

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГЕНЕРАТОРЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ — ЛАЗЕРЕ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

*В. П. Шестопалов*

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова  
Национальной академии наук Украины  
310085, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 5 июня 1996 г.

На примере лазера на свободных электронах, которым является генератор дифракционного излучения, изучены нелинейные эволюционные процессы с двумя управляющими параметрами, один из которых связан с электродинамической структурой (положительной обратной связью), другой — с приложенным к электронному потоку постоянным электрическим полем. С этой целью сначала исследована линейная спектральная задача для открытого резонатора генератора и установлено дисперсионное уравнение вблизи морсовской критической точки, а затем построено нелинейное эволюционное уравнение с двумя управляющими параметрами, анализ которого позволяет определить свойства параметрической зависимости бифуркации и структурной устойчивости, определяемых малыми вариациями управляющего параметра (настройки резонатора). Это и объясняет эффективность работы генератора дифракционного излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В генераторе дифракционного излучения — лазере на свободных электронах [1], как и в любом другом СВЧ-генераторе *O*-типа, продуцируемое термокатодом шумовое электронное облако в результате специально созданных статических магнитного и электрического полей превращается в прикатодной области в поток хаотически детерминированных частиц, которые за счет правильно организованной положительной обратной связи, выбранной с помощью соответствующей электродинамической структуры, и приложенного постоянного электрического поля обеспечивают в пространстве взаимодействия равномерное и прямолинейное движение электронов, способных уже при определенных параметрах структуры и электронного потока порождать когерентное излучение. Каким образом полностью разупорядоченные свободные электроны превращаются в высокоорганизованный коллектив частиц, способный создавать высокочастотные когерентные электромагнитные поля? Этот вопрос в равной степени можно отнести и к другим физико-химическим, а также биологическим, информационным и др. проблемам, в которых необходимо решать задачи динамики сложных процессов, имея в виду прежде всего их нелинейность и возможность самоорганизации, понимание и описание которых можно получить с помощью введения управляющих параметров (или параметров порядка). В этом отношении генератор дифракционного излучения является идеальной моделью для изучения нелинейных эволюционных процессов с двумя управляющими параметрами, один из которых связан с электродинамической структурой, т. е. положительной обратной связью, другой — силовой — с приложенным к

электронному потоку постоянным электрическим полем. В [2] проведен анализ экспериментальных данных с целью изучения стационарных кустовых резонансов открытой структуры генератора дифракционного излучения. Здесь будет построена нелинейная нестационарная теория динамических процессов в генераторе.

Открытая электродинамическая структура генератора представляет собой сложный открытый резонатор, состоящий из двух зеркал специальной геометрической формы: верхнее зеркало — обычно сферическое или сфероидальное (иногда сфероцилиндрическое) с отверстием связи; нижнее — плоское или цилиндрическое с расположенной на ней дифракционной решеткой (она только частично покрывает поверхность зеркала). Движущийся равномерно и прямолинейно вблизи дифракционной решетки поток электронов, промодулированный с частотой излучения, создает собственное поверхностное электромагнитное поле, которое рассеивается на решетке и порождает кроме поверхностных хотя бы одну объемную волну — дифракционное излучение, «запитывающее» открытый резонатор. Благодаря многократному отражению дифракционного излучения от зеркал в резонаторе накапливается излучение, которое через щель связи поступает в нагрузку. Так обычно описывается режим установившихся колебаний в генераторе дифракционного излучения [3].

При изучении нелинейных эволюционных процессов в генераторе сначала исследуем линейную спектральную задачу для открытого резонатора, определяя не только регулярные, но и критические точки спектра. Теория морсовских критических точек дисперсионных уравнений резонатора является основой развиваемого здесь подхода к построению нелинейных эволюционных уравнений для генератора дифракционного излучения. Поскольку дисперсионные уравнения вблизи морсовских точек можно представить в аналитической форме, то соответствующие им эволюционные уравнения (сначала линейные, а затем и нелинейные) выписываются обычным путем. Построенные таким способом нелинейные эволюционные уравнения описывают собственный колебательный процесс, зависящий от одного управляющего параметра — геометрии открытого резонатора. Другой управляющий параметр вводится феноменологически. Он связан с постоянным электрическим полем, приложенным к потоку электронов. Полученное нелинейное уравнение отличается от известных тем, что в нем прежде всего отражается нелинейный процесс вблизи морсовских точек, где законы дисперсии претерпевают резкие изменения (нормальная дисперсия превращается в аномальную и наоборот), а учет воздействия приложенного электростатического поля на поток электронов вносит некоторую асимметрию, приводящую к новой ситуации в устойчивости нелинейной системы.

Анализ нелинейных эволюционных уравнений позволяет установить свойства параметрической зависимости бифуркации от качества открытого резонатора, поведения потока электронов и соответствующего представления о структурной устойчивости, определяемых малыми изменениями управляющих параметров вблизи критических точек, что и объясняет эффективность генератора дифракционного излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА И ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА

Построение эволюционного уравнения для генератора дифракционного излучения тесно связано с более глубоким исследованием линейных стационарных процессов, т. е.

решением линейной спектральной задачи, и с развитием методов, связывающих во-едино однородные (спектральные) и неоднородные (возбуждение) задачи для открытых электродинамических структур. Последние принципиально отличаются от закрытых структур потерями на излучение, многосвязностью в поперечном сечении, поведением электромагнитного поля на бесконечности. Поэтому спектр собственных колебаний (для открытых резонаторов) перестает быть вещественным, возникают дополнительные требования к энергетическим соотношениям в различных областях пространства, изменяется сам характер линейной спектральной задачи. Возникающие задачи о собственных колебаниях открытого резонатора образуют новый класс несамосопряженных линейных задач, в которых спектральный параметр обычно входит нелинейным образом. Такие нелинейные спектральные задачи математической физики привели к разработке метода оператор-функции одной или многих комплексных переменных [4].

1. Особенности метода оператор-функции в построении линейных спектральных задач для открытого резонатора корректно обосновываются при изучении линейных нестационарных однородных уравнений Максвелла с определенными начальными и краевыми условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A\mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (1)$$

Здесь  $A$  — оператор Максвелла:

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & c \operatorname{rot} \\ -c \operatorname{rot} & 0 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{u} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{array} \right\|,$$

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $c$  — скорость света в вакууме. Заметим, что свободные колебания резонатора, совершающиеся в отсутствие внешних источников за счет первоначально внесенной энергии должны быть затухающими во времени.

С помощью преобразования Лапласа получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} (pI - A)^{-1} u_0 dp, \quad (2)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , не содержащей спектра оператора Максвелла  $A$ ;  $I$  — единичный оператор.

Таким образом, линейная эволюция во времени свободных колебаний резонатора описывается интегралом (2), для вычисления которого необходимо знать спектр оператора Максвелла  $A$ , т. е. оператор-функции  $(pI - A)^{-1}$  как функции параметра  $p$ . Эффективный способ решения этой задачи определяется переходом от (1) к приведенным уравнениям типа

$$-i\lambda v = Av, \quad (3)$$

т. е. изучению решений уравнений (1) вида  $u(t) = v \exp(-i\lambda t)$ , где  $v$  удовлетворяет (3) и определенным условиям излучения.

Теперь становится ясной роль линейной спектральной задачи в решении задачи возбуждения открытого резонатора; она сводится к системе операторных уравнений второго рода с оператором типа Гильберта–Шмидта.

2. Рассмотрим линейную спектральную задачу о собственных  $H$ -колебаниях двумерного открытого резонатора, образованного двумя идеально проводящими незамкнутыми круговыми цилиндрическими поверхностями, и построим матричную оператор-функцию, зависящую от искомого спектрального параметра.

Задача состоит в определении значения комплексного спектрального параметра  $k$  (собственной частоты  $\omega \simeq ck$  резонатора), при котором существует нетривиальное решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего краевым условиям на зеркалах резонатора, условию типа Мейкснера и условию Свешникова–Рейнхарда для уходящего излучения. Эта линейная задача принципиально отличается от аналогичной задачи для закрытых резонаторов наличием условия излучения на бесконечности. Решение линейной задачи методом разделения переменных в локальных координатах имеет вид линейной суперпозиции рядов Фурье, и в силу свойств цилиндрических функций и теорем сложения для них искомая собственная функция  $u(x, y)$  бесконечно дифференцируема по  $x$  и  $y$  и является решением уравнения Гельмгольца всюду в области  $\mathbb{R}^2$  за исключением зеркал резонатора; кроме того, для любого  $k \in \mathbb{C}_k = \{k : |\arg k| < \pi\}$  функция  $u(x, y)$  удовлетворяет условию излучения.

