

ВРАЩЕНИЕ КАПЛИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. И. Морозов

*Институт механики сплошных сред
Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 12 мая 1997 г.

Использование магнитной жидкости в качестве материала капли дает уникальную возможность моделирования движения объема одной жидкости в другой. Мы исследовали низкочастотное вращательное движение магнитной капли, взвешенной в вязкой жидкости. В данной области частот форма капли не зависит от частоты поля и определяется лишь его амплитудой. В приближении Стокса задача, являющаяся обобщением классической задачи Джеффри на случай жидкой эллипсоидальной частицы, имеет аналитическое решение, включающее: расчет полей скорости внутри и снаружи жидкой частицы, определение момента вязких сил, действующих на каплю, определение ее коэффициента вращательной подвижности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической работе Джеффри [1], вышедшей в конце первой четверти века, аналитически решена задача о медленном (стоксовом) движении в вязкой жидкости твердой эллипсоидальной частицы. В последующем результаты [1] многократно использовались при описании различных дисперсных систем и жидких кристаллов (см., например, [2, 3]). Значительно позднее стали исследоваться жидкости, содержащие деформируемые частицы, такие как растворы полимеров, суспензии жидких капель, кровь. Так, в [4] изучена реология полимерного раствора, моделируемого суспензией вязкопластических сфер, помещенных в вязкой ньютоновской жидкости. В [5] определялось поведение в сдвиговом потоке эритроцита, рассматриваемого как ограниченная легкодеформируемой оболочкой жидкая частица. Основной задачей данных исследований являлось выяснение механизма взаимодействия жидкой частицы с окружающей жидкостью и его влияние на структуру и свойства рассматриваемой системы. Отметим, что в цитированных работах каплям отводилась пассивная роль: форма частиц и характер их движения, включая внутреннее, определялись в конечном счете внешним потоком вязкой жидкости. Данное обстоятельство затрудняет проведение экспериментальных исследований и их интерпретацию.

Интересная возможность, устраняющая указанные трудности, открывается при использовании в качестве материала капли магнитной жидкости — коллоидной дисперсии магнетиков в обычной жидкости [6]. Основным достоинством данного подхода является возможность управления жидкой частицей внешними магнитными полями, включая приведение ее в движение и создание различных стабильных конфигураций капли. Такой подход был реализован недавно в [7]. Капля магнитной жидкости взвешивалась в растворе электролита. В отсутствие магнитного поля капля была, конечно, сферой диаметром ~ 1 мм. В постоянном магнитном поле капля вытягивается. Форма капли в

этом случае определяется в результате конкуренции магнитных и поверхностных сил и с высокой точностью может быть аппроксимирована эллипсоидом вращения [8]. Если теперь заставить поле вращаться, то вместе с ним будет вращаться и капля. В [7] исследовалось низкочастотное вращение поля (частота $f \leq 1$ Гц). При таких частотах капли участвуют в простом вынужденном движении — длинные оси капель вращаются с угловой скоростью $\Omega = 2\pi f$. При этом каких-либо изменений формы капли по сравнению со случаем стационарного поля не наблюдается.

Таким образом, варьирование амплитуды магнитного поля позволяет исследовать вращательное движение жидкой эллипсоидальной частицы. Внешне это движение выглядит как твердотельное вращение (магнитная жидкость непрозрачна), однако между вращением твердой и жидкой частиц имеется существенное различие, заключающееся во внутрикапельном движении в последнем случае. Изучение низкочастотного вращательного движения капли и является предметом настоящей работы. Если размеры капель достаточно малы, то в расчетах можно воспользоваться приближением малых чисел Рейнольдса. Сформулированная таким образом проблема является обобщением задачи Джеффри [1] на случай жидкой эллипсоидальной частицы.

