

ДАЛЬНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЙАНИИ ВОЛН В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СРЕДАХ

Д. Б. Рогозкин

Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 сентября 1996 г.

Рассмотрены дальние корреляции в отраженном и прошедшем потоках при когерентном транспорте волн в неупорядоченной среде с дискретными неоднородностями. Коррелятор и спектр флуктуаций интенсивности в общем виде выражены через амплитуду одноцентрового рассеяния и пропагаторы средней интенсивности излучения. Учтены одновременно случайная интерференция волн и флуктуации числа рассеивающих центров в микрообъеме среды. Подробные вычисления проведены для двух предельных режимов распространения излучения — пространственной диффузии и малоуглового многократного рассеяния. Показано, что сохранение полного потока при упругом рассеянии приводит к образованию провала в спектре и, соответственно, к отрицательной корреляции интенсивностей на больших расстояниях. В случае пространственной диффузии эта особенность проявляется при отражении, а при малоугловом многократном рассеянии — при прохождении через слои. Проанализирована относительная роль различных источников возникновения флуктуаций интенсивности, а также чувствительность корреляций к факторам, влияющим на режим распространения волн — ограниченности рассеивающего образца, поглощению в среде, присутствию частотного сдвига в падающих волнах. Обнаружено, что флуктуации распределения рассеивателей наиболее заметно проявляются в среде с сильными — «неборновскими» — центрами, особенно, если они обладают поглощением.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, интерференция волн при многократном упругом рассеянии является причиной целого класса необычных — «мезоскопических» — эффектов, возникающих при транспорте электронов и классических волн в неупорядоченных средах [1–3]. Примерами подобных эффектов могут служить универсальные флуктуации проводимости малых металлических образцов [4–6], корреляции в спеклах — сильно флуктуирующих в пространстве распределениях интенсивности — при многократном рассеянии когерентного света и микроволнового излучения [3, 7–9].

Впервые интерес к анализу корреляций многократно рассеянных волновых полей возник достаточно давно в связи с изучением мерцаний когерентного лазерного излучения и радиоволн в турбулентных средах [10]. В рамках модели случайной сплошной среды с крупномасштабными (размер a много больше длины волны λ) слабопреломляющими неоднородностями этот вопрос исследован чрезвычайно подробно (см. обзоры [10–13]). Область применимости результатов теории [10–13] ограничена теми условиями, которые характерны для турбулентных сред (очень крупные неоднородности показателя преломления, борновское приближение для однократного рассеяния, отсутствие поглощения).

Аналогичная проблема для сред с дискретными рассеивателями стала предметом исследований сравнительно недавно в связи с работами по диффузионному транспорту электронов и классических волн (когерентного света, микроволнового излучения) в неупорядоченных системах [1–9, 14–22]. Характерные для турбулентных сред условия в этом случае не выполняются, и режим корреляций волн оказывается иным. При этом может не работать борновское приближение для рассеяния на отдельном центре, существенную роль могут играть эффекты, обусловленные поглощением излучения.

Несмотря на большое количество работ, посвященных изучению флуктуаций интенсивности в неупорядоченных средах [1, 7–9, 14–33], соответствующая общая теория развита по сравнению с [10–13] в меньшей степени. Имеющиеся теоретические результаты (см., например, [14, 17]) относятся к борновскому приближению для одноцентрового рассеяния и, за исключением [32], получены непосредственно для того или иного предельного режима распространения волн в среде. Из-за использования борновского приближения не рассматривался, в частности, вопрос о флуктуациях интенсивности, связанных со случайной микронеоднородностью среды.

В борновском приближении учитывается только один источник крупномасштабных флуктуаций интенсивности в плоскости наблюдения — расплывание в пространстве при многократном рассеянии локального всплеска интенсивности, возникающего в объеме среды из-за интерференции волн. Такой источник флуктуаций предполагается как при ланжевенском [1, 15, 18], так и при диаграммном [14, 17] описании дальних корреляций диффузионных потоков в неупорядоченной среде. Как показано ниже, при выходе за рамки борновского приближения для одноцентрового рассеяния включается еще один источник флуктуаций интенсивности — локальное возмущение пространственного распределения интенсивности и объемной спекл-структуры из-за пуассоновских флуктуаций числа рассеивателей в микрообъеме среды. Этот источник флуктуаций имеет ту же природу, что и рассмотренное в [34, 35] изменение коэффициента прохождения, возникающее при добавлении в среду дополнительного рассеивателя. В отличие от борновского приближения, в котором учитываются только парные корреляции волновых полей, включение в рассмотрение локальной неоднородности среды требует учета корреляций между всеми четырьмя полями, входящими в определение коррелятора интенсивности.