При построении матричных оператор-функций необходимо, чтобы  $u(x, y)$  удовлетворяла граничным условиям, что приводит к парным функциональным уравнениям с ядром в виде тригонометрических функций для коэффициентов Фурье  $u(x, y)$ . Следовательно, исходная линейная задача в терминах дифференциальных уравнений эквивалентна парным функциональным уравнениям, которые методом задачи Римана–Гильберта [5] сводятся к исследованию бесконечной линейной однородной системы алгебраических уравнений второго рода

$$x_p^n = \sum_{s=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{pm}^{ns}(k) x_m^s, \quad n = 1, 2, \quad (4)$$

где  $x_p^n$  — фурье-компоненты функции  $u(x, y)$ , а матричные элементы  $a_{pm}^{ns}$  являются функциями спектрального параметра  $k$  и определяются формулами через функции Бесселя и полиномы Лежандра (они здесь не приводятся из-за громоздкости [5]).

Введем обозначения:  $\sigma(\Delta)$  — спектр исходной задачи;  $\sigma_H(A)$  — множество тех комплексных чисел  $k \in \mathbb{C}_k$ , для которых существует нетривиальное решение системы (4). Тогда можно доказать, что матрицы  $\|a_{pm}^{ns}(k)\|_{p,m=-\infty}^{+\infty}$  задают в пространстве  $l_2$  ядерные операторы для определенного набора  $k$ . Матрицы  $\|a_{pm}^{ns}(k)\|$  определяют в  $l_2$  ограниченные операторы  $A^{ns}(k) : l_2 \rightarrow l_2$ , которые будем рассматривать как оператор-функции спектрального параметра  $k$ , областью определения которых является  $\mathbb{C}_k$ , а областью значений — множество ядерных операторов. При этом система ядерных оператор-функций  $A^{ns}(k)$  адекватна исходной линейной спектральной задаче и, как следует из (4), поддается эффективному описанию.

Запишем теперь систему (4) в операторной форме:

$$x^n = \sum_{s=1}^2 A^{ns}(k) x^s, \quad n = 1, 2. \quad (5)$$

Система операторных уравнений (5) представляет собой задачу о характеристических числах некоторой матричной оператор-функции, и ее, а значит и систему (4), можно записать как операторное уравнение в  $l_2^2$ :

$$\{I - A(k)\} x = \theta, \quad (6)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $l_2^2$ ,  $\theta$  — нулевой элемент.

Теперь свойства множества  $\sigma(\Delta)$  можно изучить, опираясь на методы спектральной теории применительно к оператор-функции  $I - A(k)$ , что связано с изучением аналитических свойств матричной оператор-функции  $A(k) = \|A^{ns}(k)\|_{n,s=1}^2$  как функции параметра  $k$ . При этом доказано, что спектр двумерных электромагнитных колебаний открытого резонатора является конечнократным, дискретным и расположенным в области  $\{k : \text{Im } k < 0\}$ . Таким образом для любых  $R_1 > 0$  и  $R_2 > 0$  в области  $\{k : \pi < \arg k < 2\pi; R_1 < |k| < R_2\}$  содержится лишь конечное число собственных частот исходной линейной спектральной задачи.

Описанный метод оператор-функции решения линейной спектральной задачи позволяет построить и обосновать универсальный алгоритм для расчета собственных частот, опирающийся на однозначную разрешимость операторного уравнения (6), при всех  $k$  и существование регулярных характеристических чисел и морсовских критических точек оператор-функции  $I - A(k)$ .

Если  $k_m$  — приближенные характеристические числа оператор-функции  $I - A(k)$ , то они сходятся к характеристическим числам оператор-функции  $I - A(k)$ , когда  $m \rightarrow \infty$ . Так как  $A_m(k)$  — конечномерные оператор-функции ( $A_m(k)$  определяется из  $A_m(k)x = \theta$ ), то  $k_m$  удовлетворяют уравнению

$$\det \{A_m(k)\} = 0, \quad (7)$$

где  $A_m(k)$  — последовательность оператор-функций, аппроксимирующая оператор-функцию  $I - A(k)$ . Функция  $\det \{A_m(k)\}$  аналитична в области  $\mathbb{C}_k$ . Поэтому для численного решения уравнения (7) применим метод Ньютона. Таким образом, приближенные характеристические числа определяются как корни уравнения (7).

3. Рассмотрим задачу дифракции монохроматического электромагнитного поля  $E^0(\omega) \exp(-i\omega t)$ ,  $H^0(\omega) \exp(-i\omega t)$  на открытом резонаторе, спектральные характеристики которого изучены в п. 2. Требуется определить решение  $E^g(\omega, x, y)$ ,  $H^g(\omega, x, y)$  однородной системы уравнений Максвелла, удовлетворяющее краевым условиям на идеально проводящих зеркалах резонатора, условию Мейкснера и условию погашаемости Малюжинца. Для этой векторной краевой задачи справедлива теорема единственности, из которой и свойств  $E^0$ ,  $H^0$  следует, что она редуцируется к двум скалярным задачам с  $u^1 = H_z^g$  и  $u^2 = E_z^g$  и  $u^1$ ,  $u^2$  должны удовлетворять указанным выше условиям для  $E^g$ ,  $H^g$ . Функции вида

$$G^H = H_z^0 + u^1, \quad G^E = E_z^0 + u^2$$

обычно называются функциями Грина уравнений Гельмгольца исследуемой задачи. Согласно методу разделения переменных,  $u^{1,2}$  ищем в виде рядов Фурье, для которых после применения краевых условий находим парные функциональные уравнения с ядром в виде тригонометрических функций, редуцируемых с помощью метода Римана-Гильберта [5] к неоднородной системе алгебраических уравнений второго рода вида (4). Эту систему можно рассматривать как систему операторных уравнений в  $l_2$ :

$$x^q = \sum_{i=1}^2 A^{qi} x^i + a^q, \quad q = 1, 2, \quad (8)$$

где  $a^q$  определяются видом возбуждающего поля. При этом, если существует решение системы (8), принадлежащее  $l_2$ , получаем решение исходной задачи дифракции. Отметим, что систему (8) можно представить как каноническое уравнение Фредгольма в

некотором гильбертовом пространстве:

$$x = Ax + a, \quad (9)$$

с вполне непрерывным оператором  $A: l_2^1 \rightarrow l_2^1$ . Для (9) справедлива альтернатива Фредгольма.

Исходная задача о функциях Грина  $G^{HE}$ , которые описывают вынужденные монохроматические колебания открытого резонатора, тесно связана с линейной спектральной задачей о собственных колебаниях. Из справедливости альтернативы Фредгольма для (9) следует существование ограниченного оператора  $(I - A)^{-1}$ , определенного на всем пространстве  $l_2^1$ , а из его свойств вытекает, что резольвентное множество  $\rho(A)$  не пусто; это доказывает дискретность и конечнократность множества собственных частот линейной задачи изучаемого резонатора. При этом функция Грина как функция спектрального параметра имеет особенность типа полюса на спектре линейной задачи; вычеты функции Грина в этих полюсах с точностью до констант совпадают с функциями, описывающими собственные колебания резонатора: они не удовлетворяют условию излучения для задачи возбуждения, но удовлетворяют более общему условию для уходящего излучения (условие Свешникова–Рейнхардта). Верно и обратное, если функция Грина имеет особенность типа полюса при некотором собственном значении, то оно принадлежит множеству собственных частот рассматриваемого открытого резонатора.

Определенные из (9) коэффициенты Фурье позволяют путем приближенного суммирования рядов найти функции Грина  $G^H$  и  $G^E$ , практически важные в резонансном диапазоне частот, определяемом условием  $ka = O(1)$ , где  $a$  — характерный размер открытого резонатора, а также вблизи морсовских критических точек. Решение уравнения (9) методом редукции или методом последовательных приближений дает возможность наряду с расчетами на ЭВМ установить качественные закономерности, которым подчиняются спектральные характеристики и функции Грина исследуемых резонаторов.