Структура следующего ниже изложения такова. В разд. 2 определен интервал параметров жидкостей и значений внешнего магнитного поля, при которых форма капли остается эллипсоидальной, а также выписаны и решены уравнения движения. В разд. 3 выполнен расчет внутрикапельного движения. В разд. 4 и 5 приведено уравнение баланса моментов сил и определена вращательная подвижность капли. В Приложении показана эквивалентность уравнения баланса энергии в системе и интегрального условия для вязких касательных напряжений на поверхности капли.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Прежде чем выписать систему уравнений движения для капли, выполним оценку некоторых параметров задачи с целью пояснения причины стабильности формы капли при низкочастотном вращении магнитного поля. В поставленной задаче имеются два физических механизма, определяющих форму жидкой магнитной частицы, — магнитное поле и течение, возникающие внутри и снаружи капли при ее вращении. Эффективность каждого механизма определяется по значению соответствующего безразмерного параметра — магнитного числа Бонда $Bo = G^2 R / \sigma$ и частоты $\Omega \tau$, где G — амплитуда внешнего магнитного поля, R — радиус капли в отсутствие поля, σ — поверхностное натяжение на границе раздела, $\tau = \eta_1 R / \sigma$, η_1 — вязкость жидкости внутри капли. Используя типичные (см. данные опыта [7]) значения входящих в Bo и $\Omega \tau$ величин ($\eta_1 \sim 10$ сПз, $\Omega \leq 10$ с⁻¹), находим, что вклады обоих механизмов становятся одного порядка только в чрезвычайно слабых ($G \sim 1$ Э) полях, лишь немного превышающих магнитное поле Земли. Из-за квадратичной зависимости числа Бонда от G уже в поле ~ 10 Э первый механизм становится доминирующим. Ниже мы полагаем условие $Bo \gg \Omega \tau$ выполненным.

Величина $\Omega \tau$, выражающая отношение характерного времени релаксации формы капли τ к периоду поля, и сама оказывается малой, т. е. $\Omega \tau \ll 1$. Действительно, подставляя в определение τ типичное для жидкостей значение $\sigma \sim 10$ дин/см, для капель с $R \leq 1$ мм находим $\Omega \tau \leq 10^{-2}$. Последнее неравенство равнозначно малому отставанию длинной оси капли от направления внешнего магнитного поля (см. разд. 4), так

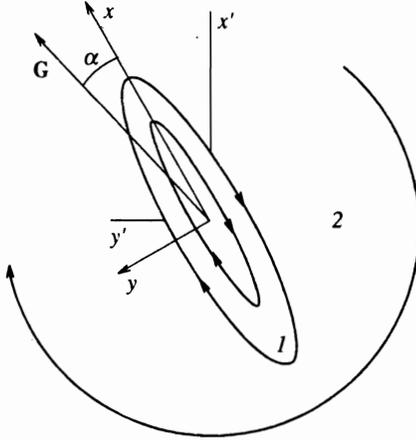


Рис. 1. Эллипсоидальная магнитная капля (1) в вязкой жидкости (2) во вращающемся магнитном поле \mathbf{G} ; xyz и $x'y'z$ — оси вращающейся и лабораторной систем координат

что проекция поля на длинную ось капли практически совпадает со своим стационарным (при $f = 0$) значением. Таким образом, если частотный диапазон и параметры капли удовлетворяют условиям $\Omega\tau \ll 1$ и $\Omega\tau \ll \text{Bo}$, то форма капли не зависит от Ω и определяется лишь одним параметром — числом Бонда. В указанной области параметров каплю магнитной жидкости можно считать эллипсоидом вращения с полуосями $a > b = c$, что согласуется с наблюдениями [7].

На рис. 1 изображена эллипсоидальная магнитная капля и связанная с ней система координат xyz . Длинная ось капли, x , в постоянном поле совпадает с его направлением, во вращающемся однородном магнитном поле \mathbf{G} отстает от него на угол α . Вектор \mathbf{G} вращается относительно лабораторной системы координат $x'y'z$ с угловой скоростью Ω , направленной вдоль оси z , т.е. против часовой стрелки. Ось z — общая для обеих систем координат. Под действием момента магнитных сил ($\alpha \neq 0$) происходит увлечение капли; оси системы координат, связанной с каплей, вращаются относительно лабораторной системы координат с той же угловой скоростью Ω . Капля магнитной жидкости (область 1) находится в неограниченном объеме вязкой жидкости (область 2), покоящейся на бесконечности. Во вращающейся системе координат xyz форма жидкой частицы фиксирована, т.е. отсутствуют нормальные составляющие скорости на поверхности капли. Между тем тангенциальные составляющие не равны нулю: благодаря тому, что рассматриваемый во вращающейся системе координат эллипсоид находится во внешнем потоке с завихренностью $-\Omega$ (показано стрелкой на рис. 1 в области 2), внутри него возникает течение с отрицательной завихренностью (по часовой стрелке на рис. 1).