Ниже дано решение задачи о вычислении спектра и корреляционной функции флуктуаций интенсивности при многократном рассеянии когерентного излучения в неупорядоченной среде с дискретными неоднородностями. Подход, развитый ранее для описания флуктуаций при малоугловом рассеянии в турбулентной среде [10–13], обобщен на случай произвольного распределения многократно рассеянных волн. В лестничном приближении выведено транспортное уравнение для коррелятора интенсивностей, свободное от ограничений на силу одноцентрового рассеяния, и найдено замкнутое аналитическое решение этого уравнения. Решение в общем виде выражается через амплитуду рассеяния и лестничные пропагаторы и, таким образом, позволяет свести задачу о вычислении спектра и корреляционной функции флуктуаций интенсивности к решению уравнения переноса [36, 37] для средней интенсивности. Найденные в работе соотношения обобщают основные формулы [32, 33] на случай сильных рассеивателей и включают полученные ранее результаты (см., например, [1, 3, 14, 17–18]) как соответствующие предельные случаи.

Выход за рамки борновского приближения для одноцентрового рассеяния позволяет учесть наряду с чисто интерференционным механизмом флуктуаций интенсивности,

обусловленный случайной микронеоднородностью среды. Это, с одной стороны, открывает некогерентный канал флуктуаций (в борновском приближении он отсутствовал), а с другой, может существенно сказаться и на флуктуациях когерентной природы. Наиболее сильно эффекты неоднородности проявляются в средах с крупными (размер больше длины волны) центрами, особенно, если они являются поглощающими. Вклад некогерентных флуктуаций может оказаться также важным при рассеянии сдвинутых по частоте волн, когда возникает проблема интерпретации наблюдаемого в эксперименте затухания флуктуаций с ростом частотного сдвига [20–25].

Подробное исследование дальних корреляций интенсивности проведено для двух предельных режимов многократного рассеяния волн — пространственной диффузии излучения в системе центров малого радиуса (случай произвольных рассеивающих центров рассмотрен в Приложении В) и малоуглового многократного рассеяния в среде с крупномасштабными неоднородностями. Проанализирована зависимость корреляций от таких факторов как ограниченность рассеивающего образца, поглощение в среде, наличие частотного сдвига в падающих волнах. Показано, что форма спектра флуктуаций при низких пространственных частотах и, соответственно, асимптотика коррелятора интенсивностей существенным образом зависят от условия сохранения полного потока излучения. В случае пространственной диффузии эта особенность проявляется в спектре флуктуаций отраженной от среды интенсивности, а при малоугловом многократном рассеянии — в спектре прошедшей интенсивности. В обоих случаях сохранение потока при упругом рассеянии приводит к образованию провала в спектре и, соответственно, к отрицательной корреляции интенсивностей на больших расстояниях. Следствием сохранения потока является и тот факт, что флуктуации коэффициента диффузного отражения определяются только длинными траекториями распространения волн и поэтому, в отличие от выводов [14, 19], оказываются чувствительными к любым факторам, ограничивающим длину траекторий.

Рассмотренные в настоящей работе явления должны наблюдаться в условиях, типичных для многих экспериментов по многократному рассеянию когерентного света и микроволнового излучения (см., например, [3, 7, 9, 20–25, 30]), и могут представлять интерес для исследований транспортных свойств неупорядоченных сред.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть на слой $0 < z < L$ неупорядоченной среды падает плоская волна единичной амплитуды.

Задача о вычислении спектра и корреляционной функции флуктуаций интенсивности сводится к нахождению усредненных по расположению рассеивателей моментов волнового поля \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 и \mathcal{S}_4 , где

$$\mathcal{S}_n = \langle \Psi(1) \dots \Psi^*(n) \rangle. \quad (1)$$

В условиях слабой локализации волн ($k_0 l \gg 1$, l — длина упругого рассеяния, $k_0 = 2\pi/\lambda$) основной вклад в моменты волнового поля дают диаграммы лестничного типа. Их суммирование приводит к системе транспортных уравнений (рис. 1).