### 3. ТЕОРИЯ МОРСОВСКИХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Как показано в разд. 2, спектральная теория открытого резонатора позволяет из дисперсионного уравнения

$$\mathcal{F}(\kappa) \equiv \det \{I - A(k)\} = 0, \quad (10)$$

где  $\kappa = ka$  ( $k = \omega/c$ ,  $\omega$  — собственная частота резонатора,  $a$  — его любой геометрический размер), найти спектральный параметр  $\kappa$  при заданных неспектральных параметрах. Дисперсионное уравнение (10) является характеристическим бесконечным определителем ядерного оператора  $A(\kappa)$ , и его решение можно получить только с помощью ЭВМ. Существенно, что  $A(\kappa)$  зависит также и от неспектральных параметров, в частности геометрических (расстояния  $l$  между зеркалами, радиуса  $a$  зеркала, его апертуры  $b$ ). Ограничимся одним из них:  $\chi = b/a$ . При этом оператор-функция будет иметь вид  $A(\kappa, \chi)$ , а дисперсионное уравнение запишется следующим образом:

$$\mathcal{F}(\kappa, \chi) \equiv \det \{I - A(\kappa, \chi)\} = 0, \quad (11)$$

где  $\chi$  изменяется в области  $\mathcal{D}_\chi \in \mathbb{C}$  аналитичности  $A(\kappa, \chi)$  ( $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость).

Найденные корни уравнения (11) позволяют построить зависимости  $\kappa(\chi)$ , определяющие дисперсионные закономерности данного резонатора. Регулярные точки спектра (11) дают классические (нормальные или аномальные) законы дисперсии, в которых при изменении  $\chi$  плавно изменяются дисперсионные кривые. Обычно изучением этих закономерностей и ограничиваются. Однако существуют ситуации, когда совокупность неспектральных параметров при их малых вариациях приводят к резкому (катастрофическому) изменению дисперсии, сильному росту или уменьшению дифракционных потерь, возникновению междутиповых (гибридных) колебаний. Это оказалось возможным, благодаря наличию в (11) особых точек спектра — морсовских критических точек, вблизи которых и происходят указанные события. Построим аналитическую теорию таких точек.

1. Областью определения ядерной и аналитической оператор-функции  $A(\kappa, \chi)$  двух комплексных переменных  $\kappa, \chi$  является  $(\kappa, \chi) \in \Lambda \times \mathcal{D}_\chi$ . С физической точки зрения параметр  $\chi$  определяет настройку резонатора. Считаем, что собственные числа  $\kappa \in \Lambda_0$ , где  $\Lambda_0 = \{\kappa \in \mathbb{C} : -\pi < \arg \kappa < \pi; \kappa \neq 0\}$  — нулевой лист  $\Lambda$  [6].

Поскольку  $A(\kappa, \chi)$  — ядерная и аналитическая оператор-функция, множество нулей дисперсионного уравнения  $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$  совпадает с множеством характеристических чисел  $\sigma(\kappa)$  оператор-функций  $I - A(\kappa, \chi)$  (множество  $\sigma(\kappa)$  определено на подмножестве множества  $\mathcal{D}$  в  $\mathbb{C}^2$  вида  $\mathcal{D} = \Lambda_0 \times \mathcal{D}_\kappa$ ). Необходимо выяснить, что происходит с  $\sigma(\kappa)$ , когда собственные числа  $\kappa$  изменяются в  $\mathcal{D}_\kappa$ ? Для этого введем аналитическое множество  $\mathcal{D}$  вида  $\sigma_0 = \{(\kappa, \chi) \in \mathcal{D} : \mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0\}$  и рассмотрим  $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$  как отображение  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  с областью определения  $\mathcal{D}$  (при этом считаем, что  $\chi$  — величина комплексная). Если вблизи существует изолированная особая точка  $(\kappa_0, \chi_0)$  отображения  $\mathcal{F}$ , то локальная структура  $\sigma_0$  в окрестности  $(\kappa_0, \chi_0)$  определяется расположением и типом точки  $(\kappa_0, \chi_0)$  (это следствие теории функций многих комплексных переменных и особенностей гладких дифференцируемых отображений [7, 8]). Вдали же от  $(\kappa_0, \chi_0)$  множество локально устроено как гиперплоскость. Ясно, что малые изменения  $\chi$  в окрестности  $(\kappa_0, \chi_0)$  приводят к малым изменениям  $\sigma(\kappa)$ .

Феноменологические особенности междутиповых колебаний, хорошо известные для различных колебательных структур, определяются законом дисперсии — специальным поведением двух собственных частот как функций от  $\chi$  при  $\text{Im } \chi = 0$  (график Вина). Поэтому возникает задача описания в терминах регулярных и особых точек отображения  $\mathcal{F}$  закона дисперсии, характерного для явления междутиповых колебаний. Локальная структура  $\sigma_0$  как гиперплоскость не отвечает указанному закону дисперсии. Поэтому рассмотрим множество критических точек

$$\sigma_c = \left\{ (\kappa, \chi) \in \mathcal{D} : \text{grad } \mathcal{F} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} \right) = 0 \right\}$$

и множество изолированных морсовских критических точек

$$\sigma_{Mc} = \left\{ (\kappa, \chi) \in \sigma_c : \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \chi^2} - \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa \partial \chi} \right)^2 \neq 0 \right\}.$$

Пусть  $(\kappa_0, \chi_0)$  — изолированная морсовская точка, лежащая вблизи  $\sigma_0$ . Тогда вблизи  $(\kappa_0, \chi_0)$  уравнение (11) можно разложить в ряд Тейлора и с точностью до кубически малых членов получить

$$\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa^2} (\kappa - \kappa_0)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa \partial \chi} (\kappa - \kappa_0)(\chi - \chi_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \chi^2} (\chi - \chi_0)^2 + O^3 = 0, \quad (12)$$

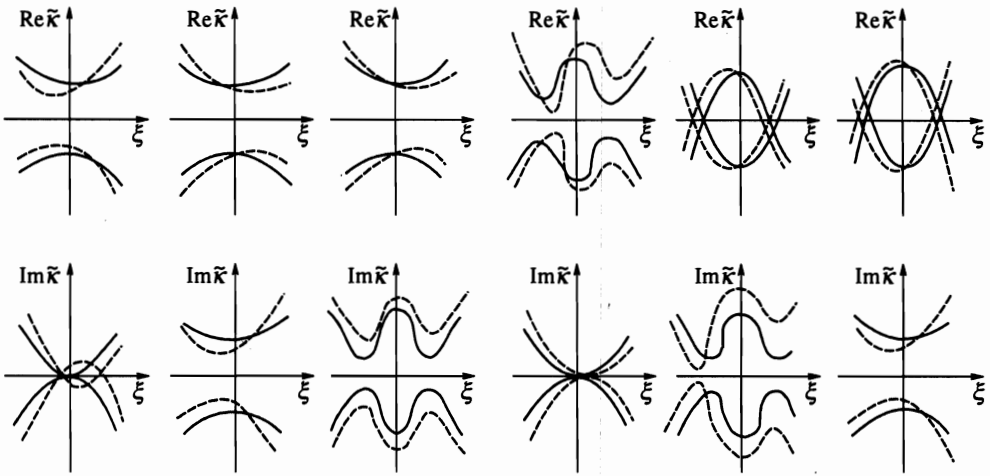


Рис. 1. Дисперсионная закономерность вблизи морсовской точки открытого резонатора для различных значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ : сплошные кривые —  $\beta = 0$ , штриховые —  $\beta \neq 0$

Согласно теореме Морса [9], заменой переменных ряд (12) представляем в виде канонической квадратичной формы

$$\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\chi}^2 + \delta = 0, \tag{13}$$

где  $\delta = \mathcal{F}(\kappa_0, \chi_0) \neq 0$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa - \kappa_0$ ,  $\tilde{\chi} = \chi - \chi_0$ . Из (13) имеем  $\tilde{\kappa} = \pm i\sqrt{\tilde{\chi}^2 + \delta}$ . При  $\delta = 0$  получаем  $\tilde{\kappa} = \pm i\tilde{\chi}$ . Уравнение (13) содержит закон дисперсии (зависимость спектрального параметра  $\tilde{\kappa}$  от несектрального параметра  $\tilde{\chi}$ ), характерный для междутиповой связи колебаний, а величина  $\delta$  определяет степень этой связи.