Уравнения движения во вращающейся системе координат в приближении Стокса имеют вид

$$\eta_{1,2}\Delta\mathbf{v}^{(1,2)} = \nabla p_{1,2}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}^{(1,2)}$, $p_{1,2}$ и $\eta_{1,2}$ — поля скоростей, давлений и вязкости двух рассматриваемых областей — внутри и снаружи капли. Отсутствие объемных магнитных сил в правой части (1) связано с однородностью магнитного поля внутри эллипсоида. Граничные условия на поверхности капли —

$$v_\nu^{(1)} = v_\nu^{(2)} = 0, \quad v_\tau^{(1)} = v_\tau^{(2)} \tag{2}$$

— выражают отсутствие нормальных и равенство тангенциальных компонент скорости на границе жидкостей. На бесконечности поле скоростей должно определяться лишь внешним потоком

$$\mathbf{v}^{(2)}(r \rightarrow \infty) = -[\Omega \mathbf{r}]. \quad (3)$$

Поскольку форма капли в нашем рассмотрении задана, то постановка точных условий для компонент напряжений на границе раздела жидкостей становится избыточной. Вместо условия непрерывности нормальных составляющих напряжений мы используем интегральное соотношение — условие экстремума суммы магнитостатической и поверхностной энергий эллипсоида, взятое в нулевом порядке по $\Omega\tau$. Последняя ситуация отвечает случаю капли магнитной жидкости в постоянном поле и подробно рассмотрена в [8], где для эксцентриситета эллипсоида $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ как функции магнитного числа Бонда получено следующее выражение:

$$Bo = 4\pi \left(\frac{1}{\mu - 1} + n_1 \right)^2 \frac{(1 - e^2)^{1/2}(3 - 2e^2) - (3 - 4e^2)(\arcsin e)/e}{(1 - e^2)^{1/6}[(3 - e^2)n_1 - 1 + e^2]}. \quad (4)$$

Здесь μ — магнитная проницаемость капли, n_1 — размагничивающий фактор вдоль оси x .

Граничное условие для касательных напряжений на поверхности раздела также заменяется на интегральное соотношение, вытекающее из баланса энергии в системе (см. разд. 3 и Приложение).

Уравнения (1) с дополнительными условиями (2) и (3) для жидкого эллипсоида удастся свести к задаче Джеффри для твердой частицы. Действительно, будем искать решение во внутренней и внешней областях в виде

$$v_x^{(1)} = -\zeta ya/b, \quad v_y^{(1)} = \zeta xb/a, \quad v_z^{(1)} = 0, \quad p_1 = \text{const}, \quad (5)$$

$$v_x^{(2)} = u_J - \zeta ya/b, \quad v_y^{(2)} = v_J + \zeta xb/a, \quad v_z^{(2)} = \omega_J, \quad p_2 = p_J, \quad (6)$$

где ζ — подлежащий определению параметр, характеризующий завихренность внутри капли. Тогда для полей скорости $\mathbf{v}_J = (u_J, v_J, \omega_J)$ и давления p_J в области 2 имеем уравнение аналогичное (1) и тривиальные условия $\mathbf{v}_J = 0$ на поверхности эллипсоида. Следовательно, \mathbf{v}_J и p_J есть поля скорости и давления из задачи Джеффри [1] для неподвижного твердого эллипсоида, находящегося во внешнем потоке с заданным на бесконечности тензором градиентов скоростей $\partial v_i^\infty / \partial x_k \equiv \gamma_{ik} + \omega_{ik}$. Для нетривиальных компонент симметричной γ_{ik} и антисимметричной ω_{ik} частей этого тензора из выражений (3) и (6) следует

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\zeta}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right), \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = \Omega + \frac{\zeta}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right). \quad (7)$$

Выражения (5) и (6) представляют собой формальное решение системы (1)–(3) в терминах величин \mathbf{v}_J , p_J и единственного неизвестного параметра ζ , описывающего однородную и отрицательную завихренность внутри эллипсоида. Определение ζ дано в разд. 3.

