

## ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ $d = 4 - \epsilon$

И. М. Сулов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 ноября 1996 г.

Получены асимптотически точные результаты для средней функции Грина и плотности состояний электрона в гауссовском случайном потенциале для размерности пространства  $d = 4 - \epsilon$  во всей области энергий, включая окрестность порога подвижности. При  $N \sim 1$  ( $N$  – порядок теории возмущений) учитываются лишь паркетные члены, соответствующие старшим степеням  $1/\epsilon$ . При больших  $N$  учитываются все степени  $1/\epsilon$  с вычислением коэффициентов при них в главной асимптотике по  $N$ . Это вычисление проводится путем комбинирования условия перенормируемости теории с асимптотикой Липатова.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно общепринятым представлениям [1, 2], одноэлектронная плотность состояний не имеет особенности в точке перехода Андерсона в отличие от проводимости и радиуса локализации волновых функций [3–6]. Тем не менее ее вычисление имеет принципиальное значение, так как все известные методы отказывают в окрестности перехода. Кроме того, плотность состояний и проводимость, определяемые соответственно средней функцией Грина  $\langle G(x, x') \rangle$  и коррелятором  $\langle G^R G^A \rangle$ , не являются вполне независимыми. Исследование в паркетном приближении показывает [7], что математические трудности в обоих случаях имеют одну природу и связаны с проблемой «ложного» полюса. С другой стороны, для удовлетворения тождества Уорда, связывающего собственно-энергетическую часть с неприводимой вершиной, входящей в уравнение Бете–Солпитера [8], требуется строгое соответствие диаграмм, учитываемых при вычислении проводимости и плотности состояний: это обстоятельство не контролируется ни в одной из существующих теорий [7] за исключением недавно предложенной в [9].

Для слабого беспорядка порог подвижности лежит в окрестности затравочной границы спектра, в которой случайный потенциал может считаться гауссовским ввиду возможности усреднения по масштабам, малым по сравнению с длиной волны электрона, но большим по сравнению с расстоянием между рассеивателями (так называемый гауссовский участок спектра [10]). Вычисление средней функции Грина для уравнения Шредингера с гауссовским случайным потенциалом сводится к задаче о фазовом переходе второго рода с  $n$ -компонентным параметром порядка  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  в пределе  $n \rightarrow 0$  [11, 12]. При этом коэффициенты в гамильтониане Гинзбурга–Ландау

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \left( \frac{1}{2} c |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{4} u |\varphi|^4 \right) \quad (1)$$

связаны с параметрами неупорядоченной системы соотношениями

$$c_0 = 1/2m, \quad \kappa_0^2 = -E, \quad u = -a_0^d W^2/2, \quad (2)$$

где  $d$  — размерность пространства,  $m$  и  $E$  — масса и энергия частицы,  $a_0$  — постоянная решетки,  $W$  — амплитуда случайного потенциала (в дальнейшем полагаем  $c_0 = 1$ ). «Неправильный» знак коэффициента при  $|\varphi|^4$  приводит к неприменимости обычной теории среднего поля и необходимости флуктуационного рассмотрения [11, 13] во всей области параметров; функциональные интегралы при  $u < 0$  понимаются в смысле аналитического продолжения с положительных  $u$ , которое для запаздывающей функции Грина проводится через нижнюю полуплоскость [12].

Настоящая работа завершает программу построения  $(4 - \epsilon)$ -разложения, начатую в работах [14–16]. Размерность пространства  $d = 4$  выделена для гамильтониана (1) из соображений перенормируемости: при  $d > 4$  теория перенормируема и дискретность решетки имеет принципиальное значение, обеспечивая наличие параметра обрезания  $\Lambda \sim a_0^{-1}$  на больших импульсах [14]; при  $d = 4$  имеет место логарифмическая ситуация, допускающая существование как перенормируемых [15], так и перенормируемых моделей [16]; при  $d < 4$  теория перенормируема при помощи одного вычитания и возможен переход к континуальному пределу  $a_0 \rightarrow 0$ ,  $a_0^d W^2 \rightarrow \text{const}$ . Использование упрощений, возникающих при высоких размерностях, для построения  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории требует последовательного рассмотрения всех четырех перечисленных типов теорий; это сделано соответственно в [14–16] и настоящей работе. В кратком изложении результаты работы опубликованы в [17].

## 2. СТРУКТУРА ПРИБЛИЖЕНИЯ

Вычисление средней функции Грина  $\langle G(p, \kappa) \rangle$  ( $p$  — импульс,  $\kappa$  — перенормированное значение величины  $\kappa_0$ ) стандартным способом сводится к вычислению собственной энергии  $\Sigma(p, \kappa)$ , для которой структура ряда теории возмущений в четырехмерном пространстве при  $p = 0$  имеет вид [15]

$$\Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} u^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left( \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^K. \quad (3)$$

В [16] установлена структура приближения, позволяющего получить асимптотически точные (в пределе слабого беспорядка) результаты для перенормируемого класса моделей, являющегося нулевым приближением для  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории. При  $N \sim 1$  достаточно учесть коэффициенты  $A_N^K$ , соответствующие «главным логарифмам»; при больших  $N$  этого приближения недостаточно ввиду более высокой скорости роста по  $N$  коэффициентов при младших логарифмах: поэтому нужно учитывать, вообще говоря, все коэффициенты  $A_N^K$ , но вычислять их достаточно в главной асимптотике по  $N$ . Последнее возможно путем комбинирования условия перенормируемости теории с асимптотикой Липатова [18]. Суммирование далеких членов ряда теории возмущений дает непертурбативный вклад, связанный с расходимостью ряда и существенный лишь при отрицательных  $u$ ; последнее объясняет, почему в обычной теории фазовых переходов возможно ограничиться главным логарифмическим приближением [19, 20].

При  $d = 4 - \epsilon$  разложение, аналогичное (3), имеет вид

$$\kappa^2 + \Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) \equiv \kappa^2 Y(\kappa) = \kappa^2 \sum_{N=0}^{\infty} (u\Lambda^{-\epsilon})^N \sum_{K=0}^N A_N^K(\epsilon) \left[ \frac{(\Lambda/\kappa)^\epsilon - 1}{\epsilon} \right]^K, \quad (4)$$

где коэффициенты  $A_N^K(\epsilon)$  конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$  и  $A_0^0(\epsilon) \equiv 1$ . Разложение (4) следует из того, что величина  $Y$  в  $N$ -м порядке теории возмущений является однородным полиномом степени  $N$ , составленным из  $\Lambda^{-\epsilon}$  и  $\kappa^{-\epsilon}$ : действительно, при переходе от диаграммы  $N$ -го порядка к диаграмме  $(N+1)$ -го порядка размерность по импульсу уменьшается на  $\epsilon$  [21], что дает множитель  $\Lambda^{-\epsilon}$  или  $\kappa^{-\epsilon}$  в зависимости от того, какими импульсами — большими или малыми — определяется соответствующий вклад. Выделение из коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$  множителей  $\epsilon^{-K}$  обеспечивает предельный переход в (3) при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Стандартная процедура  $\epsilon$ -разложения [11, 13] соответствует разложению коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$  в ряды по  $\epsilon$

$$A_N^K(\epsilon) = \sum_{L=0}^{\infty} A_N^{K,L} \epsilon^L \quad (5)$$

и сохранению в каждом порядке теории возмущений нескольких старших степеней  $1/\epsilon$ ; первое  $\epsilon$ -приближение соответствует учету лишь коэффициентов  $A_N^{N,0}$ , совпадающих с коэффициентами при главных логарифмах в (3). Аналогично случаю  $d = 4$  такого приближения недостаточно при  $u < 0$  из-за более высокой скорости роста по  $N$  коэффициентов при младших степенях  $1/\epsilon$ : ограничение коэффициентами  $A_N^{N,0}$  возможно лишь при  $N \sim 1$ , тогда как при больших  $N$  нужно учитывать все  $A_N^{K,L}$  с вычислением их в главной асимптотике по  $N$ .