Исследование зависимостей  $\text{Re } \tilde{\kappa}(\tilde{\chi})$  и  $\text{Im } \tilde{\kappa}(\tilde{\chi})$  достаточно провести при изменении  $\tilde{\chi}$  вдоль прямых  $\text{Re } \tilde{\chi} = \xi$ ,  $\text{Im } \tilde{\chi} = \alpha\xi + \beta$ , где  $\xi$  — вещественный параметр прямой,  $\alpha$  — угол ее наклона,  $\beta \neq 0$  при  $\text{Im } \chi_0 \neq 0$ . В результате имеем

$$\tilde{\kappa}_{\pm}(\xi) = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \text{sign } b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), \tag{14}$$

где

$$a = \alpha\xi + \beta^2 - \xi^2 - \delta_1, \quad b = -\delta_2 - 2\xi(\alpha\xi + \beta), \quad \delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^1.$$

2. Двухпараметрические по  $\alpha$  и  $\beta$  семейства кривых  $\text{Re } \tilde{\kappa}(\xi)$ ,  $\text{Im } \tilde{\kappa}(\xi)$  содержат при определенных  $\alpha$  и  $\beta$  зависимости, аналогичные известному графику Вина для резонансных частот связанных колебательных контуров. На рис. 1 представлены дисперсионные кривые, полученные из (13), (14) для всех возможных качественно различающихся ситуаций дисперсионных закономерностей вблизи морсовской точки при различных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  (зависимости  $\tilde{\kappa}(\xi)$  при  $\beta = 0$  показаны сплошными линиями; их возмущения ( $\beta \neq 0$ ) — штриховыми).

Таким образом, наличие изолированной морсовской точки  $(\kappa_0, \chi_0)$  характеристического определителя  $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$  открытого резонатора приводит к существованию в окрестности  $(\kappa_0, \chi_0)$  двух решений,  $\kappa_+(\chi)$  и  $\kappa_-(\chi)$ , дисперсионного уравнения  $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$ .



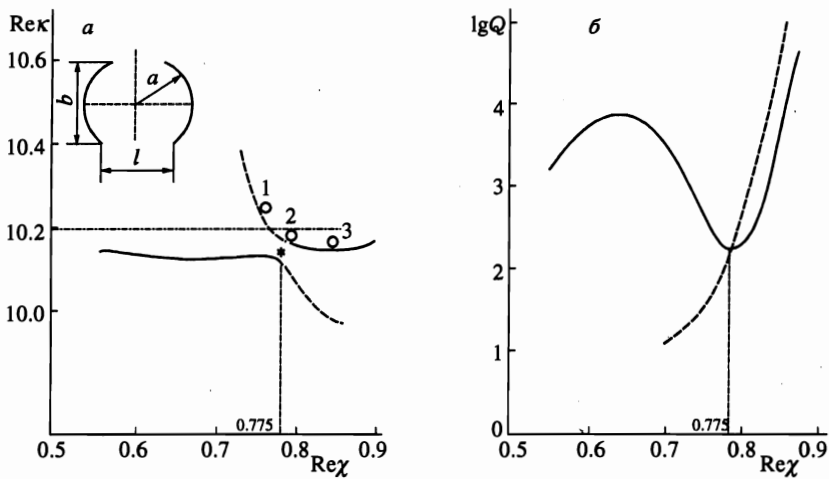


Рис. 2. Дисперсия (а) и дифракционные потери (б) в открытом резонаторе вблизи морсовской точки (звездочка на рис. а) колебаний  $H_{03}$  (сплошные кривые) и  $H_{41}$  (штриховые)

Поведение этих решений при изменении настройки  $\chi$  резонатора полностью определяется квадратичной формой (13) и описывает междутиповые колебания резонатора, в частности, определяет резкое изменение добротности  $Q = -Re \kappa / 2 Im \kappa$  (дифракционных потерь) резонатора при малых изменениях его геометрических параметров.

На рис. 2 представлены зависимости действительных частей собственных частот и логарифмов добротностей  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -колебаний от  $Re \chi = b/a$ . Видно, что добротности  $Q$  колебаний имеют резко выраженную зависимость от  $b/a$ : при увеличении  $b/a$  добротность (высокодобротного)  $H_{03}$ -колебания, имеющего три вариации поля по оси резонатора, монотонно возрастает до  $Q \sim 10^4$  ( $b/a = 0.650$ ), а затем сильно уменьшается (почти на два порядка) и становится вблизи  $b/a = 0.775$  сравнимой с добротностью  $H_{41}$ -колебания, которая быстро увеличивается с возрастанием  $b/a$ . Действительные части собственных частот (рис. 2а) при  $0.73 \leq b/a \leq 0.83$  образуют дисперсионные кривые, аналогичные графику Вина. При  $\chi_0 = 0.775$  и  $\kappa_0 = 10.130$  модуль разности собственных частот минимален (при этом добротности  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -колебаний совпадают).

Представляет существенный интерес структура полей  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -колебаний вблизи морсовской точки ( $\kappa_0 = 10.130$ ,  $\chi_0 = 0.775$ ). Для ее определения необходимо воспользоваться возбуждением открытого резонатора плоской  $H$ -поляризованной волной на частотах, соответствующих  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -колебаниям, а также на частоте колебаний в самой морсовской точке. На рис. 3 представлены распределения полей (линии равных амплитуд  $H_z$ -компонент поля) в открытом резонаторе (случаи 1, 2, 3 соответствует частотам 1, 2, 3 рис. 2а).

Из рис. 2 и 3 можно сделать основополагающие выводы: вблизи морсовской точки происходят существенные изменения в поведении законов дисперсии и возникают интенсивные междутиповые колебания. Как будет показано ниже, это приведет к новой ситуации в изучении нелинейных эволюционных процессов вблизи морсовской точки.

3. Любое дисперсионное уравнение, полученное в электродинамике, физике плазмы, твердого тела и др. областях, необходимо исследовать на предмет наличия (или

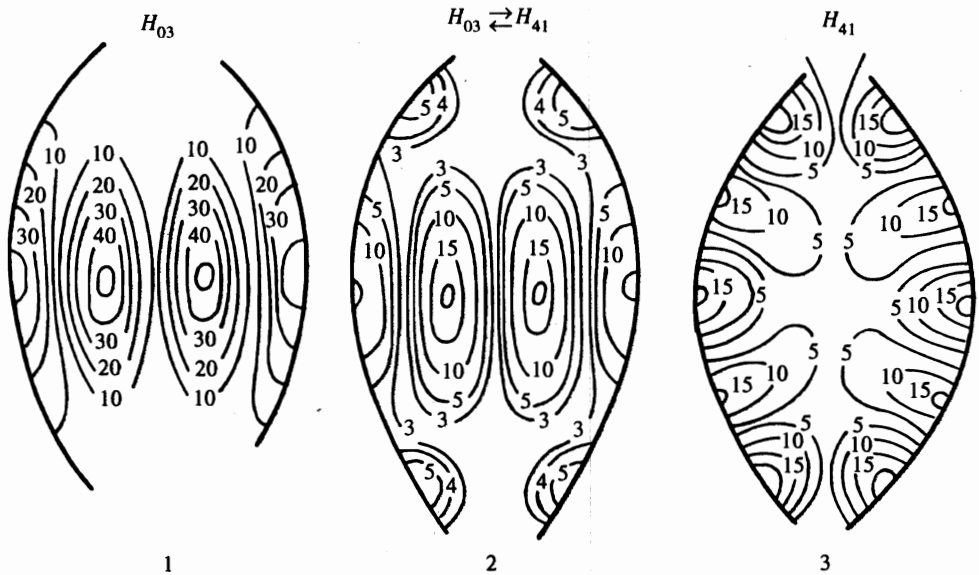


Рис. 3. Распределение  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -колебаний поля открытого резонатора вблизи морсовской точки (2 — междутиповые колебания  $H_{03} \leftrightarrow H_{41}$  в морсовской точке)

отсутствия) морсовских точек и вытекающих отсюда возможностей существования междутиповых колебаний. Следует отметить, что метод исследования морсовских точек, в котором функция  $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$ , определяющая дисперсионное уравнение  $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$ , зависит от двух комплексных переменных,  $\kappa$  и  $\chi$ , распространяется на случай, когда в качестве независимых переменных выступают три величины и более (например, частота, проекция волнового вектора на одну из осей и один из управляющих параметров).

#### 4. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ГЕНЕРАТОРА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Сложная открытая электродинамическая структура и наличие распределенного потока электронов приводит к дополнительным трудностям в изучении нелинейных эволюционных процессов в генераторах дифракционного излучения. Привлекаемые к построению теории таких генераторов экспериментальные данные прежде всего должны подтвердить тот факт, что в открытом резонаторе генератора существует морсовская критическая точка и вблизи нее наблюдаются те же дисперсионные закономерности и междутиповые колебания, что и в простейшем резонаторе, изученном в разд. 2 и 3, а также появляются новые качества процесса, связанные с электронным потоком.