Здесь мы не будем приводить явные, но очень громоздкие выражения для \mathbf{v}_J и p_J из [1]: для нашего последующего рассмотрения будет существенно лишь значение силы

F_J , действующей на единицу площади твердой частицы. Согласно [1] (см. также [3]) величина $(F_J)_i \equiv \sigma_{ik} \nu_k$ (σ_{ik} — тензор напряжений, ν_k — компоненты вектора нормали, внешней по отношению к эллипсоиду) равна

$$(F_J)_i = -p\nu_i + \eta A_{ik} \nu_k. \tag{8}$$

Здесь p — некоторая постоянная, η — вязкость жидкости, окружающей твердую частицу. Матричные величины A_{ik} представляют собой линейную комбинацию компонент тензора градиентов скоростей внешнего потока. В нашей задаче из-за соотношений (7) отличны от нуля лишь элементы A_{12} и A_{21} , причем

$$A_{12} = 2 \frac{n_1 \gamma_{12} + b^2 n_3' \omega_{12}}{(a^2 n_1 + b^2 n_2) n_3'}, \quad n_3' = \frac{n_2 - n_1}{a^2 - b^2}. \tag{9}$$

Значения A_{21} получаются из A_{12} простой заменой $1 \leftrightarrow 2$, $a \leftrightarrow b$. Величина n_2 , входящая в (9), — размагничивающий фактор эллипсоида вдоль оси y .

Объединяя (6) и (8), найдем силу F , действующую со стороны немагнитной жидкости (область 2) на единицу поверхности капли:

$$F_i = -p\nu_i + \eta_2 (A_{ik} - 2\gamma_{ik}) \nu_k. \tag{10}$$

3. РАСЧЕТ ВНУТРИКАПЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Для определения параметра ζ , характеризующего интенсивность внутрикапельного движения, используем следующее интегральное условие:

$$\int v_i \sigma'_{ik(1)} \nu_k dS = \int v_i \sigma'_{ik(2)} \nu_k dS, \tag{11}$$

где интегрирование выполняется по поверхности эллипсоида, σ'_{ik} — тензор вязких напряжений.

В нашей задаче, где форма жидкой частицы считается эллипсоидальной, интегральное соотношение (11) заменяет собой точное условие непрерывности тангенциальных (согласно (2) $v_\nu = 0$ на поверхности капли) составляющих напряжений на границе жидкостей. В Приложении показано, что уравнение (11) представляет собой форму записи условия баланса энергии в системе.

Выполним расчет по формуле (11). Из (10) для свертки $\sigma'_{ik(2)} \nu_k$ следует

$$\sigma'_{ik(2)} \nu_k = \eta_2 (A_{ik} - 2\gamma_{ik}) \nu_k. \tag{12}$$

По определению вязких напряжений [9] и учитывая равенства (5) и (7), находим для внутренней области

$$\sigma'_{ik(1)} \nu_k = -2\eta_1 \gamma_{ik} \nu_k. \tag{13}$$

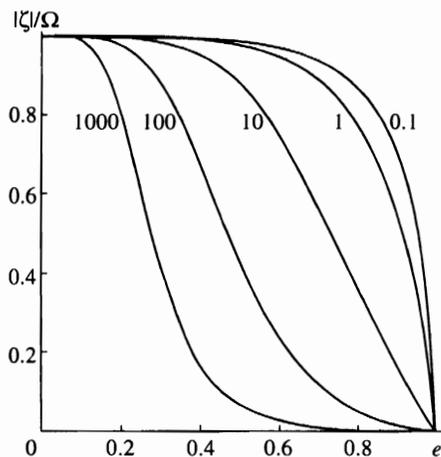


Рис. 2. Абсолютное значение параметра внутрикапельной завихренности в единицах Ω как функция эксцентриситета для шести значений η_1/η_2 , указанных у соответствующих кривых

