V^2-s)\frac{\partial u^*}{\partial\theta}-6u^{(0)2}\frac{\partial u^*}{\partial\theta}+\frac{\partial^3 u^*}{\partial\theta^3}\right]=0. \qquad (18)$$

В качестве частного решения уравнения (18) возьмем $u^{(0)}$. Тогда условие ортогональности

$$\int_0^K d\theta\, u^{(0)}(\theta)F(\theta)=0 \qquad (19)$$

приводит к соотношению

$$a(T)V(T)=a(0)V(0)e^{-T}. \qquad (20)$$

Здесь K — период функции $u^{(0)}(\theta)$.

В результате несложных вычислений получим

$$a^2(T)=\frac{[f(k,T)-s]\,k}{2(1+k^2)},\quad V^2(T)=\frac{f(k,T)+s}{2}, \qquad (21)$$

где

$$f(k,T)=\sqrt{1+4k^{-1}(1+k^2)a^2(0)V^2(0)e^{-2T}}.$$

Из уравнений Максвелла (1) и соотношения (20) найдем электрическое поле волны

$$E(x_1,t_1)=b\frac{\Omega\kappa}{\omega_p}\sqrt{k}\,a(0)V(0)\exp(-\eta t_1)\,\mathrm{sn}\left[\frac{a(T)}{\sqrt{k}}\,\theta(x_1,t_1),k\right]. \qquad (22)$$

Асимптотическое поведение нестационарного магнитного поля при $t\to\infty$ будет различным в зависимости от знака s. При $s=-1$ влияние диссипации приводит к установлению стационарной доменной структуры [3]. Переходя в соотношениях (21) к пределу $t\to\infty$, получим

$$V(\infty)=0,\quad a^2(\infty)=k/(1+k^2).$$

Отсюда следует

$$u(x_1,\infty)=a(\infty)\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\frac{a(\infty)}{\sqrt{k}}(x_1-\varphi),k\right],\quad \varphi=\int_0^\infty V(t_1)dt_1,$$

и распределение магнитной индукции представляет собой систему периодически чередующихся слоев. Нетрудно понять, как будет изменяться со временем функция $u(x_1,t_1)$

в случае не малой диссипации. При $\eta \geq 1$ система апериодически переходит в неоднородное стационарное состояние. Если $s = +1$, то в пределе $t \to \infty$ получим

$$a(\infty) = 0, \quad u(x_1, \infty) = 0,$$

и с течением времени распределение магнитной индукции в образце становится однородным.

Мы признательны правительству Украины и Международному научному фонду за частичное финансирование данной работы (грант № K5X100).

Литература

1. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ **38**, 161 (1960).
2. E. A. Kaner and V. G. Skobov, Adv. Phys. **17**, 605 (1968).
3. J. Condon, Phys. Rev. **145**, 526 (1965).
4. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ **37**, 786 (1959).