1. Приведем экспериментальные данные по изучению поведения открытого резонатора вблизи морсовской точки [10]. Измерения проведены на стандартной экспериментальной установке, подробно описанной в [3]; ее схематическое изображение представлено на рис. 4. Резонатор образован плоским (с апертурой 60 мм) и сферическим (радиус  $a = 60$  мм) зеркалами. В центре зеркала расположена дифракционная решетка-

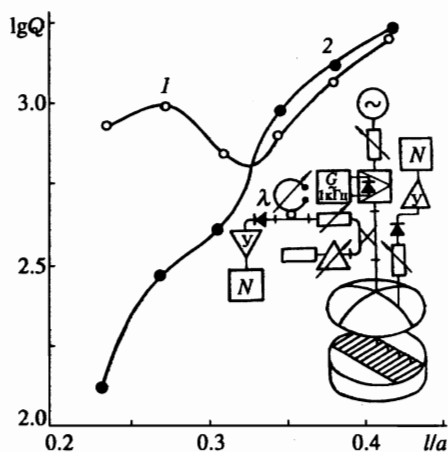


Рис. 4. Экспериментальные дифракционные потери в открытом резонаторе генератора дифракционного излучения для колебаний квази- $TEM_{20q}$  (кривая 1) и квази- $TEM_{40q}$  (кривая 2) и блок-схема экспериментальной установки

ка с периодом  $d = 0.4$  и шириной 10 мм. Канавки имеют ширину 0.14 мм и глубину  $h = 0.86$  мм. Резонатор возбуждается клистроном в четырехмиллиметровом диапазоне через щель связи в сферическом зеркале. Настройки резонатора осуществляются перемещением плоского зеркала вдоль оси резонатора. Сигнал из резонатора выводится с помощью второго щелевого элемента связи, расположенного на сферическом зеркале. Расстояния между зеркалами  $l$ .

Согласно принятой классификации основным типом колебаний в исследуемом резонаторе будут колебания квази- $TEM_{20q}$ , где  $q$  — число полуволн между зеркалами. Экспериментально обнаружены междутиповые колебания квази- $TEM_{20q}$  и квази- $TEM_{40q}$ , где квази- $TEM_{40q}$  — первое высшее колебание открытого резонатора. При этом установлено, что при  $\chi = l/a = 0.324$  со стороны больших  $l$  доминирующим является колебание квази- $TEM_{40q}$  (с высокой добротностью); после этой точки колебание квази- $TEM_{40q}$  резко затухает (падает добротность), в то время как колебание квази- $TEM_{20q}$  становится высокодобротным. Как видно, имеет место схема преобразований междутиповых колебаний, обнаруженных теоретически для простейшего открытого резонатора. Следовательно, эти изменения позволяют утверждать, что при  $\chi_0 = 0.324$  обнаружена морсовская критическая точка. Представленная на рис. 4 зависимость добротности для колебаний квази- $TEM_{20q}$  (кривая 1) и квази- $TEM_{40q}$  (кривая 2) подтверждает факт существования при  $\chi_0 = 0.324$  морсовской точки.

2. На рис. 5 представлена дисперсионная кривая открытого резонатора генератора дифракционного излучения вблизи морсовской точки ( $\chi_0 = 0.324$ ). Она получена для колебаний квази- $TEM_{20q}$  и квази- $TEM_{40q}$  путем определения резонансного расстояния  $l$  для конкретного значения  $q$ . При этом отношение  $l/a$  выбирается таким, чтобы резонансное расстояние для колебаний квази- $TEM_{20q}$  и квази- $TEM_{40q}$  при неизменном  $q$  находилось по обеим сторонам от выбранного  $\chi_0$ . После этого волномером определяется длина волны  $\lambda$  исследуемых колебаний. При  $\chi_0 = 0.324$  модуль разности собственных длин волн становится минимальным (рис. 5), а добротности колебаний (рис. 4) совпадают. При переходе через морсовскую точку колебания взаимопреобразуются и обмениваются энергиями; при дальнейшем уменьшении  $l/a$  ветви дисперси-

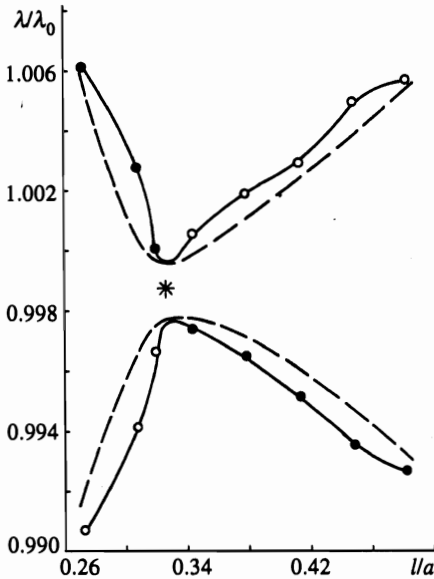


Рис. 5. Экспериментальные дисперсионные кривые (сплошные линии) открытого резонатора генератора дифракционного излучения (штрихи — теория) вблизи морсовской точки (звездочка) для колебаний квази- $TEM_{20q}$  (○) и квази- $TEM_{40q}$  (●)

онных кривых расходятся. Следовательно, измерения дисперсии в открытом резонаторе генератора также подтверждает наличие при  $\chi_0 = 0.324$  морсовской точки. На рис. 5 штрихами изображена дисперсионная кривая, построенная согласно (13), (14).

3. С помощью метода пробного тела определена структура полей междутиповых колебаний. Установлено, что вдали от морсовской точки колебания представляются в чистом виде: при  $l/a = 0.413$  — это квази- $TEM_{4011}$ , а при  $l/a = 0.410$  — квази- $TEM_{2012}$ . По мере уменьшения расстояния между зеркалами резонатора первым начинает изменяться колебание квази- $TEM_{4010}$  ( $l/a = 0.377$ ) — это первый высший тип колебания открытого резонатора: оно имеет больший размер «пятна» поля на зеркале, чем колебание квази- $TEM_{2011}$  ( $l/a = 0.375$ ). При приближении к морсовской точке колебание квази- $TEM_{409}$  ( $l/a = 0.342$ ) превращается в квази- $TEM_{2010}$  ( $l/a = 0.341$ ); у него наблюдается расширение «пятна» поля. Между этими колебаниями начинается интенсивный обмен энергией. После перехода через морсовскую точку происходит взаимное преобразование типов колебаний. Так, колебание квази- $TEM_{409}$  преобразуется в квази- $TEM_{209}$  ( $l/a = 0.307$ ), а колебание квази- $TEM_{2010}$  — в квази- $TEM_{408}$  ( $l/a = 0.304$ ).

4. Проведенные экспериментальные исследования показывают, что в открытом резонаторе с дифракционной решеткой существует взаимодействие между двумя типами колебаний при изменении расстояния между зеркалами. При этом существенно, что рабочий тип колебаний становится более высокодобротным. Это приводит к увеличению эффективности взаимодействия электронного потока с полем открытого резонатора.

Теперь можно утверждать, что теория морсовских критических точек, развитая для простейшего открытого резонатора, распространяется также и на сложный резонатор генератора дифракционного излучения, что позволяет до конца провести исследования по построению нелинейных эволюционных уравнений для такого генератора.

## 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Полученные в разд. 2–4 результаты о свойствах открытых электродинамических структур вблизи морсовских критических точек являются основой для построения нелинейных эволюционных уравнений генератора дифракционного излучения. Следует, однако, понять их с позиций нелинейной динамики. Кроме того, необходимо также определить влияние электронного потока на возбуждение колебаний в генераторе и установить особенности их непрерывной генерации.

1. Как известно [11], в нелинейных системах нелинейный бистабильный элемент (триггер) определяется нелинейным взаимодействием элементов системы. Триггер обладает двумя стационарными устойчивыми состояниями, в каждом из которых он может находиться неограниченно долго, и только внешние воздействия могут переводить его из одного состояния в другое. Рассмотрим с этих позиций поведение линейных стационарных колебаний в открытом резонаторе вблизи морсовской точки. Для этого воспользуемся рис. 2, 3 и 5. Как видно из рис. 2а (и рис. 5) существуют две ветви дисперсионных кривых, определяемых решением дисперсионного уравнения (13). Ограничиваясь верхней ветвью, можно отметить, что от точки 1 до морсовской точки 2 имеет место аномальный, а от морсовской точки 2 до точки 3 — нормальный законы дисперсии. Следовательно, в морсовской точке аномальный закон дисперсии уступает место нормальному. Как видно из рис. 3, это приводит к соответствующему поведению линейных колебаний в распределенных системах: при изменении несспектрального параметра возникает цепочка колебаний, два из которых устойчивы, а одно — неустойчиво. Устойчивые колебания определяются регулярными законами дисперсии; неустойчивое колебание — законом дисперсии вблизи морсовской точки. Будем, как это принято в теории нелинейных колебаний, линейные колебания, соответствующие регулярным точкам спектра, связывать с линейными моностабильными колебаниями. Их удобно представить в виде линейного моностабильного элемента («лимэл»); им соответствуют точки 1, 3 на рис. 2а и соответствующие этим точкам распределения полей на рис. 3. Из рис. 2б видно, что лимэл 1 — высокочастотное  $H_{03}$ -колебание конфокального открытого резонатора (будем его называть большой лимэл), а лимэл 3 — низкочастотное  $H_{41}$ -колебание (малый лимэл). Лимэлы — невзаимодействующие элементы; они могут быть вещественными или комплексными; их теория хорошо разработана.