Подставив (12) и (13) в (11), после интегрирования находим уравнение для определения ζ

$$\frac{a}{b}A_{12} - \frac{b}{a}A_{21} = \zeta \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2} \right). \quad (14)$$

Как следует из (14), ζ является линейной функцией угловой скорости вращения Ω длинной оси частицы. Здесь мы не будем приводить ее явного громоздкого выражения (см. соотношения (7) и (9), определяющие A_{12} и A_{21}) и ограничимся указанием значений ζ/Ω в двух предельных ситуациях — малых ($e \rightarrow 0$, квазисферическая капля) и больших ($e \rightarrow 1$, капля — вытянутый цилиндр) эксцентриситетов

$$\frac{\zeta}{\Omega} = \begin{cases} -1 + e^4 \left(\frac{1}{8} + \frac{\eta_1}{6\eta_2} \right), & e \rightarrow 0 \\ \frac{8\sqrt{1-e^2}}{\ln(1-e)} \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, & e \rightarrow 1 \end{cases} \quad (15)$$

Как и ожидалось, значения ζ всегда отрицательны. Результат расчета по формуле (14) модуля $|\zeta|/\Omega$ как функции эксцентриситета e капли показан на рис. 2 для нескольких значений отношения η_1/η_2 , указанных у соответствующих кривых. Предел $\eta_1/\eta_2 \rightarrow \infty$ отвечает, разумеется, случаю отсутствия ($\zeta = 0$) внутрикапельного движения: задача сводится к задаче Джеффри (см. (5) и (6)) для твердой частицы.

4. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МОМЕНТОВ СИЛ

Вычислим момент сил L вязкого трения, действующих на эллипсоидальную каплю при ее вращении. Из соображений симметрии ясно, что единственной нетривиальной его компонентой будет $L_z \equiv L$ равная

$$L = \int (xF_y - yF_x)dS, \quad (16)$$

где dS — элемент площади поверхности эллипсоида. Подставляя в (16) величины F_i из (10) и выполняя интегрирование, находим

$$L = \eta_2(A_{21} - A_{12})V, \quad (17)$$

где V — объем капли.

Момент сил вязкого трения (17) уравнивает момент L_m сторонних (магнитных) сил: $L + L_m = 0$. Рассчитать L_m можно было бы по аналогии с L , т. е. из рассмотрения магнитных (максвелловских) напряжений на поверхности эллипсоида. Однако результат для момента магнитных сил, действующих на эллипсоид в однородном внешнем поле, хорошо известен [10]

$$L_m = (\mu - 1)^2(n_2 - n_1)H_x H_y V / 4\pi. \quad (18)$$

Здесь под μ мы понимаем ту же статическую магнитную проницаемость, что и ранее в (4), поскольку дисперсия μ на низких частотах пренебрежимо мала [11]. Компоненты H_x и H_y однородного магнитного поля внутри эллипсоида связаны с величиной внешнего поля G соотношениями [10]

$$H_x = G \cos \alpha / (1 + (\mu - 1)n_1), \quad H_y = G \sin \alpha / (1 + (\mu - 1)n_2). \quad (19)$$

Окончательно условие баланса моментов вязких и магнитных сил, действующих на жидкую частицу, запишется в виде

$$4\pi\eta_2(A_{12} - A_{21}) = (\mu - 1)^2(n_2 - n_1)H_x H_y. \quad (20)$$

Это уравнение определяет угол α отставания длинной оси эллипсоида (оси x) от направления внешнего поля G . Расчет угла α невозможно выполнить в общем виде для произвольных эксцентриситетов капли, так как с ростом e , а значит, и внешнего поля G (см. выражение (4)), необходимо учитывать зависимость магнитной проницаемости от внутреннего поля H [6]. Укажем здесь лишь характерное значение $\sin 2\alpha$ для слабовытянутых ($e \rightarrow 0$) капель, для которых указанная зависимость $\mu = \mu(H)$ несущественна

$$\sin 2\alpha \rightarrow \frac{5}{4} \left(2 + 3 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Omega \tau, \quad e \rightarrow 0. \quad (21)$$

Как уже отмечалось в разд. 2, величина угла отставания формы капли от внешнего поля определяется малым параметром $\Omega\tau$.

5. ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ПОДВИЖНОСТЬ КАПЛИ

По аналогии с известными задачами обтекания твердых тел в приближении Стокса [2] рассмотрим подвижность B видимого вращательного движения капли относительно направления, перпендикулярного оси ее симметрии, т. е. относительно оси z в нашем рассмотрении. Используя определение подвижности как отношения угловой скорости вращения капли Ω к моменту внешних магнитных сил L_m и соотношения (7) и (20), получим

$$B = 3B_{HS} \frac{a^2 n_1 + b^2 n_2}{a^2 + b^2 + 2ab\zeta/\Omega}. \quad (22)$$

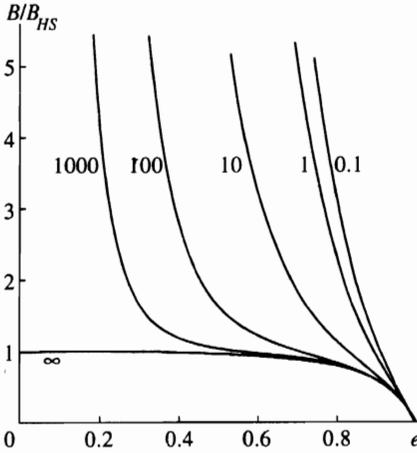


Рис. 3. Подвижность жидкой капли B по отношению к подвижности B_{HS} твердой сферической частицы как функция эксцентриситета для тех же значений η_1/η_2 , что и на рис. 2

Здесь $B_{HS} = 1/6\eta_2 V$ — вращательная подвижность твердой сферической частицы. Если положить $\zeta = 0$, то формула (22) сведется, конечно, к результату Джеффри для подвижности твердой эллипсоидальной частицы [1–3]. В рассматриваемом случае жидкой капли с нетривиальным внутренним движением отношение ζ/Ω должно браться из решения уравнения (14). В предельном случае квазисферических частиц из (22), (14), (9) и (7) следует

$$B = \frac{12\eta_2}{2\eta_1 + 3\eta_2} \frac{B_{HS}}{e^4}, \quad e \rightarrow 0. \quad (23)$$

Этот результат выглядит парадоксально. Действительно, в отличие от твердого эллипсоида, для которого $B \rightarrow B_{HS}$ при $e \rightarrow 0$, вращательная подвижность капли неограниченно возрастает при любом конечном значении η_1/η_2 . Это означает, что уже бесконечно слабого поля достаточно, чтобы вызвать вращение капли с конечной скоростью Ω . Последнее же, на первый взгляд, противоречит закону сохранения энергии. Данный «парадокс» имеет простое объяснение: под вращением капли мы понимаем ее видимое движение — вращение длинной оси капли в лабораторной системе координат $x'y'z$ (см. рис. 1). Скорости \mathbf{v}' материальных частиц в лабораторной системе координат связаны со скоростями \mathbf{v} , найденными во вращающейся системе координат, обычным кинематическим соотношением $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$ и, как следует из выражений (5), (6) и (15), неограниченно убывают при $e \rightarrow 0$.