Согласно (4) величина  $Y$  является функцией  $g_0 \equiv u\Lambda^{-\epsilon}$  и  $\Lambda/\kappa$ ; она удовлетворяет уравнению Каллана–Симанчика

$$\left( \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + W(g_0, \epsilon) \frac{\partial}{\partial g_0} + V(g_0, \epsilon) \right) Y = 0, \quad (6)$$

выражающему условие перенормируемости теории и получаемому аналогично уравнению (15) работы [16]. Функции  $W(g_0, \epsilon)$  и  $V(g_0, \epsilon)$  раскладываются в ряды

$$W(g_0, \epsilon) = \sum_{M=1}^{\infty} W_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} W_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'}, \quad (7)$$

$$V(g_0, \epsilon) = \sum_{M=1}^{\infty} V_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} V_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'},$$

первые коэффициенты которых вычислены в [21]:

$$W_1(\epsilon) = -\epsilon, \quad W_{2,0} = K_4(n+8), \quad W_{3,0} = -3K_4^2(3n+14), \quad V_{1,0} = -K_4(n+2) \quad (8)$$

(согласно [16] функция  $V(g_0, \epsilon)$  совпадает с введенной в [21] функцией  $\eta_2(g_0, \epsilon)$ ); величина  $K_4$  определена в (14). Подстановка (4) и (7) в (6) приводит к системе уравнений для коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$ :

$$(K+1)A_N^{K+1}(\epsilon) = (N-K)\epsilon A_N^K(\epsilon) - \sum_{M=1}^{N-K} [(N-M)W_{M+1}(\epsilon) + V_M(\epsilon)] A_{N-M}^K(\epsilon), \quad (9)$$

или для коэффициентов  $A_N^{K,L}$ :

$$(K+1)A_N^{K+1,L} = (N-K)A_N^{K,L-1}(1-\delta_{L,0}) - \sum_{M=1}^{N-K} \sum_{M'=0}^L [(N-M)W_{M+1,M'} + V_{M,M'}] A_{N-M}^{K,L-M'}. \quad (10)$$

Метод Вильсона [11, 13] основан на том, что в  $n$ -м  $\epsilon$ -приближении требуется знать коэффициенты  $A_N^{N-K,L}$  с  $K+L \leq n-1$ , для которых из (10) следует замкнутая система разностных уравнений

$$\begin{aligned} -Nx_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}] x_{N-1}, \\ -(N-1)y_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}] y_{N-1} + [W_{3,0}(N-2) + V_{2,0}] x_{N-2}, \\ -Nz_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}] z_{N-1} + [W_{2,1}(N-1) + V_{1,1}] x_{N-1} - y_N, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11)$$

(где  $x_N \equiv A_N^{N,0}$ ,  $y_N \equiv A_N^{N-1,0}$ ,  $z_N \equiv A_N^{N,1}, \dots$ ), решаемая методом вариации постоянных [22]; задание начальных условий к ней и определение  $W_{2,0}, V_{1,0} \dots$  требует вычисления нескольких низших порядков теории возмущений. В частности, для коэффициентов  $A_N^{N,0}$  легко получить

$$A_N^{N,0} = (-W_{2,0})^N \frac{\Gamma(N-\beta_0)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta_0)}, \quad \beta_0 = -\frac{V_{1,0}}{W_{2,0}} = \frac{n+2}{n+8}. \quad (12)$$

Для исследования высших порядков по  $\epsilon$  метод Вильсона оказывается неэффективным и удобнее исходить из системы уравнений (9). Информация о коэффициентах  $A_N^K(\epsilon)$  с  $N \gg 1$  может быть получена методом Липатова [18], согласно которому далекие коэффициенты разложения по  $u$  функциональных интегралов с гамильтонианом (1) определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — и имеют факториальный рост по  $N$ . Для факториальных рядов существует простая алгебра, позволяющая манипулировать ими так же просто, как конечными выражениями [15], что позволяет находить коэффициенты разложения произвольных  $M$ -точечных функций Грина, переходить от них к собственной энергии и вершинным частям и т. д. Согласно разд. 6,  $N$ -й коэффициент разложения  $\Sigma(p, \kappa)$  по степеням  $u$  имеет вид

$$\begin{aligned} [\Sigma(p, \kappa)]_N &= c_2 \Gamma(N+b) a^N \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-2} \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp} \langle \phi_c^3 \rangle_{-Rp} \times \\ &\times \exp \left( -Nf(\kappa R) + N\epsilon \ln R + 2K_d I_4(\kappa R) \frac{1 - (\Lambda R)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a = -3K_4, \quad b = \frac{d+2}{2}, \quad c_2 = c(3K_4)^{7/2},$$

$$f(x) = -\frac{\epsilon}{2}(C + 2 + \ln \pi) - 3x^2 \left( C + \frac{1}{2} + \ln \frac{x}{2} \right), \quad \langle \phi_c^3 \rangle_p = 8\sqrt{2}\pi^2 p K_1(p), \quad (14)$$

$$I_4(x) = \bar{I}_4 \exp(f(x)); \quad \bar{I}_4 = \frac{16}{3} S_4, \quad S_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2), \quad K_d = S_d (2\pi)^{-d},$$

$C$  – постоянная Эйлера,  $K_1(x)$  — функция Мак-Дональда, константа  $c$  определена ниже в разд. 6. Переразлагая ряд (4):

$$\kappa^2 + \Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \sum_{N=0}^{\infty} (u\kappa^{-\epsilon})^N \sum_{K=0}^N B_N^K(\epsilon) \left[ \frac{1 - (\Lambda/\kappa)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right]^K, \quad (15)$$

так что коэффициенты  $B_N^K(\epsilon)$  связаны с  $A_N^K(\epsilon)$  соотношением

$$A_N^K(\epsilon) = \sum_{K'=0}^K C_{N-K'}^{N-K'} B_N^{K'}(\epsilon) \epsilon^{K-K'}, \quad (16)$$

полагая в (13)  $p = 0$ , делая замену  $R \rightarrow R/\kappa$  и преобразуя экспоненту

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ 2K_d I_4(R) \frac{1 - (\Lambda R/\kappa)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right\} = \\ & = \exp \left\{ 2K_d I_4(R) \frac{1 - R^{-\epsilon}}{\epsilon} \right\} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\{2K_d I_4(R) R^{-\epsilon}\}^K}{K!} \left[ \frac{1 - (\Lambda/\kappa)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right]^K, \end{aligned} \quad (17)$$

получаем для коэффициентов  $B_N^K(\epsilon)$  при больших  $N$

$$\begin{aligned} B_N^K(\epsilon) &= \bar{c}_2 \Gamma(N+b) a^N \frac{1}{K!} \int_0^{\infty} d \ln R^2 R^{-2} (2K_d I_4(R) R^{-\epsilon})^K \times \\ & \times \exp \left( -N f(R) + N \epsilon \ln R + 2K_d I_4(R) \frac{1 - R^{-\epsilon}}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\bar{c}_2 = c_2 \langle \phi_c^3 \rangle_0^2$ . Аналогично случаю  $d = 4$  [16], метод Липатова хорошо воспроизводит коэффициенты  $B_N^K(\epsilon)$  лишь для  $K \ll N$ , что связано с их быстрым убыванием по  $K$  и ограниченной точностью ( $\sim 1/N$ ) главной асимптотики. Подставляя (18) в (16), получаем для коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$  с  $N \gg 1$  результат

$$\begin{aligned} A_N^K(\epsilon) &= \bar{c}_2 \Gamma(N+b) a^N C_N^K \int_0^{\infty} d \ln R^2 R^{-2} \left( \epsilon + \frac{2K_d \bar{I}_4}{N} e^{f(R) - \epsilon \ln R} \right)^K \times \\ & \times \exp \left( -N f(R) + N \epsilon \ln R + 2K_d I_4(R) \frac{1 - R^{-\epsilon}}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

следующий из (18) при условии, что сумма в (16) определяется значениями  $K' \ll N$ . Сохраняя в сумме (9) лишь член с  $M = 1$ , легко убедиться, что полученное уравнение удовлетворяется результатом (19) при  $K \ll N$  в случае  $N\epsilon \lesssim 1$  и для всех  $K$  при  $N\epsilon \gg 1$ ;

последнее связано с тем, что при  $N\epsilon \gg 1$  сумма в (16) определяется значениями  $K' \sim \sim K/\epsilon N \ll N$  при всех  $K$ , лежащих в области применимости формулы (18). Указанная редукция уравнения (9) возможна при больших  $N$  ввиду факториального роста  $A_N^K(\epsilon)$  в предположении, что  $W_N(\epsilon)$  и  $V_N(\epsilon)$  растут медленнее, чем  $A_N^0(\epsilon)$ ; последнее можно считать следствием справедливости (19) при  $K = 0, 1, 2$  (см. подробнее в [16]).