Уравнения для первых двух моментов — среднего поля и функции взаимной когерентности — хорошо известны (см., например, [37, 38]). Среднее поле в веществе

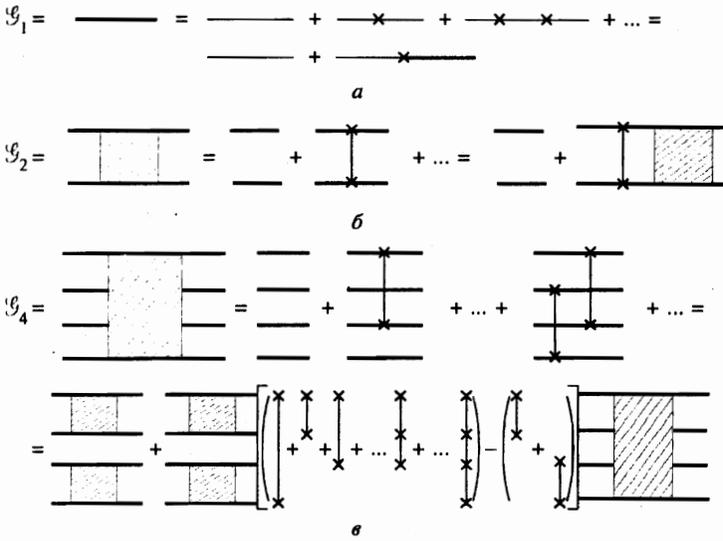


Рис. 1

удовлетворяет следующему уравнению (рис. 1а):

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1^{(0)} + G_0 \sum_a \hat{\mathcal{T}}_a \mathcal{G}_1, \tag{2}$$

где $\mathcal{G}_1^{(0)}$ — поле в падающей волне, $G_0 = (\nabla^2 + k_0^2 + i0)^{-1}$ — функция Грина свободного волнового уравнения, $\hat{\mathcal{T}}_a$ — матрица рассеяния на расположенном в точке \mathbf{r}_a центре. В случае, когда свободный член в (2) отвечает полю точечного источника, $\mathcal{G}_1^{(0)} = G_0$, уравнение (2) определяет функцию Грина G задачи упругого рассеяния [37]. Зная G , уравнение для второго момента можно записать следующим образом:

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2^{(0)} + GG^+ \sum_a \hat{\mathcal{T}}_a \hat{\mathcal{T}}_a^+ \mathcal{G}_2, \tag{3}$$

где $\mathcal{G}_2^{(0)} = \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_1$ — второй момент нерассеянного поля. На языке диаграмм уравнение (3) изображено на рис. 1б.

Транспортное уравнение для четвертого момента волнового поля также нетрудно вывести последовательным суммированием лестничных диаграмм (рис. 1в):

$$\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_4^{(0)} + \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_2 \sum_a \hat{h}_a \hat{h}_a^+ \mathcal{G}_4, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{G}_4^{(0)} = \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_2, \quad \hat{h}_a = \hat{h}_a^+ = \hat{\mathcal{T}}_a (G^+)^{-1} + G^{-1} \hat{\mathcal{T}}_a^+ + \hat{\mathcal{T}}_a \hat{\mathcal{T}}_a^+. \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) имеют похожую структуру. В уравнении (4) второй момент волнового поля \mathcal{G}_2 играет ту же роль, что и функция Грина G в уравнении (3) для самого

второго момента. Свободные члены в уравнениях (3) и (4) описывают распространение соответственно нерассеянных полей и некоррелированных интенсивностей. В уравнении (4) матрица \hat{h}_a играет роль матрицы рассеяния $\hat{\mathcal{T}}_a$. Величина $\sum_a \hat{\mathcal{T}}_a \hat{\mathcal{T}}_a^+$ в (3) определяет парную корреляцию полей, в то время как величина $\hat{H} = \sum_a \hat{h}_a \hat{h}_a^+$ в (4) — корреляцию интенсивностей.

Уравнения (2)–(5) являются общими транспортными уравнениями, описывающими корреляции значений интенсивности когерентного излучения в неупорядоченной среде. Они справедливы для любого режима многократного рассеяния волн, включая пространственную диффузию и малоугловое многократное рассеяние. В последнем случае систему (2)–(5) можно рассматривать как обобщение на случай сильных дискретных рассеивателей известного транспортного уравнения для четвертого момента волнового поля, подробно изученного в контексте задачи о флуктуациях интенсивности при распространении волн в турбулентной среде [10–13]. В малоугловом приближении уравнение (4), (5) переходит в соответствующее уравнение теории [10–13], если в величине $\hat{H} = \sum_a \hat{h}_a \hat{h}_a^+$ оставить только члены, ответственные за парные корреляции полей. Для этого в (5) нужно пренебречь квадратичным по $\hat{\mathcal{T}}_a$ слагаемым и подставить значение $\hat{\mathcal{T}}_a$ в борновском приближении.