В предельном случае сильновытянутых частиц, в силу того что внутреннее движение с ростом e исчезает (см. рис. 2), подвижность капли B приближается к своему твердотельному значению. На рис. 3 приведены результаты расчета по формулам (22), (14), (9) и (7) вращательной подвижности капли B в единицах B_{HS} в зависимости от эксцентриситета эллипсоида. Подвижность вычислена для пяти значений отношения η_1/η_2 , указанных у соответствующих кривых. Твердому эллипсоиду отвечает предел $\eta_1/\eta_2 \rightarrow \infty$. Отличия в характере вращения жидкого и твердого эллипсоидов связаны, конечно, с внутрикапельным движением.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был затронут только один аспект вращательного движения капли, взвешенной в вязкой жидкости, а именно: исследовался характер взаимодействия внутрикапельного движения с внешним потоком, форма капли при этом оставалась неизменной. Областью применимости представления о капле как о недеформируемой частице является диапазон низких частот: в эксперименте [7] показано, что форма капли не меняется вплоть до некоторой частоты f_1 . При $f = f_1$ капля скачкообразно вытягивается в несколько раз, превращаясь в «гантель». При дальнейшем увеличении частоты поля до значения f_* (которое, однако, чрезвычайно мало отличается от f_1) в системе устанавливается динамическое равновесие: капля-гантель делится на две равные части, имеющие ту же форму, что и исходная капля, эти отдельные капли совершают от одного до нескольких полуоборотов и снова сливаются в одну каплю-гантель, которая, в свою очередь, после нескольких оборотов снова делится на две и т. д. Дальнейший рост частоты все больше смещает данное динамическое равновесие в сторону конфигурации с двумя каплями вплоть до частоты f_2 , начиная с которой «возврата» к капле-гантели не происходит. Образовавшиеся капли подобны исходной и с ростом частоты также могут претерпеть деление [7].

Частоты f_1 , при которых возникают большие деформации капель радиусом от одного до нескольких миллиметров, составляли 1–3 Гц [7]. При таких частотах числа Рейнольдса для внутрикапельного течения $Re = \rho\Omega R^2/\eta_1$ уже не являются малыми. Изучение поведения капли в области высоких частот следует проводить поэтому вне рамок приближения Стокса, а постановка и решение задачи устойчивости требуют отдельного рассмотрения.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Ф. Пшеничникову за полезные замечания и обсуждение результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00408).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем эквивалентность интегрального соотношения (11) и условия баланса энергии в системе. Пусть W_1 и W_2 — энергии, диссипируемые в единицу времени внутри и снаружи капли. Обозначая через A мощность внешних магнитных сил, записываем уравнение баланса энергии в системе

$$A = W_1 + W_2. \quad (\text{A.1})$$

Из соотношений (17) и (18) для величины A имеем

$$A = L_m \Omega = \eta_2 (A_{12} - A_{21}) \Omega V. \quad (\text{A.2})$$

Вычислим W_1 и W_2 . Согласно [9] диссипируемая в капле энергия равна

$$W_1 = \frac{\eta_1}{2} \int_E \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (\text{A.3})$$

Здесь интегрирование выполняется по объему капли, на что указывает обозначение E ниже знака интеграла. Используя уравнения движения (1), стандартным образом [2, 9]

сводим объемный интеграл в (А.3) к поверхностному:

$$W_1 = \int_E v_i (\sigma'_{ik}{}^{(1)} - p_1 \delta_{ik}) \nu_k dS. \quad (\text{A.4})$$

Верхний индекс у поля скорости в (А.4) не поставлен: в силу граничных условий (2) под v можно понимать общее для обеих жидкостей значение скорости на поверхности капли. Поскольку $v_\nu = 0$ (см. (2)), диссипация энергии в капле выражается лишь через тензор вязких напряжений $\sigma'_{ik}{}^{(1)} \equiv \eta_1 (\partial v_i^{(1)} / \partial x_k + \partial v_k^{(1)} / \partial x_i)$:

$$W_1 = \int_E v_i \sigma'_{ik}{}^{(1)} \nu_k dS. \quad (\text{A.5})$$

По аналогии с W_1 диссипацию энергии в окружающей каплю жидкости представим в виде двух интегралов — по поверхности сферы большого радиуса Λ ($\Lambda \gg a$) и поверхности эллипсоида,

$$W_2 = \int_\Lambda v_i^{(2)} (\sigma'_{ik}{}^{(2)} - p_2 \delta_{ik}) \nu_k dS - \int_E v_i \sigma'_{ik}{}^{(2)} \nu_k dS. \quad (\text{A.6})$$

Знак минус перед вторым слагаемым связан с тем, что под ν_k в (А.4) и (А.5) понимается вектор внешней нормали к эллипсоиду и сфере.