Система уравнений (9) определяет  $A_N^K(\epsilon)$  с  $K > 0$  по заданным  $A_N^0(\epsilon)$ ; поскольку формула (19) справедлива для последних при всех  $N \gg 1$ , ее можно использовать в качестве граничного условия к (9), что позволяет определить все  $A_N^K(\epsilon)$  с большими  $N$ . Тогда, сохраняя при  $N \sim 1$  лишь главный порядок по  $1/\epsilon$ , определяемый коэффициентами (12), нетрудно найти сумму ряда (4).

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ $A_N^K(\epsilon)$

Ограничимся в сумме (9) членами с  $M = 1$  и  $M = 2$ :

$$KA_N^K(\epsilon) = (N - K + 1)\epsilon A_N^K(\epsilon) - W_2(\epsilon)[N - 1 - \beta(\epsilon)]A_N^{K-1}(\epsilon) - W_3(\epsilon)NA_N^{K-2}(\epsilon), \quad (20)$$

здесь

$$\beta(\epsilon) = -\frac{V_1(\epsilon)}{W_2(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \beta_0. \quad (21)$$

Мы полагаем по определению, что  $A_N^{N+1}(\epsilon) = 0$ , чтобы учесть отсутствие последнего члена в уравнении (20) с  $K = N$ . Последний член в (20) имеет малость  $\sim 1/N$  по сравнению с предыдущим и взят в низшем порядке по  $1/N$ ; необходимость его учета связана с тем, что для вычисления  $A_N^K(\epsilon)$  с  $K \sim N$  по заданным  $A_N^0(\epsilon)$  требуется  $\sim N$  итераций, и при точности каждой итерации  $\sim 1/N$  происходит накопление ошибок. В дальнейшем аргументы  $\epsilon$  в промежуточных формулах опускаем.

Делая в (20) замену

$$A_N^K = (-W_2)^K \frac{\Gamma(N - \beta)}{\Gamma(K + 1)\Gamma(N - K - \beta)} A_{N-K}^0 X_{N,N-K} \quad (22)$$

и вводя обозначения

$$h_M = -\frac{\epsilon}{W_2} \frac{A_{M+1}^0}{A_M^0} \frac{M + 1}{M - \beta}, \quad f_M = \frac{W_3}{W_2} \frac{A_{M-1}^0}{A_M^0} (M - 1 - \beta), \quad (23)$$

получаем уравнение

$$X_{N,M} = h_M X_{N,M+1} + X_{N-1,M} + \frac{f_M}{N} X_{N-2,M-1} \quad (24)$$

с граничным условием

$$X_{N,N} = 1. \quad (25)$$

Переписывая (24) в виде

$$X_{N,M} = (\hat{i}_M + \hat{\delta}_M) X_{N,M+1}, \quad (26)$$

где

$$\hat{l}_M \equiv h_M + e^{-i\hat{p}}, \quad \hat{\delta}_M \equiv \frac{f_M}{N} e^{-2i\hat{p}}, \quad (27)$$

а  $e^{-i\hat{p}}$  — оператор сдвига на  $-1$ , действующий на оба аргумента, легко получить с учетом (25)

$$\begin{aligned} X_{N,M} &= (\hat{l}_M + \hat{\delta}_M) (\hat{l}_{M+1} + \hat{\delta}_{M+1}) \dots (\hat{l}_{N-1} + \hat{\delta}_{N-1}) X_{N,N} = \\ &= \hat{l}_M \hat{l}_{M+1} \dots \hat{l}_{N-1} 1 + \sum_{p_1=M}^{N-1} \hat{l}_M \dots \hat{l}_{p_1-1} \hat{\delta}_{p_1} \hat{l}_{p_1+1} \dots \hat{l}_{N-1} 1 + \\ &+ \sum_{p_1=M}^{N-2} \sum_{p_2=p_1+1}^{N-1} \hat{l}_M \dots \hat{l}_{p_1-1} \hat{\delta}_{p_1} \hat{l}_{p_1+1} \dots \hat{l}_{p_2-1} \hat{\delta}_{p_2} \hat{l}_{p_2+1} \dots \hat{l}_{N-1} 1 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Мы не указываем для оператора  $\hat{\delta}$  зависимость от аргумента  $N$ , который определяется значением  $N$  в левой части. Основной вклад в сумму дают члены с небольшим числом операторов  $\hat{\delta}$ , которые нетрудно вычислить. По индукции доказывается результат

$$\hat{l}_M \hat{l}_{M+1} \dots \hat{l}_{M'-1} = \sum_{L=0}^{M'-M} C_{M'-M}^L h_M h_{M+1} \dots h_{M'-L-1} e^{-iL\hat{p}}, \quad (29)$$

определяющий член нулевого порядка по  $\hat{\delta}$ . Для произведений с одним оператором  $\hat{\delta}$  имеем

$$\begin{aligned} \hat{l}_M \dots \hat{l}_{p_1-1} \hat{\delta}_{p_1} \hat{l}_{p_1+1} \dots \hat{l}_{M'-1} &= \sum_{L_1=0}^{p_1-M} \sum_{L_2=0}^{M'-p_1-1} C_{p_1-M}^{L_1} C_{M'-p_1-1}^{L_2} \times \\ &\times h_M \dots h_{p_1-L_1-1} \frac{f_{p_1-L_1}}{N-L_1} h_{p_1-L_1-1} \dots h_{M'-L_1-L_2-3} e^{-i(L_1+L_2+2)\hat{p}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Замечая, что в силу (23)

$$f_{p_1-L_1} h_{p_1-L_1-1} = \left( -\frac{\epsilon W_3}{W_2^2} \right) (p_1 - L_1), \quad (31)$$

приведем (30) к виду

$$\left( -\frac{\epsilon W_3}{W_2^2} \right) \sum_L h_M \dots h_{M'-L-3} e^{-i(L+2)\hat{p}} \sum_{L_1} C_{p_1-M}^{L_1} C_{M'-p_1-1}^{L-L_1} \frac{p_1 - L_1}{N - L_1}. \quad (32)$$

Сумма по  $L_1$  имеет перевал в точке  $L_c = L(p_1 - M)/(M' - M - 1)$ ; заменяя  $L_1$  на  $L_c$  в последней дроби (32) и пользуясь теоремой сложения для биномиальных коэффициентов [22, стр. 745], получаем

$$\left( -\frac{\epsilon W_3}{W_2^2} \right) \sum_L C_{M'-M-1}^L h_M \dots h_{M'-L-3} e^{-i(L+2)\hat{p}} \frac{p_1 - (p_1 - M)\tau}{N - (p_1 - M)\tau} \Big|_{\tau=L/(M'-M-1)}. \quad (33)$$