Преобразуем уравнения (3) и (4), (5), считая, что рассеиватели находятся на достаточно удалении друг от друга, так что каждое последующее рассеяние происходит в зоне Фраунгофера отдельного рассеивающего центра, $l \gg \max(k_0^{-1}, k_0 a^2)$, т. е. выполняется условие противоположное принятому в [10–13]. В этом случае, предполагая, что рассеяние носит многократный характер, в задаче можно выделить быстрые и медленные пространственные переменные (см., например, [37, 38]). Масштаб изменения быстрых переменных определяется радиусом когерентности рассеянных полей ($r_{coh} \sim \lambda/\theta$, где θ — характерный угол многократного рассеяния в среде), а масштаб изменения медленных переменных — величиной характерного пространственного отклонения траекторий распространения волн в рассеивающем образце ($r_{spat} > l \theta \gg r_{coh}$). Выполняя фурье-преобразование по быстрым переменным, перейдем к $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ -представлению (координаты \mathbf{r} , направления распространения волн $\mathbf{\Omega}$) и выразим все наблюдаемые величины через плавную функцию направлений и координат — «лучевую» интенсивность излучения $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$.

Уравнение (3) преобразуется в обычное уравнение переноса [36–38]. Для этого нужно воспользоваться явным видом функции Грина задачи рассеяния [37]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\frac{1}{4\pi} \exp\left(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - \frac{1}{2}n\sigma_{tot}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (6)$$

где n — число рассеивателей в единице объема, σ_{tot} — полное сечение одноцентрового взаимодействия, и перейти к смешанному представлению $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$. Учитывая справедливое при $k_0 l \gg 1$ равенство

$$\begin{aligned} \iint d\mathbf{r}_d d\mathbf{r}'_d G\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_d}{2}, \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}'_d}{2}\right) G^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_d}{2}, \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}'_d}{2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_d + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'_d) = \\ = 4\pi^4 \frac{\exp(-n\sigma_{tot}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \delta\left(\mathbf{k} - k_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) \delta\left(\mathbf{k}' - k_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

и вводя обозначения $\mathbf{\Omega} = \mathbf{k}/k$, $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{k}'/k'$, запишем уравнение (3) в виде

$$I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = I^{(0)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + n \int d\mathbf{r}' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{d\sigma}{d\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}') \frac{\exp(-n\sigma_{tot}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \delta\left(\boldsymbol{\Omega} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) I(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}'), \quad (8)$$

где $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \langle I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ — усредненная по положению рассеивателей интенсивность излучения в точке \mathbf{r} в направлении $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}') = |f(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}')|^2$$

— дифференциальное сечение упругого рассеяния, $f(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}')$ — амплитуда рассеяния, $\hat{f} = -(4\pi)^{-1} \hat{\mathcal{S}}$. В (8) и далее для краткости мы опускаем знак усреднения $\langle \dots \rangle$ в обозначении средней интенсивности, оставляя его в явном виде только у второго момента интенсивностей.

При выводе (8) учтено присутствие δ -функций в равенстве (7), которое позволяет записать связь между $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ и $\mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ в виде [37]

$$I\left(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{k}}{k}\right) \frac{\delta(k - k_0)}{k^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{R}_1 \mathcal{S}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) \exp\{-i\mathbf{k}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)\} \delta\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}_1}{2}\right). \quad (9)$$

Для направленных точечного и плоского источников единичной мощности нерассеянная интенсивность в (8) равна, соответственно,

$$I^{(0)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}|\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\Omega}_1) = \frac{\exp(-n\sigma_{tot}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_1) \delta\left(\boldsymbol{\Omega} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right), \quad (10)$$

$$I^{(0)}(z, \boldsymbol{\Omega}|z_1, \boldsymbol{\Omega}_1) = \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}_z|} \exp\left(-n\sigma_{tot} \frac{|z - z_1|}{|\boldsymbol{\Omega}_z|}\right) \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_1)$$

Поддействовав оператором $(\boldsymbol{\Omega}\nabla_{\mathbf{r}} + n\sigma_{tot})$ на обе части уравнения (8), получим уравнение переноса в обычной интегродифференциальной форме. Для точечного направленного источника (см. (10)) оно имеет вид [36]

$$(\boldsymbol{\Omega}\nabla_{\mathbf{r}} + n\sigma_{tot})I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}|\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\Omega}_1) = \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_1)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + n \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{d\sigma}{d\boldsymbol{\Omega}'} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}'|\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\Omega}_1). \quad (11)$$