Итак, для вычисления W_2 необходимо знать поведение полей $\mathbf{v}^{(2)}$ и p_2 вдали от эллипсоида. Асимптотические зависимости скорости и давления с точностью до величин соответственно порядка r^{-2} и r^{-3} , как следует из (6), (7) и аналитического решения Джеффри [1], таковы:

$$v_x^{(2)} = \Omega y - C \frac{x^2 y}{r^5} - D \frac{y}{3r^3}, \quad (\text{A.7})$$

$$v_y^{(2)} = -\Omega x - C \frac{xy^2}{r^5} + D \frac{x}{3r^3}, \quad (\text{A.8})$$

$$v_z^{(2)} = -C \frac{xyz}{r^5}, \quad (\text{A.9})$$

$$p_2 = -2\eta_2 C \frac{xy}{r^5}, \quad (\text{A.10})$$

где использованы следующие обозначения:

$$C = R^3(A_{12} + A_{21})/2, \quad D = R^3(A_{12} - A_{21})/2. \quad (\text{A.11})$$

Первые слагаемые в правой части (А.7) и (А.8) представляют собой невозмущенное поле скорости во вращающейся системе координат, все остальные члены в (А.7)–(А.10) суть возмущения, вызванные каплей.

Вычисление интеграла в (А.6) по удаленной сфере (ниже мы обозначаем его W_Λ) удобно выполнить в сферических координатах r, φ, θ , в которых поля скорости и давления переписываются в виде

$$v_r^{(2)} = -\frac{C}{r^2} \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (\text{A.12})$$

$$v_{\varphi}^{(2)} = \left(-\Omega r + \frac{D}{3r^2} \right) \sin \theta, \quad (\text{A.13})$$

$$v_{\theta}^{(2)} = 0, \quad p_2 = 2\eta_2 \frac{v_r}{r}. \quad (\text{A.14})$$

Как видно из выражений (A.7)–(A.9) или (A.12)–(A.14), компоненты тензора вязких напряжений имеют порядок r^{-3} . Поскольку после вычисления W_{Λ} будет сделан предельный переход $\Lambda \rightarrow \infty$, в интеграле по удаленной сфере нужно сохранить лишь слагаемые порядка r^{-2} . Отсюда W_{Λ} выражается через единственную компоненту тензора вязких напряжений

$$W_{\Lambda} = \int_{\Lambda} v_{\varphi}^{(2)} \sigma'_{\varphi r}{}^{(2)} dS. \quad (\text{A.15})$$

Вычислим $\sigma'_{\varphi r}{}^{(2)}$. Согласно [9]

$$\sigma'_{\varphi r}{}^{(2)} = \eta_2 \left(\frac{\partial v_{\varphi}^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{v_{\varphi}^{(2)}}{r} \right).$$

Подставляя сюда значения компонент скорости из (A.12)–(A.14), получим

$$\sigma'_{\varphi r}{}^{(2)} = -\frac{\eta_2 \sin \theta}{r^3} (D + C \cos 2\varphi). \quad (\text{A.16})$$

Интегрирование в (A.15) с учетом соотношений (A.13) и (A.16) дает

$$W_{\Lambda} = \frac{8\pi}{3} \eta_2 D \Omega = \eta_2 (A_{12} - A_{21}) \Omega V. \quad (\text{A.17})$$

Сравнение последнего результата с (A.2) показывает, что $W_{\Lambda} = A$. В результате выражения (A.1), (A.5) и (A.6) окончательно приводятся к интегральному условию (11).

Литература

1. G. V. Jeffrey, Proc. R. Soc. A **102**, 161 (1922).
2. J. Happel and H. Brenner *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall (1965); (пер. Дж. Хэппель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, Москва (1976)).
3. В. Н. Покровский *Статистическая механика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
4. R. Roscoe, J. Fluid. Mech. **28**, 273 (1967).
5. S. R. Keller and R. Skalak, J. Fluid Mech. **120**, 27 (1982).
6. М. И. Шлиомиш, УФН **112**, 427 (1974).
7. А. В. Лебедев, К. И. Морозов, Письма в ЖЭТФ **65**, 150 (1997).
8. J.-C. Vacci and D. Salin, J. Phys. Lett. **43**, 649 (1982).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
11. А. Ф. Пшеничников, А. В. Лебедев, ЖЭТФ **95**, 869 (1989).