Вблизи морсовской точки линейные колебания взаимодействуют, образуя гибридное неустойчивое (нестабильное) колебание, которое при вариации несспектрального параметра превращается в два стабильных (обычно высокочастотное и низкочастотное) колебания. Колебание вблизи морсовской точки будем определять как линейный бистабильный элемент («либэл»). Вблизи морсовской точки происходит преобразование либэла в два лимэла по схеме: большой лимэл → гибридный либэл → малый лимэл.

Таким образом, в линейных колебательных распределенных системах (так же как и в сосредоточенных) наряду с невзаимодействующими (лимэлами) существуют и взаимодействующие (либэлы) колебания. Ясно, это природа либэлов (и лимэлов) определяется дисперсионными свойствами линейной колебательной системы. В этом отношении либэл отличается от триггера, хотя и для либэла переход от одного стационарного состояния в другое осуществляется внешним воздействием; бистабильное же состояние либэла — чисто дисперсионное явление.

2. При изучении нелинейных эволюционных процессов и, в частности, при по-

строении нелинейных эволюционных уравнений для генератора дифракционного излучения существенным является утверждение, что генерация колебаний тесно связана с состоянием открытых электродинамических структур вблизи морсовских точек. Первый шаг в построении нелинейного эволюционного уравнения связан с собственными нелинейными нестационарными колебаниями, которые могут возникнуть в открытом резонаторе вблизи морсовской точки. С этой целью необходимо воспользоваться дисперсионным уравнением (13), разрешенным относительно  $\tilde{\kappa}$ , и заменить безразмерную собственную частоту оператором дифференцирования по времени, т. е.  $\tilde{\kappa} \sim id/d\tau$ , где  $\tau$  — безразмерное время, связанное с истинным временем  $t = (l/c)\tau - t_0$  ( $t_0$  — время, необходимое для покрытия расстояния  $l$  между зеркалами резонатора). В результате получим линейные эволюционные уравнения для открытого резонатора вблизи морсовской точки в виде

$$\frac{du}{d\tau} + \alpha(\tilde{\chi})u = 0,$$

где  $\alpha(\tilde{\chi}) = \pm \sqrt{\tilde{\chi}^2 + \delta}$ , а знаки « $\pm$ » связаны с колебаниями, соответствующими верхней и нижней ветвям дисперсионных кривых, изображенных на рис. 2а (или рис. 5). Функция  $u(\tau)$  — комплекснозначная, дважды непрерывно дифференцируемая в  $\mathbb{R}^2$  функция переменной  $\tau$ . Необходимо также иметь в виду, что для распределенных структур величина  $u$ , являясь напряженностью электромагнитного поля, зависит, как это видно из рис. 3, в случае двумерного открытого резонатора и от пространственных координат.

Если считать, что  $\alpha$  зависит от  $u$ , т. е.  $\alpha(u)$  — вещественная аналитическая функция, определенная на полуоси  $\mathbb{R}^1$ , то ее разложение для малых  $u$  в ряд Тейлора в окрестности начала координат имеет вид  $\alpha(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u^2 + \dots$  (равенство нулю коэффициентов при первой степени вытекает из аналитичности  $\alpha(u)$ ), где  $\alpha_0 = \alpha_0(\tilde{\chi})$ ,  $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{\chi})$ . Теперь нелинейное эволюционное уравнение вблизи морсовской точки для открытого резонатора имеет следующий вид:

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha_0(\tilde{\chi})u - \alpha_1(\tilde{\chi})u^3. \quad (15)$$

Здесь мы ограничились случаем нелинейных колебаний, протекающих в соответствии с дисперсией, описываемой верхней дисперсионной кривой на рис. 2а (для нижней кривой необходимо в правой части изменить знак). Наиболее существенным в (15) является зависимость  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  от управляющего параметра  $\tilde{\chi}$ , определяющего настройку резонатора. Не менее важным представляется вопрос о времени протекания нелинейных процессов вблизи морсовской точки. По-видимому, оно определяется выполнением схемы большой лимэл  $\rightarrow$  гибридный либэл  $\rightarrow$  малый лимэл и может быть установлено при более тщательном изучении дисперсионных кривых рис. 2 и 3 совместно с рис. 5, что позволит найти время «подхода» к морсовской точке (точка 1 на дисперсионной кривой рис. 2а) и «выхода» из области морсовской точки (точка 3 на рис. 2а). Найденное таким способом время пребывания колебательной системы вблизи морсовской точки позволит определить начальные (и конечные) данные для искомой функции  $u(\tau)$  из (15).

3. Следующий шаг в построении нелинейного эволюционного уравнения для генератора дифракционного излучения — учет влияния электронного потока при возбуждении открытого резонатора и процесса непрерывной генерации. Для этого качественно рассмотрим поведение электронного потока в открытой электродинамической структуре генератора дифракционного излучения.

Как известно [3], открытая система генератора возбуждается дифракционным излучением, возникающим при равномерном и прямолинейном движении потока электронов вблизи дифракционной решетки. Для дальнейшего анализа дифракционную решетку удобно представить в виде периодической последовательности открытых волноводов, в простейшем случае являющейся отрезком замедляющей системы, покрывающей часть нижнего зеркала резонатора. Дисперсионное уравнение системы имеет вид

$$\frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{1 + \frac{g^2}{d^2} \operatorname{tg}^2 \left( \pi \frac{h}{\lambda_0} \right)},$$

где  $v_{ph}$  — фазовая скорость поверхностных волн;  $d$  и  $g$  — период и ширина решетки,  $h$  — глубина канавок,  $\lambda_0$  — длина волны в свободном пространстве. Дисперсионная кривая для этого уравнения аналогична представленной на рис. 2а; в морсовской точке (т.е. при  $v_{ph} \rightarrow c$ ) происходит изменение типов дисперсии: аномальная дисперсия уступает место нормальной. Для электронного потока с такой дисперсией процесс смещения электронов, захваченных волной, напоминает движение жидкости по трубе с расширяющимся диаметром. В точках 1 и 3 на рис. 2а при равенстве энергий замедленная волна дифракционной решетки захватывает различное число электронов из потока. Если указанные точки 1 и 3 соответствуют одному и тому же приращению потенциала (т.е. к потоку электронов приложено постоянное электростатическое поле  $\mu$ ), то согласно закону сохранения импульса и указанных выше условий изменение скорости движения электронов в точке 1 на рис. 2а будет больше, чем в точке 3. В самой морсовской точке возникает такое состояние нелинейного колебательного процесса, когда имеет место дисперсия с ее противоположными типами. При этом в действие вступает параметрический эффект, сопровождающийся смещением частоты вблизи морсовской точки (это явление было исследовано экспериментально [12]). Следовательно, приложенное к электронному потоку постоянное электрическое поле упорядочивает его движение, а также создает предпосылки для образования дифракционного излучения, которое за счет параметрического эффекта, возникающего вблизи морсовской точки открытой электродинамической системы, усиливается и превращается в непрерывную генерацию электромагнитных колебаний.

Проведенные качественные рассуждения о роли электронного потока в работе генератора можно представить феноменологическим введением в нелинейное уравнение (15) постоянного параметра  $\mu$ . В результате имеем

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha_0(\bar{\chi})u - \alpha_1(\bar{\chi})u^3 + \mu. \quad (16)$$

Наличие постоянного коэффициента  $\mu$  в (16), являющегося вторым управляющим параметром генератора, носит принципиальный характер, поскольку (16) коренным образом отличается от (15) хотя бы потому, что (15) определяет однородное нелинейное эволюционное уравнение, а (16) — неоднородное.

## 6. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим (16) с позиции его структурной устойчивости. В связи с этим еще раз отметим, что электродинамическая структура генератора дифракционного излучения

является открытой, т.е. диссипативной системой. Диссипация энергии из открытой системы происходит не за счет тепловых, а благодаря чисто дифракционным потерям. Поэтому при анализе (16) можно изучать бифуркации в рамках простой диссипативной системы. При этом также необходимо иметь в виду, что (15), а следовательно, и (16) отличаются от уже известных уравнений [13] тем, что управляющие параметры зависят от введенных еще при решении линейных спектральных задач величин, определяющих настройку резонатора (величина  $\chi = l/a$ ).