Результат (33) имеет ту же структуру, что (29), и по индукции нетрудно найти произведения с небольшим числом  $s$  операторов  $\hat{\delta}$ ; из (28) получим

$$\begin{aligned}
 X_{N,M} = & \sum_{s=0}^{\infty} \left( -\frac{\epsilon W_3}{W_2^2} \right)^s \sum_{L=0}^{\min\{N-M-s, N-2s\}} C_{N-M-s}^L h_M \dots h_{N-L-2s-1} \times \\
 & \times \sum_{p_1=M}^{N-s} \frac{p_1 - (p_1 - M)\tau}{N - (p_1 - M)\tau} \sum_{p_2=p_1+1}^{N-s+1} \frac{p_2 - 2 - (p_2 - M - 1)\tau}{N - 2 - (p_2 - M - 1)\tau} \dots \\
 & \dots \sum_{p_s=p_{s-1}+1}^{N-1} \frac{p_s - 2s + 2 - (p_s - M - s + 1)\tau}{N - 2s + 2 - (p_s - M - s + 1)\tau} \Big|_{\tau=L/(N-M-s)} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Вычисляя сумму по  $p_1, p_2, \dots, p_s$  в двух перекрывающихся областях параметров, получаем для нее результаты ( $\tau' \equiv 1 - \tau$ ):

$$\frac{1}{s!} \left\{ \frac{M + \tau'(N - M)}{(1 - \tau')^2} \ln \frac{N}{\tau'N + (1 - \tau')M} - \frac{\tau'(N - M)}{1 - \tau'} \right\}^s, \quad \max\{\tau'N, M\} \gg s, \quad (35)$$

$$\frac{1}{s!} \frac{\Gamma(M + \tau'N + 1)}{\Gamma(M + \tau'N - s + 1)} \left\{ \ln \frac{N}{\tau'N + M - s} - \frac{\tau'N}{\tau'N + M} \right\}^s, \quad \tau'N \sim M \sim s. \quad (36)$$

В первом случае можно пренебречь величинами  $\sim s$  в дробях и пределах суммирования и перейти от сумм к интегралам, во втором — последовательно вычислить суммы, выделяя две старшие степени больших логарифмов. Формула (36) справедлива буквально при  $s \gg 1$ , тогда как при  $s \sim 1$  отличие выражения в фигурных скобках от  $\ln N$  является превышением точности.

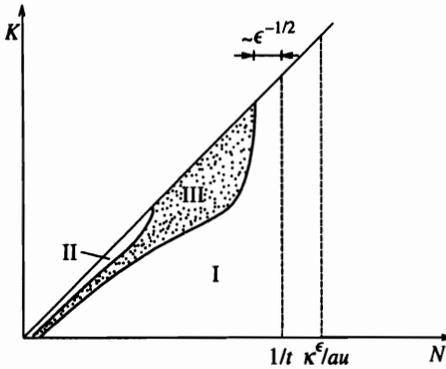
Входящее в (34) произведение

$$h_M h_{M+1} \dots h_{N-L-2s-1} = \left( -\frac{\epsilon}{W_2} \right)^{N-L-2s-M} \frac{A_{N-L-2s}^0}{A_M^0} \frac{\Gamma(M-\beta)}{\Gamma(M+1)} \frac{\Gamma(N-L-2s+1)}{\Gamma(N-L-2s-\beta)} \quad (37)$$

зависит от коэффициентов  $A_N^0$ , которые предполагаются известными. Аналогично случаю  $d = 4$  [16], в плоскости  $(N, K)$  можно выделить область I (рисунок), в которой сумма в (34) определяется значениями  $N - L - 2s \gg 1$ , так что для коэффициентов  $A_N^0$  справедлива асимптотика Липатова, и область II ( $M \ll \ln N, N\epsilon \ll 1$ ), «управляемая» тривиальным коэффициентом  $A_0^0 = 1$ . Между областями I и II лежит область неуниверсальности III ( $M \sim \ln N, N\epsilon \lesssim 1$ ), в которой существенна информация о коэффициентах  $A_N^0$  с  $N \sim 1$ ; область III не дает существенного вклада в сумму (4).

В области I при  $N\epsilon \gtrsim 1$  выполнены условия  $N - L - 2s \gg 1$ ,  $\max\{\tau'N, M\} \gg 1$  и  $N - M - L \gg s$ , что позволяет использовать результат (19) для  $A_N^0$ , результат (35) для суммы по  $p_i$ , пренебречь в (34) величиной  $s$  в пределах суммирования и медленно меняющихся функциях и просуммировать по  $s$ ; после подстановки в (22) получим

$$\begin{aligned}
 A_N^{N-M} = & \frac{\epsilon^{N-M}}{M!} \tilde{c}_2 \Gamma(N - \beta) a^N \times \\
 & \times \sum_{L=0}^{N-M} \frac{(N - L)!}{L!(N - L - M)!} \left( -\frac{W_2}{a\epsilon} \right)^L J(N - L)(N - L)^{\beta+\beta} e^{S(L)}, \quad (38)
 \end{aligned}$$



Области I и II, дающие непертурбативный и квазипаркетный вклады в сумму (4); параметр  $t \sim \epsilon$  определен в (42). Непертурбативный вклад эффективно оценивается при  $N = \kappa^\epsilon / au$ ; неравенство  $\kappa^\epsilon / au > 1/t$  соответствует положительности величины  $\Delta$  (см. (45))

где

$$J(N) = \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-2} \exp \left( -N f(R) + N \epsilon \ln R + 2K_d I_4(R) \frac{1 - R^{-\epsilon}}{\epsilon} \right), \quad (39)$$

$$S(L) = \frac{W_3}{\epsilon a^2 L} \left( \frac{N - L - M}{N - L} \right)^2 \left[ 1 + \frac{(N - L)(N - M)}{L(N - M - L)} \ln \frac{N - L}{N} \right]. \quad (40)$$

При  $N - M \ll N$  или  $N \epsilon \gg 1$  сумма по  $L$  в (38) определяется значениями  $L \ll N$  и (38) переходит в (19). При  $M \sim 1$  результат (38) преобразуется к виду

$$A_N^{N-M}(\epsilon) = \frac{1}{M!} \epsilon^{N-M} \tilde{c}_2 \Gamma(N - \beta) a^N \sqrt{t/2\pi} \exp \left[ f_\infty (Nt \ln N - 1) + \frac{1}{t} \right] \times \\ \times \int_0^\infty dx \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( N - \frac{1}{t} - x \right)^2 \right] x^{M+b+\beta - f_\infty Nt} J(x), \quad (41)$$

где

$$t = -\frac{\epsilon a}{W_2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3\epsilon}{n+8}, \quad f_\infty = \frac{W_3}{aW_2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3n+14}{n+8} \quad (42)$$

Предположения, сделанные при выводе (41), выполнены в области  $Nt > 1$  или  $1 - Nt \ll \epsilon^{1/2}$ .

При  $N \epsilon \ll 1$  сумма по  $L$  в (34) определяется окрестностью верхнего предела суммирования, так что  $\tau' \ll 1$ ; при  $M \gg \ln N$  и  $M \sim \ln N$  используются соответственно формулы (35) и (36). Для  $M \ll \ln N$  доминируют члены с  $s \geq M$ ,  $L = N - 2s$  и в силу  $A_0^0 = 1$  имеем результат для области II

$$A_N^{N-M}(\epsilon) = (-W_2)^N \frac{\Gamma(N - \beta)}{\Gamma(N + 1)\Gamma(-\beta)} \sum_{L=0}^\infty \epsilon^L \frac{1}{M!L!} \left( -\frac{W_3}{W_2^2} \right)^{M+L} (N \ln N)^{M+L}, \quad (43)$$

который можно получить из системы уравнений (11), выделяя для  $A_N^{N-K,L}$  главную асимптотику по  $N$ . Для  $N \epsilon \ln N \ll 1$  доминируют члены с  $s \leq M$  и для произвольных

М имеем результат

$$X_{N,M} = \frac{\Gamma(M-\beta)}{A_M^0} \sum_{s=0}^M \frac{A_{M-s}^0}{\Gamma(M-s-\beta)} \frac{1}{s!} \left( \frac{W_3}{W_2} \ln \frac{N}{M-s+1} \right)^s e^{i(N-M)M}, \quad (44)$$

область применимости которого при  $\epsilon \rightarrow 0$  неограниченно расширяется и он переходит в формулы (42), (43) работы [16] для  $d = 4$ .