1. Проведем сначала качественное исследование нелинейного эволюционного уравнения (15). В нем скорость изменения  $u$  является линейной функцией параметра  $\gamma = \alpha_0(\tilde{\chi})\alpha_1^{-1}(\tilde{\chi})$ . Стационарное состояние уравнения (15) определяется из уравнения  $-u_s^3 + \gamma u_s = 0$ , одно из тривиальных решений которого  $u_0 = 0$  и два нетривиальных:  $u_{\pm} = \pm\sqrt{\gamma}$  (физический смысл будут иметь также  $u_{\pm}$ , для которых  $\gamma > 0$ ). Решения  $u_{\pm}$  сливаются с  $u_0$  при  $\gamma = 0$  и разветвляются от него при  $\gamma > 0$ . Как известно, это явление называется бифуркацией. Изучение устойчивости колебаний в открытой системе можно провести полностью, имея в виду, что уравнение (15) допускает точное решение; в зависимости от знака  $\gamma$  решение  $u_0$  является глобально асимптотически устойчивым (при  $\gamma < 0$ ) и неустойчивым (при  $\gamma > 0$ ). Что же касается решений  $u_{\pm}$ , то они просто асимптотически устойчивы. Ясно, что  $u_{\pm}$  появляются в результате бифуркации в тот момент, когда состояние  $u_0 = 0$  теряет устойчивость, хотя сами решения  $u_{\pm}$  устойчивы. В окрестности точки бифуркации  $\gamma = 0$  плавная динамика приводит к особенности решений  $u_{\pm}$ , т.е.  $u_{\pm}$  зависят от  $\gamma$  не аналитически, что и определяет качественное изменение поведения открытой системы генератора дифракционного излучения, обусловленное явлением бифуркации.

Эти рассуждения вытекают из анализа классической бифуркации [13]. В рассматриваемой здесь нелинейной динамике проблема осложняется тем, что классический управляющий параметр  $\gamma$  сам является управляемым посредством  $\tilde{\chi}$ , т.е.  $\gamma = \gamma(\tilde{\chi})$ . Поэтому при качественном анализе бифуркаций в открытой системе генератора необходимо учитывать, что в уравнении (15)  $\gamma$  зависит от  $\tilde{\chi}$ , и эту связь следует увязывать с поведением системы в условиях линейного стационарного процесса. Теперь мы должны иметь в виду, что сами бифуркации проявляются при специфической дисперсии вблизи морсовской точки. Это значит, что характер решения  $u_{\pm}(\gamma, \tau)$  определяется не только эволюцией во времени ( $\tilde{\kappa} \sim id/d\tau$ ,  $\tilde{\kappa} = \pm\sqrt{\tilde{\chi}^2 + \delta}$ ), но и  $\tilde{\chi}$ . В этой связи необходимо еще раз обратиться к рис. 2а и 3. С их помощью можно установить начальные условия для исследуемого нелинейного процесса, через которые определяются  $\alpha_0(\tilde{\chi})$  и  $\alpha_1(\tilde{\chi})$ , а значит, и  $\gamma$ . После этого уже можно проводить дальнейшее исследование нелинейного уравнения (15). Отметим только, что в рамках изучения свободных нелинейных колебаний в открытой системе генератора согласно (15) становится ясной роль лимэлов и либэлов: они являются физической линейной «предысторией» возникающих бифуркаций и в какой-то мере их предопределяют.

2. Рассмотрим теперь уравнение (16). В отличие от (15) в (16) имеем задачу о нелинейном процессе с двумя управляющими параметрами. Условия стационарности уравнения (16) определяются из кубического уравнения

$$-u_s^3 + \gamma u_s + \bar{\mu} = 0, \quad \bar{\mu} = \mu\alpha_1^{-1}(\tilde{\chi}).$$

Корни этого уравнения

$$u_{s1} = p + q, \quad u_{s2,3} = -\frac{1}{2}(p + q) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(p - q),$$



где

$$p = \left( -\frac{1}{2}\bar{\mu} + \sqrt{\frac{1}{4}\bar{\mu}^2 + \frac{1}{9}\gamma^3} \right)^{1/3}, \quad q = \left( \frac{1}{2}\bar{\mu} - \sqrt{\frac{1}{4}\bar{\mu}^2 + \frac{1}{9}\gamma^3} \right)^{1/3},$$

в качестве  $p$  берется любое из значений корня, а для  $q$  — значение корня, для которого  $pq = -\gamma/3$ . Для нас важно наличие трех действительных решений кубического уравнения, причем выбором  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$  можно добиться слияния трех решений в одно действительное. Взаимосвязь двухпараметрических режимов нелинейного эволюционного процесса можно определить с помощью уравнения  $4\gamma^3 + 27\bar{\mu}^2 = 0$ , из которого следует существование трех вещественных корней кубического уравнения, заканчивающихся в точке  $\gamma = \bar{\mu} = 0$ , в которой зависимость  $\gamma$  от  $\bar{\mu}$  имеет особенность типа острия.

Можно проследить зависимость  $u_s$  от  $\bar{\mu}$  при фиксированном  $\gamma$ . Как известно, это приводит к S-образной кривой, связанной с множественностью решений при изменении параметра  $\bar{\mu}$ . При этом две ветви оказываются устойчивыми одновременно. Возникающая бистабильность в предельных точках  $\bar{\mu}_1$  и  $\bar{\mu}_2$  является причиной гистерезиса.

Зависимость  $u_s(\gamma)$  при фиксированном  $\bar{\mu}$  приводит к двум кривым, одна из которых имеет особенность типа предельной точки. Соответственно получаются устойчивое и бистабильное состояния колебательного процесса в открытой электродинамической системе генератора дифракционного излучения.

Существенно, что если уравнение (15) определяет симметричную бифуркацию, то (16) при любом сколь угодно малом  $\bar{\mu}$  такой бифуркации не обеспечивает. Следовательно,  $\bar{\mu}$  играет роль «разрушителя» симметричной бифуркации.

Проведенные рассуждения относительно уравнения (16) хорошо известны [13] за исключением того, что два управляющих параметра в (16) сами зависят от управляющего параметра  $\tilde{\chi}$ . Поэтому выводы об эффективности работы генератора дифракционного излучения связаны именно с этой проблемой.

## 7. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

«Исторический» процесс возникновения непрерывной генерации когерентных колебаний в генераторе связан с тремя следующими один за другим во времени сценариями: образованием шумового электронного облака при извлечении электронов из термокатода; превращением его в прикатодной области в хаотический детерминированный поток частиц и, наконец, преобразованием этих частиц с помощью положительной обратной связи (т. е. открытой электродинамической системы) и приложенного постоянного электрического поля в высокоорганизованный коллектив частиц, продуцирующий дифракционное излучение, запитывающее открытый резонатор генератора. Проведенный анализ уравнения (16) касается последнего сценария.

1. Для того чтобы понять роль уравнения (16) при изучении нелинейных процессов в генераторе, следует обратить внимание на поведение электронного потока в пространстве взаимодействия открытой электродинамической системы. Прежде всего надо иметь в виду, что в миллиметровом и особенно субмиллиметровом диапазонах волн используемый поток электронов должен быть плоским, очень тонким и большой плотности. В таком потоке за счет кулоновского расталкивания, волн пространственного

заряда и др. возникают сильные флуктуации электронов в потоке, их оседание на дифракционной решетке и т. д. Все это заставляет наряду с «тянущим» постоянным полем, приложенным к электронному потоку, использовать продольное постоянное магнитное поле, фокусирующее поток. Тем не менее электроны должны пролетать вблизи дифракционной решетки (в реальном генераторе двухмиллиметрового диапазона зазор между решеткой и электронным потоком составляет  $\sim 0.1$  мм). Если учесть, что ток  $\sim 0.1$  А, а приложенное напряжение 3–5 кВ, то рассеиваемая на решетке (суммарная площадь рассеяния  $\sim 1.5$  см<sup>2</sup>) тепловая энергия  $\sim 500$  Вт. Для прибора в целом это очень трудный тепловой режим. Требуется принудительное (водяное) охлаждение генератора. Тем не менее тепловые флуктуации, возникающие на решетке и нижнем зеркале резонатора, таковы, что в коротковолновых частях миллиметрового и особенно субмиллиметрового диапазонов волн они приводят к заметным механическим флуктуациям в корпусе действующего прибора, которые в конечном счете влияют на величину  $\chi = l/a$  и, следовательно, на  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$  в (16).