#### 4. ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭНЕРГИИ И ЗАТУХАНИЕ

Аналогично случаю  $d = 4$  [16] имеются два существенных вклада в сумму (4) — непertурбативный и квазипаркетный, возникающие соответственно от областей I и II (рисунок). Мы ограничимся рассмотрением континуального предела  $\Lambda \rightarrow \infty$ , когда в (4) остаются лишь коэффициенты  $A_N^N(\epsilon)$ . Квазипаркетный вклад вычисляется на основе формулы (43) и имеет вид

$$[Y(\kappa)]_{quasiparq} = \left[ \Delta + \frac{W_3(\epsilon)}{W_2(\epsilon)} u \kappa^{-\epsilon} \ln \Delta \right]^{\beta(\epsilon)}, \quad \Delta \equiv 1 + W_2(\epsilon) u \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon}, \quad (45)$$

где коэффициенты  $W_2(\epsilon)$ ,  $W_3(\epsilon)$ ,  $\beta(\epsilon)$  можно брать в нулевом порядке по  $\epsilon$ . В пределах точности вычислений величина  $\Delta$  под логарифмом может быть заменена на свое минимальное значение  $\bar{\Delta} \sim \epsilon \ln \epsilon$  (определяемое приведенными ниже уравнениями (51), (52)), так как при  $\Delta \gg \bar{\Delta}$  логарифмический член несуществен. Поэтому результат (45) переписывается в виде

$$[Y(\kappa)]_{quasiparq} = [1 + W_{2,0} \tilde{u} \kappa^{-\epsilon} / \epsilon]^{\beta_0}, \quad \tilde{u} \equiv u \left[ 1 + \frac{W_{3,0}}{W_{2,0}^2} \epsilon \ln \bar{\Delta} \right], \quad (46)$$

отличающемся от паркетного [23] лишь заменой  $u$  на  $\tilde{u}$ .

Для вычисления непertурбативного вклада положим

$$A_N^N(\epsilon) = \bar{c}_2 \Gamma(N+b) \epsilon^N a^N F(N) \quad (47)$$

и просуммируем (4) от некоторого большого  $N_0$  до бесконечности по формуле (46) работы [16]:

$$[\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert} \equiv i\Gamma_0(\kappa^2) = i\pi \bar{c}_2 \kappa^2 (\kappa^\epsilon / au)^b e^{-\kappa^\epsilon / au} F(\kappa^\epsilon / au). \quad (48)$$

Неpertурбативный вклад связан с расходимостью ряда и формально возникает от области сколь угодно больших  $N$ , однако он должен вычисляться на основе формулы (41), а не (19), так как поправочный множитель, отличающий (41) от (19), эффективно оценивается при  $N = \kappa^\epsilon / au$  и оказывается существенным; это обстоятельство не было осознано в заметке автора [17], поэтому формулы (22), (23) в ней отличаются от приведенных ниже, см. (52), (53), (55).

Аппроксимируя ряд (4) суммой вкладов (46) и (48), получаем уравнение

$$\kappa_0^2 - \kappa_c^2 = \kappa^2 [1 + 8K_4 \tilde{u} \kappa^{-\epsilon} / \epsilon]^{1/4} + i\Gamma_0(\kappa^2), \quad \kappa^2 = -E - i\Gamma, \quad (49)$$

где  $\kappa_c^2 = \Sigma(0, 0)$  и учтено, что  $\kappa_0^2 = \kappa^2 + \Sigma(0, \kappa)$ . Уравнение (49) решается аналогично уравнению (93) работы [15]. Полагая

$$\kappa^2 = |\kappa|^2 e^{-i\varphi}, \quad x = \frac{2}{\epsilon} \left[ \left( \frac{|\kappa|^2}{\Gamma_c} \right)^{\epsilon/2} - 1 \right], \quad \Gamma_c = \left( \frac{8K_4 |\tilde{u}|}{\epsilon} \right)^{2/\epsilon} \quad (50)$$

и выделяя действительную и мнимую части (49), получаем связь затухания  $\Gamma$  и перенормированной энергии  $E$  с затравочной энергией  $E_B = -\kappa_0^2$  в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_c \left( 1 + \frac{\epsilon x}{2} \right)^{2/\epsilon} \sin \varphi, & E &= -\Gamma_c \left( 1 + \frac{\epsilon x}{2} \right)^{2/\epsilon} \cos \varphi, \\ -E_B + E_c &= \Gamma_c \left( 1 + \frac{\epsilon x}{2} \right)^{2/\epsilon} \left( \frac{\epsilon x/2}{1 + \epsilon x/2} \right)^{1/4} \times \\ &\times \left[ \cos \left( \varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) - \operatorname{tg} \frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3} \sin \left( \varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

где  $E_c$  определяется формулой (108) работы [15], а  $x(\varphi)$  — однозначная функция в интервале  $0 < \varphi < \pi$ , аналогичная показанной на рис. 2 работы [15] и определяемая уравнением

$$\sin \left( \varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) = \frac{e^{-4x/3}}{x^{1/4}} I(x) \cos \frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3}, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} I(x) &= \tilde{c}_2 \left( \frac{3}{4} \right)^{1/4} \left( \frac{\pi t}{2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -f_\infty + f_\infty \left( 1 + \frac{\epsilon x}{2} \right) \ln \left[ \bar{\Delta} \left( 1 + \frac{\epsilon x}{2} \right) / t \right] \right\} \times \\ &\times \int_0^\infty dz \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{\epsilon x}{2t} - z \right)^2 \right] z^{b+\beta-f_\infty(1+\epsilon x/2)} J(z). \end{aligned} \quad (53)$$

Формулы (51), (52) существенно упрощаются в двух перекрывающихся областях. При  $x \gg \ln(1/\epsilon)$ , т. е. в области больших  $|E|$ , когда правая часть (52) мала и величина  $\varphi$  близка к 0 или  $\pi$ , для зависимости  $\Gamma(E)$  получаются асимптотики

$$\Gamma(E) = \begin{cases} \frac{1}{8} \pi \epsilon E \left[ (E/\Gamma_c)^{\epsilon/2} - 1 \right]^{-1}, & E \gg \Gamma, \\ \Gamma_0(E) \left[ 1 - (|E|/\Gamma_c)^{-\epsilon/2} \right]^{-1/4}, & -E \gg \Gamma, \end{cases} \quad (54)$$

создающие иллюзию ложного полюса [7] ( $\Gamma_0(E) \equiv \Gamma_0(|\kappa|^2)$ ); при больших положительных  $E$  воспроизводится результат кинетического уравнения, при больших отрицательных  $E$  затухание становится чисто непертурбативным.

В области малых энергий,  $x \lesssim \epsilon^{-1/2}$ , имеем уравнение

$$\sin \left( \varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) = I(0) \frac{e^{-4x/3}}{x^{1/4}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad I(0) \sim \epsilon^{-7/12} \left( \ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{17/12}, \quad (55)$$

описывающее окрестность ложного полюса и по функциональной форме совпадающее с четырехмерным (см. формулу (51) в [16] при  $x \ll x_0$  и формулу (100) в [15]). Минимальные значения величин  $\Delta$  и  $x$  достигаются одновременно и с логарифмической

точностью равны

$$\Delta_{min} \equiv \bar{\Delta} \approx \frac{7}{8}\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad x_{min} \approx \frac{7}{16} \ln \frac{1}{\epsilon}, \tag{56}$$

так что ложный полюс обходится на расстоянии порядка  $\epsilon \ln(1/\epsilon)$ .