Поэтому даже в стационарном режиме работы генератора амплитуда и частота колебаний непрерывно изменяются за счет многочисленных внутренних и внешних дестабилизирующих факторов, влияние которых на СВЧ-сигнал генератора тем меньше, чем более узкополосными являются используемые в генераторе открытые системы. Обычно флуктуационные параметры генератора определяются анализом возбуждения «шумовых» объемных колебаний и их воздействием на поток электронов. При этом излучение шумовых волн обусловлено изменениями всех указанных выше параметров генератора. Задача заключается в установлении взаимосвязи указанных процессов со структурной устойчивостью динамической системы, определяемой уравнением (16).

2. Мы уже отмечали, что в (16) роль параметра  $\bar{\mu}$ , даже при  $\bar{\mu} = \text{const}$ , сводится к разрушению симметричной бифуркационной диаграммы. В этом случае неразличимые устойчивые ветви  $u_{\pm}$  решения уравнения (15) ( $\bar{\mu} = 0$ ) при  $\bar{\mu} \neq 0$  становятся разделенными, и при возрастании  $\gamma$  система остается на ветви  $u_+$ , если не появится флуктуация, которая ее переводит в состояние  $u_-$ . Таким образом, в (16) при  $\bar{\mu} \neq 0$  и изменении  $\gamma$  между  $u_+$  и  $u_-$  появляется зазор  $\Delta(\bar{\mu})$ , природа которого определяется  $\bar{\mu}$ . Для нелинейной динамической системы величина  $\Delta(\bar{\mu})$ , возникающая из (16), дает возможность описывать ее поведение вблизи точки бифуркации [13].

В какой мере «чувствителен» генератор при наличии указанных выше флуктуаций к изменению  $\bar{\mu}$ , т. е.  $\Delta(\bar{\mu})$ ? Как показано в [13], для малых флуктуаций имеем  $\Delta(\bar{\mu}) = 3(4\bar{\mu})^{1/3}/2$  при  $\bar{\mu} = \text{const}$ . Тот факт, что  $\Delta \sim \bar{\mu}^{1/3}$ , является определяющим, поскольку приложенное к электронному потоку электростатическое поле может флуктуировать в пределах  $\bar{\mu} \sim 10^{-6}$ , что дает  $\Delta \sim 10^{-2}$ , и следовательно, в (16) эта величина способна конкурировать с макроскопическими явлениями, т. е. она может быть сравнима с  $\gamma$  в зазоре  $\Delta$ , т. е.  $\gamma_{\Delta}$ . В [13] установлено, что  $\gamma_{\Delta} = 3(\bar{\mu}^2/4)^{1/3}$  ( $\gamma_{\Delta}$  — минимальное расстояние между решениями  $u_+$  и  $u_-$  уравнения (15)), и эта величина дает различие между  $u_+$  и  $u_-$  при значении  $\gamma = 0$ , которое соответствует бифуркации.

Из эксперимента для генератора дифракционного излучения в четырехмиллиметровом диапазоне известно, что паразитные модуляции в мощности генерации и спектре излучаемых частот возникают в полосе 1–100 кГц. Эти искажения вызваны всеми теми флуктуациями, о которых говорилось выше. Существенно, что при этом  $\gamma_{\Delta} \sim 10^{-2}$ .

Таким образом, в (16) для  $-u_s^3 + \gamma u_s + \bar{\mu} = 0$  можно считать, что в реально действующих генераторах  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$  имеют разумные порядки величин, позволяющие установить устойчивую работу прибора. Все эти рассуждения справедливы для области дисперсии

вдали от морсовской точки (рис. 2а или 5 вдали от точек 1 и 3).

Однако главная особенность развиваемой здесь теории заключается в том, что анализ уравнения (16) применительно к генератору дифракционного излучения следует вести, имея в виду, что  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$  — функции от  $\bar{\chi}$ . Ясно, что все сказанное для случая, когда  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$  не зависят от  $\bar{\chi}$ , может быть связано с работой генератора при  $\bar{\chi} = \text{const}$ . Если же  $\bar{\chi}$  изменяется за счет разнообразных флуктуаций в открытой системе и электронном потоке, то теперь анализ уравнения (16) значительно усложняется. Облегчающим обстоятельством при этом является возможность проведения предварительного анализа работы генератора с использованием результатов разд. 1 и 2, связанных с линейными стационарными процессами в приборе. Уравнение же (16) должно обосновывать поведение открытой системы и потока электронов в условиях возникновения высокочастотных колебаний резонатора, изображенных на рис. 3 (случай 1), или низкочастотных колебаний (см. рис. 3, случай 3) при существовании междутиповых колебаний (рис. 3, случай 2). Это значит, что в схеме большой лимэл  $\rightarrow$  гибридный лимэл  $\rightarrow$  малый лимэл, которая отражает вблизи морсовской точки линейный стационарный процесс в резонаторе, уравнение (16) должно подтверждать, что генераторы дифракционного излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах работают в режиме большого лимэла. Само же уравнение (16) отражает «борьбу» между большими и малыми лимэлами (через гибридный лимэл) и показывает, что в ней побеждает большой лимэл.

Следовательно, при правильно выбранных  $\gamma$  и  $\bar{\mu}$ , зависящих от  $\bar{\chi}$ , в нелинейном процессе вблизи бифуркации возникающие колебания являются глобально асимптотически устойчивыми. Это обеспечивает высокую кратковременную стабильность (до  $10^{-10}$ ) работы генератора, низкий уровень фазовых шумов и малую паразитную девиацию частоты. Реализация определенных методов синхронизации частоты и стабилизации мощности позволяет довести длительную стабильность частоты генератора до  $5 \cdot 10^{-10}$ , а изменения мощности выходного сигнала до  $\leq 1\%$  (эта стабильность сохраняется в течение нескольких часов работы при уровне выходной непрерывной мощности генератора до 10 Вт в четырехмиллиметровом диапазоне волн). Такие качества генераторов дифракционного излучения позволяют использовать их при разработке спектрометров сверхвысокого разрешения, в диагностике термоядерной плазмы, диэлектromетрии поглощающих объектов, спектроскопии поляризованных ядерных мишеней, высококогерентной локации и др.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый здесь подход в изучении генераторов дифракционного излучения может быть перенесен и на другие СВЧ-приборы вакуумной электроники: лампы обратной волны, клистроны, магнетроны, мазеры на циклотронном резонансе и лазеры на свободных электронах. Схема построения нелинейных эволюционных уравнений (16) и (15) для этих приборов та же, что и для генераторов дифракционного излучения: решение линейной спектральной задачи для данной структуры; поиски морсовской критической точки; построение дисперсионного уравнения вблизи морсовской точки; построение и анализ нелинейного эволюционного уравнения; связь с экспериментом. Различие будет заключаться в поисках управляющих параметров. Их минимальное количество, как и в генераторе дифракционного излучения, два: один управляет структурой, другой — электронным потоком. Так же как и в генераторе дифракционного излучения,

эти параметры сами зависят от свойств структуры и электронного потока.

Представленный метод построения нелинейных эволюционных уравнений можно распространить в физико-химические, биологические и др. области исследований сложных нелинейных процессов.

Данная работа поддержана Международной соросовской программой просвещения в области точных наук (ISSEP), грант № EPU052028.

## Литература

1. В. П. Шестопапов, ДАН **261**, 5 (1981).
2. В. Г. Курин, Б. К. Скрынник, В. П. Шестопапов, ЖЭТФ **110**, 8 (1996).
3. В. П. Шестопапов, *Дифракционная электроника*, Изд-во Харьковского ун-та, Харьков (1976).
4. В. П. Шестопапов, *Спектральная теория и возбуждение открытых структур*, Наук. думка, Киев (1987).
5. В. П. Шестопапов, *Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции*, Изд-во Харьковского ун-та, Харьков (1971).
6. В. П. Шестопапов, *Морсовские критические точки дисперсионных уравнений*, Наук. думка, Киев (1992).
7. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных*, Наука, Москва (1976).
8. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, Наука, Москва (1982).
9. M. Morse, Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 72 (1931).
10. И. К. Кузьмичев, В. П. Шестопапов, Докл. НАН Украины **12**, 87 (1996).
11. Ю. А. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Введение в синергетику*, Наука, Москва (1990).
12. В. Г. Курин, Б. К. Скрынник, В. П. Шестопапов, Письма в ЖТФ **21**, 5 (1995).
13. Г. Николис, И. Пригожин, *Познание сложного*, Мир, Москва (1990).