### 5. ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Для вычисления плотности состояний требуется знание собственной энергии  $\Sigma(p, \kappa)$  при конечных импульсах [15]; так же как при  $p = 0$ , эта величина состоит из непертурбативного и квазипаркетного вкладов. Квазипаркетный вклад определяется паркетными формулами [15, разд. 7] с заменой  $u$  на  $\tilde{u}$ ; доказательство этого совершенно аналогично случаю  $d = 4$  [16, разд. 5]. Непертурбативный вклад оказывается существенным лишь в области больших отрицательных  $E$ , где он непосредственно определяется асимптотикой Липатова и может быть вычислен на основе (13) (при  $N = \kappa^\epsilon/au \gg 1/\epsilon$  поправочный множитель, отличающий друг от друга результаты типа (41) и (19), равен единице)

$$[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert} = i\pi c_2 \kappa^2 \left(\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right)^b e^{-\kappa^\epsilon/au} \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-2} \langle \phi_c^3 \rangle_{pR/\kappa} \langle \phi_c^3 \rangle_{-pR/\kappa} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\kappa^\epsilon}{au} [f(R) - \epsilon \ln R] + \frac{2K_d I_4(R)}{\epsilon} \right\}. \tag{57}$$

При  $p = 0$  интеграл определяется окрестностью перевальной точки  $R_0$ , являющейся корнем уравнения

$$\epsilon = 6R_0^2(-\ln R_0 + \ln 2 - C - 1), \tag{58}$$

так что  $R_0 \approx \sqrt{\epsilon/3 \ln(1/\epsilon)}$ ; при  $p \lesssim \kappa R_0^{-1}$  выражение (57) не зависит от  $p$ , при  $p \gtrsim \kappa R_0^{-1}$  быстро убывает с ростом  $p$ . Ввиду логарифмической точности последующих вычислений [15, разд. 8] достаточно результата

$$[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert} \approx [\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert} \theta(\kappa R_0^{-1} - p). \tag{59}$$

С учетом сказанного, окончательное выражение для  $\Sigma(p, \kappa)$  имеет вид

$$\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, \kappa) = \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-1/4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-3/4} \right\} - i\Gamma_0(\kappa^2)\theta(p - \kappa R_0^{-1}) \tag{60}$$

(ср. с формулой (116) работы [15]), где

$$t(x) = 1 + 8K_4 \tilde{u}x/\epsilon, \quad x = p^{-\epsilon}, \quad x_\infty = \kappa^{-\epsilon}. \tag{61}$$

Подставляя (60) в формулы (117), (118) работы [15] для  $d = 4 - \epsilon$ , получим

$$\nu = \frac{\Gamma_c}{4\pi|\tilde{u}|} \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \left\{ \left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-1/4} \left(1 - \frac{R_0^\epsilon}{2 + \epsilon x}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-3/4} \sin\left(\varphi + \frac{3\varphi}{4x}\right) \right\}, \tag{62}$$

что совместно с (51), (52) определяет плотность состояний  $\nu(E)$  в параметрической форме. Обратим внимание на наличие скейлинга: при измерении энергии в единицах  $\Gamma_c$ , а плотности состояний в единицах  $\Gamma_c/|\tilde{u}|$  все зависимости определяются универсальными функциями, не зависящими от степени беспорядка. При  $|E| \gg \Gamma$  имеем асимптотики

$$\nu(E) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_4 E^{(d-2)/2} \left[ 1 - \left( \frac{E}{\Gamma_c} \right)^{-\epsilon/2} \right]^{-1/4}, & E \gg \Gamma, \\ \frac{\Gamma_0(E)}{4\pi|\tilde{u}|} \left\{ 1 - \frac{R_0^\epsilon}{2} \left( \frac{|E|}{\Gamma_c} \right)^{-\epsilon/2} - \left[ 1 - \left( \frac{|E|}{\Gamma_c} \right)^{-\epsilon/2} \right]^{1/2} \right\}, & -E \gg \Gamma, \end{cases} \quad (63)$$

показывающие ложный полюс. При больших положительных  $E$  функция  $\nu(E)$  переходит в плотность состояний идеальной системы, при больших отрицательных  $E$  получается результат для флуктуационного хвоста

$$\nu(E) = \frac{K_4}{\pi} \Gamma_0(E) |E|^{-\epsilon/2} \ln \frac{1}{R_0} = \tilde{c}_2 K_4 \left( \frac{2\pi}{3} \ln \frac{1}{R_0} \right)^{1/2} R_0^{-3} |E|^{(d-2)/2} \left[ \frac{\bar{I}_4 |E|^{\epsilon/2}}{4|u|} \right]^{(d+1)/2} \times \\ \times \exp \left( \frac{2K_d I_4(R_0)}{\epsilon} - \frac{I_4(R_0) |E|^{\epsilon/2}}{4|u| R_0^\epsilon} \right), \quad (64)$$

энергетическая зависимость которого совпадает с полученной в [25–27] и соответствует известному закону Лифшица [28]; расходимость при  $\epsilon \rightarrow 0$  устраняется для конечного параметра обрезания  $\Lambda$ . Любопытно, что при  $\epsilon x \ll 1$ , формулы (51)–(53), (62) по функциональной форме совпадают с таковыми для  $d = 4$  [16], т.е. поведение всех физических величин в окрестности порога подвижности эффективно оказывается четырехмерным. Аналогично [15, 16] точка фазового перехода смещается в комплексную плоскость, что обеспечивает регулярность плотности состояний при всех энергиях.

Отличие  $R_0^\epsilon$  от единицы существенно лишь при  $\kappa^\epsilon/u \gg 1/\epsilon$ , когда происходит почти точная компенсация членов в фигурных скобках в (63). Замена  $R_0 \rightarrow 1$  в (60) соответствует полному пренебрежению величиной  $[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert}$ , так как интегрирование в формуле (118) работы [15] происходит по области  $p \gtrsim \kappa$ ; таким образом, величина  $[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert}$  существенна лишь при больших отрицательных  $|E|$  и может вычисляться по асимптотике Липатова.

## 6. АСИМПТОТИКА ЛИПАТОВА

Вычисление асимптотики Липатова в  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории близко следует схеме для  $d = 4$ , подробно описанной ранее [16]. Поэтому обсудим лишь возникающие отличия, отмечая цифрой I ссылки на формулы работы [16].

В безмассовой четырехмерной теории существует специфическая нулевая мода — дилатационная, соответствующая изменению радиуса  $R$  инстантона [16, 18, 29]. Так же как в массивной четырехмерной теории [16], при  $d = 4 - \epsilon$  эта мода становится мягкой и интегрирование по ней носит существенно негауссовский характер; корректное проведение этого интегрирования необходимо для того, чтобы обеспечить правильный предельный переход при  $d \rightarrow 4$ .

Аналогично (I.82) введем под функциональный интеграл три разложения единицы:

$$\begin{aligned}
 1 &= \left( \int d^d x |\varphi(x)|^4 \right)^d \int d^d x_0 \prod_{\mu=1}^d \delta \left( - \int d^d x |\varphi(x)|^4 (x - x_0)_\mu \right), \\
 1 &= \int d^d x |\varphi(x)|^4 \int_0^\infty d \ln R^2 \delta \left( - \int d^d x |\varphi(x)|^4 \ln \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^2 \right), \\
 1 &= \int d^n u \delta (\mathbf{u} - \mathbf{v}\{\varphi\}),
 \end{aligned} \tag{65}$$

и вместо (I.82) сделаем замену

$$x - x_0 = R\bar{x}, \quad \varphi_\alpha(x_0 + R\bar{x}) = R^{-(d-2)/2} \bar{\varphi}_\alpha(\bar{x}), \quad g = \bar{g}R^{d-4}. \tag{66}$$

В результате приходим к выражению

$$\begin{aligned}
 [G_M]_{N-1} &= \int_0^\infty d \ln R^2 Z_0(\kappa_R)^{-1} \int d^d x_0 \int d^n u R^{-4-(d-2)M/2} \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \times \\
 &\times \prod_{\mu=1}^d \delta \left( - \int d^d x |\varphi(x)|^4 x_\mu \right) \delta \left( - \int d^d x |\varphi(x)|^4 \ln x^2 \right) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \\
 &\times \left( \int d^d x |\varphi(x)|^4 \right)^{d+1} \varphi_{\alpha_1} \left( \frac{x_1 - x_0}{R} \right) \dots \varphi_{\alpha_M} \left( \frac{x_M - x_0}{R} \right) \times \\
 &\times \exp [-H\{\kappa_R, g, \varphi\} - N \ln g + N\epsilon \ln R],
 \end{aligned} \tag{67}$$

основное отличие которого от (I.83) состоит в появлении члена  $N\epsilon \ln R$  в экспоненте. Выбор инстантона по-прежнему фиксируется уравнением (I.94), которое после перехода к функции  $\phi_c(x)$  согласно (I.72) принимает в сферических координатах вид ( $r \equiv |x|$ )

$$\phi_c''(r) + \frac{3-\epsilon}{r} \phi_c'(r) - \kappa_R^2 \phi_c(r) + \phi_c^3(r) - \mu_0 \phi_c^3(r) \ln r^2 = 0. \tag{68}$$

В области  $r \ll \kappa_R^{-1}$  члены с  $\epsilon$ ,  $\kappa_R$ ,  $\mu_0$  рассматриваются как возмущение и аналогично (I.99) получим

$$\begin{aligned}
 \phi_c(r) &= \frac{2\sqrt{2}}{z+1} \left[ 1 + \frac{1-z}{1+z} v(z) \right]_{z=r^2}, \\
 v(z) &= \int_0^z dz \frac{(1+z)^4}{(1-z)^2 z^2} \times \\
 &\times \left\{ \epsilon \frac{z^2(z-3)}{12(1+z)^3} + \frac{\kappa_R^2}{4} \left[ -\ln(1+z) + \frac{z+2z^2}{(1+z)^2} \right] + \mu_0 \left[ \frac{\ln z}{(z+1)^4} - \frac{z+3}{6(z+1)^3} \right] z^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Вычисление асимптотики  $v(z)$  при  $z \gg 1$  с учетом лишь растущих по  $z$  членов дает для области  $1 \ll r \ll \kappa_R^{-1}$

$$\begin{aligned} \phi_c(r) = \frac{2\sqrt{2}}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\kappa_R^2 r^2 \ln r + \left[ \frac{1}{6}\mu_0 - \frac{3}{4}\kappa_R^2 - \frac{1}{12}\epsilon \right] r^2 + \right. \\ \left. + 3\kappa_R^2 \ln^2 r + \left[ 2\mu_0 - \frac{11}{2}\kappa_R^2 \right] \ln r - \frac{1}{r^2} \right\}. \end{aligned} \quad (70)$$

В области  $r \gg 1$ , рассматривая как возмущение нелинейные члены в (68), получаем после выделения асимптотики для  $r \ll \kappa_R^{-1}$

$$\begin{aligned} \phi_c(r) = \frac{2\sqrt{2}}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\kappa_R^2 r^2 \ln r + \frac{2C - 1 + 2 \ln(\kappa_R/2)}{4} \kappa_R^2 r^2 + 3\kappa_R^2 \ln^2 r + \right. \\ \left. + \left[ \epsilon + \kappa_R^2 \left( 6C + \frac{1}{2} + 6 \ln \frac{\kappa_R}{2} \right) \right] \ln r - \frac{1}{r^2} \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Условие сшивки (70) и (71) имеет вид

$$2\mu_0 = \epsilon + 6\kappa_R^2 (\ln \kappa_R + C + 1 - \ln 2) \quad (72)$$

Используя (69) для вычисления интеграла в (I.70) (с заменой  $d^4x \rightarrow d^d x$ ), получаем

$$N \ln g_c = N \ln \left( -\frac{\bar{I}_4}{4N} \right) + N f(\kappa_R), \quad (73)$$

где  $f(x)$  и  $\bar{I}_4$  определены в (14). По сравнению со случаем  $d = 4$  функция  $f(x)$  изменяется на константу  $\sim \epsilon$ .

Еще одна модификация возникает при выделении расходимостей из детерминантов, определяемых правилом сумм (ср. с (I.114))

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{1}{\mu_s^2} = 9 \int_0^{\Lambda R} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^{\Lambda R} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\langle \phi_c^2 \rangle_q \langle \phi_c^2 \rangle_{-q}}{(k^2 + \kappa_R^2) [(k+q)^2 + \kappa_R^2]} \approx \\ \approx 9K_d I_4(\kappa_R) \frac{1 - (\Lambda R)^{-\epsilon}}{\epsilon} + 12 \left( \frac{1}{3} + C - \ln 2 \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Для  $N$ -го коэффициента разложения функции Грина вместо (I.113) получим

$$\begin{aligned} [G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_N = c(-1)^N \left( \frac{4}{\bar{I}_4} \right)^{N+(M+d+1)/2} \Gamma \left( N + \frac{M+n+d}{2} \right) \times \\ \times \int d^n u \delta(|\mathbf{u}|-1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M} \int_0^\infty d \ln R^2 \int d^d x_0 R^{-d-M(d-2)/2} \phi_c \left( \frac{x_1-x_0}{R} \right) \dots \left( \frac{x_M-x_0}{R} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -N f(\kappa_R) + N \epsilon \ln R + \frac{n+8}{4} K_d I_4(\kappa_R) \frac{1 - (\Lambda R)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (75)$$

где константа  $c$  вычисляется в низшем порядке по  $\epsilon$  и дается формулой (I.114). Переходя к вершинной части, вместо (I.127) получаем

$$\begin{aligned}
 [\Gamma^{(0,2M)}(p_1, \dots, p_{2M})]_N &= c(-1)^N \frac{2\pi^{n/2}}{2^M \Gamma(M+n/2)} \left(\frac{4}{I_4}\right)^{N+M+5/2} \Gamma\left(N + \frac{2M+n+d}{2}\right) \times \\
 &\times \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-d+(d-2)M} \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_1} \dots \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_{2M}} \times \\
 &\times \exp \left\{ -Nf(\kappa_R) + N\epsilon \ln R + \frac{n+8}{4} K_d I_4(\kappa_R) \frac{1 - (\Lambda R)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right\}, \quad (76)
 \end{aligned}$$

где  $\langle \phi_c^3 \rangle_p$  — фурье-компонента функции  $\phi_c^3(x)$ , в низшем порядке по  $\epsilon$  определяемая выражением (14). Вершина  $\Gamma^{(0,2)}$  совпадает с собственной энергией и при  $M = 1, n = 0$  из (76) следует (13).

### 7. ИНСТАНТОННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $\epsilon \sim 1$

Для сопоставления с результатами других авторов [7, 25–27] обсудим инстантонные вычисления при  $d < 4$  без предположения близости  $d$  к 4. Такие вычисления близко следуют схеме для  $d > 4$ , описанной в [15] (отмечаем цифрой II ссылки на соответствующие формулы), с заменой  $\sum_x \rightarrow \int d^d x$  и  $\epsilon(p) \rightarrow p^2$ . Различие связано с необходимостью выделения наряду с вращательными модами нулевых трансляционных мод; дилатационная мода в отличие от предыдущего раздела рассматривается на общих основаниях. Соответственно, из трех разложений единицы (65) используются лишь первое и третье, а замена переменных (66) проводится с  $R = 1$ . Дополнительно к (II.65) требуется преобразование детерминанта  $D_L$ :

$$\frac{D'_L}{D_0} = \bar{D}(1) \prod_{\mu=1}^d \frac{\int d^d x \left(\frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_\mu}\right)^2}{3 \int d^d x \phi_c^2(x) \left(\frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_\mu}\right)^2}, \quad \bar{D}(1) = \prod'_s \left(1 - \frac{1}{\mu_s}\right) \quad (77)$$

(штрихом отмечаем исключение вклада трансляционных мод). Уравнение инстантона заменой переменных приводится к виду

$$\Delta \phi_c(x) + \phi_c^3(x) - \bar{\kappa}^2 \phi_c(x) = 0, \quad (78)$$

где  $\bar{\kappa}$  — произвольный параметр (см. ниже). Для коэффициентов разложения функции Грина получаем

$$\begin{aligned}
 [G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_N &= \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{(n+d+1)/2}} \left(\frac{I_6 - \bar{\kappa}^2 I_4}{d}\right)^{d/2} \left(\frac{4}{I_4}\right)^{(M+d)/2} \left(\frac{\kappa}{\bar{\kappa}}\right)^{(d-2)M/2} \times \\
 &\times \left[-\bar{D}(1)\bar{D}^{n-1}(1/3)\right]^{-1/2} \left[-\frac{4}{I_4} \left(\frac{\kappa}{\bar{\kappa}}\right)^{d-4}\right]^N \Gamma\left(N + \frac{M+n+d-1}{2}\right) \times \\
 &\times \int d^d x_0 \phi_c\left(\frac{\kappa}{\bar{\kappa}}x_1 - x_0\right) \dots \phi_c\left(\frac{\kappa}{\bar{\kappa}}x_M - x_0\right) \int d^n u \delta(|u| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M}, \quad (79)
 \end{aligned}$$

где

$$I_p = \int d^d x \phi_c^p(x). \quad (80)$$

При  $d = 4 - \epsilon$  эквивалентность (75) и (79) имеет место лишь при  $N\epsilon \gg 1$ , когда интегрирование по  $R$  в (75), соответствующее дилатационной моде, может быть выполнено в перевальном приближении. Перевал имеет место при  $\kappa_R = R_0$ , где  $R_0$  — корень уравнения (58); при этом в силу (72) оказывается  $\mu_0 = 0$  и уравнение инстантона (68) сводится к (78) с  $\bar{\kappa} = R_0$ . Выражение (79) с  $\bar{\kappa} = R_0$  после оценки предэкспоненты в нулевом порядке по  $\epsilon$  отличается от результата перевального приближения в (75) постоянным множителем

$$\left[ \frac{\lambda_0^L + R_0^2}{3I_4 R_0^2 (-\ln R_0 + \ln 2 - C - 3/2)} \int d^d x [e_0^L(x)]^2 \right]^{1/2} \approx \left[ \frac{R_0^2 - \rho^2 \ln \rho}{R_0^2 \ln \epsilon} \right]^{1/2}, \quad (81)$$

где  $\lambda_0^L \equiv -\rho^2$  и  $e_0^L(x)$  — собственное значение и собственная функция оператора  $-\Delta - 3\phi_c^2(x)$ , соответствующие дилатационной моде; нормировка функции  $e_0^L(x)$  выбрана так, что она совпадает с  $[\partial\phi_c(x)/\partial R]_{R=1}$  в области  $|x| \lesssim 1$ . Величина (81) равна единице при  $\rho \sim \epsilon$  или  $-\lambda_0^L \sim \epsilon^2$ ; из теории возмущений легко убедиться, что вклад в  $\lambda_0^L$  первого порядка по  $\epsilon$  обращается в нуль из-за расходимости нормировочного интеграла для  $e_0^L(x)$  при  $d = 4$ .

При  $2 \leq d < 4$  детерминанты  $\bar{D}(1)$  и  $\bar{D}(1/3)$  содержат расходимости [25], которые устраняются их перенормировкой согласно (II.75) с одновременным переходом к перенормированной энергии  $E$  (метод Томаса–Ферми дает  $\mu_s \sim s^{2/d}$  при  $s \gg 1$  и в (II.69) расходится первая сумма). Полагая  $\bar{\kappa} = 1$  и суммируя далекие члены ряда теории возмущений для двухточечной ( $M = 2$ ) функции Грина по формуле (II.90), нетрудно получить выражение для флуктуационного хвоста плотности состояний:

$$\begin{aligned} \nu(E) = & \frac{(4-d)2^{d-1}}{(2\pi)^{(d+1)/2}} \left( \frac{I_6 - I_4}{I_4 d} \right)^{d/2} \left| \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} |E|^{(d-2)/2} \left( \frac{I_4 |E|^{(4-d)/2}}{2a_0^d W^2} \right)^{(d+1)/2} \times \\ & \times \exp \left( - \frac{I_4 |E|^{(4-d)/2}}{2a_0^d W^2} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

(учтена связь  $4I_2 = (4-d)I_4$ ), энергетическая зависимость которого совпадает с полученной Карди [27]. Нормировка на невозмущенную плотность состояний  $\nu_0(E)$  и переход от перенормированной энергии  $E$  к затравочной  $E_B$  со сдвинутым началом отсчета (см. формулу (12) в [26]) дает результаты Брезана и Паризи [26]<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\nu(E_B)}{\nu_0(-E_B)} = & \left( \frac{I_6 - I_4}{3} \right)^{3/2} \left| I_4 \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \frac{|E_B|}{(a_0^d W^2)^2} \times \\ & \times \exp \left( - \frac{I_4}{16\pi} - \frac{I_4 |E_B|^{1/2}}{2a_0^d W^2} \right), \quad d = 3, \\ \frac{\nu(E_B)}{\nu_0(-E_B)} = & \frac{I_6 - I_4}{8\pi^2} \left| I_4 \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \left( \frac{4\pi |E_B|}{a_0^d W^2} \right)^{3/2 - I_4/8\pi} \times \\ & \times \exp \left( - \frac{I_4}{8\pi} - \frac{I_4 |E_B|}{2a_0^d W^2} \right), \quad d = 2. \end{aligned} \quad (83)$$

<sup>1)</sup> В первых частях окончательных формул (16) работы [26] имеются явные опечатки; подстановка в (83) численных значений параметров, полученных в [25], дает коэффициенты, приведенные в [26] во вторых частях формул (16).

При  $d < 2$  расходимости в детерминантах отсутствуют и результат (82) справедлив в терминах затравочных величин (т.е. с заменой  $E \rightarrow E_B$ ,  $\overline{D}_R(1) \rightarrow \overline{D}(1)$ ,  $\overline{D}_R(1/3) \rightarrow \overline{D}(1/3)$ ). При  $d = 1$  уравнение (78) с  $\bar{\kappa} = 1$  имеет решение  $\phi_c(x) = \sqrt{2}/\text{ch } x$ , а уравнение (II.64)

$$y'' - y + \frac{\mu_s}{\text{ch}^2 x} y = 0 \quad (84)$$

имеет собственные значения  $\mu_s = s(s+1)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , так как заменой  $y = \tilde{y} \text{ch}^{-s} x$  оно приводится к виду, аналогичному (I.121)). Вычисление входящих в (82) параметров

$$\overline{D}(1) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq 2}}^{\infty} \frac{(s+3)(s-2)}{s(s+1)} = -\frac{1}{5}, \quad \overline{D}(1/3) = \prod_{s=2}^{\infty} \frac{(s+2)(s-1)}{s(s+1)} = \frac{1}{3}, \quad (85)$$

$$I_4 = \frac{16}{3}, \quad I_6 = \frac{128}{15}$$

дает результат

$$\nu(E_B) = \frac{4}{\pi} \frac{|E_B|}{a_0^d W^2} \exp \left\{ -\frac{8|E_B|^{3/2}}{3a_0^d W^2} \right\}, \quad (86)$$

совпадающий с точным решением Гальперина [10, 30].

Автор признателен участникам семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского правительства (гранты МОН 000 и МОН 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19527).

## Литература

1. A. Aharony and Y. Imry, J. Phys. C **10**, L487 (1977).
2. А. Л. Эфрос, УФН **126**, 41 (1978).
3. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
4. D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 92 (1974).
5. М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).
6. D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
7. М. В. Садовский, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **7**, 1 (1986).
8. D. Vollhardt, P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
9. И. М. Сулов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
10. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
11. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
12. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
13. К. Вильсон, Дж. Коугт, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение*, Мир, Москва (1975).
14. И. М. Сулов, ЖЭТФ **102**, 1951 (1992).
15. И. М. Сулов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).
16. И. М. Сулов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).

17. И. М. Сулов, Письма в ЖЭТФ 63, 855 (1996).
18. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ 72, 411 (1977).
19. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ 56, 2087 (1969); А. М. Поляков, ЖЭТФ 57, 271 (1969).
20. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
21. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. VI, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic Press, New York (1976).
22. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
23. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).
24. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 66, 647 (1974).
25. E. Brezin and G. Parisi, *J. Stat. Phys.* 19, 269 (1978).
26. E. Brezin and G. Parisi, *J. Phys. C* 13, L307 (1980).
27. J. L. Cardy, *J. Phys. C* 11, L321 (1978).
28. И. М. Лифшиц, УФН 83, 617 (1964).
29. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D* 15, 1544 (1977).
30. B. I. Halperin, *Phys. Rev.* 139, A104 (1965).