В случае, когда падающие на среду поля различаются по частоте на $\Delta\omega \ll \omega_0$ ($\omega_0 = ck_0$ — несущая частота, c — скорость света), при переходе к $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ -представлению вместо (7) нужно использовать соотношение

$$\iint d\mathbf{r}_d d\mathbf{r}_d' G_{\omega_0 + \Delta\omega/2}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_d}{2}, \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_d'}{2}\right) G_{\omega_0 - \Delta\omega/2}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_d}{2}, \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_d'}{2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_d + i\mathbf{k}'\mathbf{r}_d') = 4\pi^4 \frac{\exp[-(n\sigma_{tot} - i(\Delta\omega)/c)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \delta\left(\mathbf{k} - k_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right) \delta\left(\mathbf{k}' - k_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\right). \quad (12)$$

Уравнения для определенной в соответствии с (9) величины $I_{\omega_0}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \Delta\omega)$ можно тогда получить из уравнений (8) или (11), если вместо $n\sigma_{tot}$ подставить в них $n\sigma_{tot} - i(\Delta\omega)/c$.

По физическому смыслу $I_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \Delta\omega)$ представляет собой интенсивность модулированного с частотой $\Delta\omega$ сигнала.

Для того чтобы перейти от уравнения (4) к уравнению в $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ -представлении, нужно выделить у четвертого момента поля \mathcal{S}_4 быстрые и медленные переменные. В условиях многократного рассеяния \mathcal{S}_4 является резкой, убывающей на масштабах r_{coh} функцией разностных переменных и плавной функцией суммарных переменных. Когда малы значения $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$, момент \mathcal{S}_4 является плавной функцией переменных $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и $(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)/2$. Аналогично зависит \mathcal{S}_4 и от переменных, которые получают, если \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_4 переставить местами. Это следует из условия симметрии

$$\mathcal{S}_4(1, 2, 3, 4) = \mathcal{S}_4(1, 4, 3, 2), \tag{13}$$

отвечающего перестановке входящих в определение (1) сопряженных волновых полей. При малых значениях разностных переменных основной вклад в \mathcal{S}_4 будут давать диаграммы, содержащие не менее одного акта рассеяния в «выходящих» лестничных пропагаторах. Сумма таких диаграмм определяет часть четвертого момента $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ (см. Приложение А). Иметь дело с $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ удобнее, чем с \mathcal{S}_4 . В отличие от \mathcal{S}_4 величина $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ не подчиняется условию (13), и у $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ можно однозначно выделить быстрые и медленные переменные. Кроме того, в условиях многократного рассеяния \mathcal{S}_4 можно выразить через $\mathcal{S}_4^{(sc)}$, а для $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ написать аналогичное (4) замкнутое уравнение.

В задаче о дальних пространственных корреляциях наблюдаемые величины удается выразить через плавную функцию координат и углов — второй момент интенсивности. Он связан с $\mathcal{S}_4^{(sc)}$ соотношением

$$\begin{aligned} & \left\langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2} \left(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{k}}{k} \right) I_{\omega_0-\Delta\omega/2} \left(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1 = \frac{\mathbf{k}_1}{k_1} \right) \right\rangle \frac{\delta(k - k_0)}{k^2} \frac{\delta(k_1 - k_0)}{k_1^2} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \dots \int d\mathbf{R}_1 \dots d\mathbf{R}_4 \times \\ & \times \mathcal{S}_4^{(sc)} \left(\mathbf{R}_1, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \mathbf{R}_2, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}; \mathbf{R}_3, \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \mathbf{R}_4, \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \times \\ & \times \delta \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}{2} \right) \delta \left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4}{2} \right) \exp \{ -i\mathbf{k}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - i\mathbf{k}_1(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4) \}. \end{aligned} \tag{14}$$

Величина $\langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1) \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1) \rangle = \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}|\mathbf{\Omega}_0) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1|\mathbf{\Omega}_0) \rangle^{(sc)} + \\ & + n \int d\mathbf{r}' \iint d\mathbf{\Omega}' d\mathbf{\Omega}_1' \iint d\mathbf{\Omega}'' d\mathbf{\Omega}_1'' \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}|\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}') I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1|\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}_1') \rangle^{(sc)} \times \\ & \times \left[h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'|\mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') h(\mathbf{\Omega}_1', \mathbf{\Omega}_1'| \mathbf{\Omega}_1'', \mathbf{\Omega}_1'') \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}'') I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}_1'') \rangle + \right. \\ & + I_{\omega_0+\Delta\omega/2}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}|\mathbf{\Omega}_0) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}_1|\mathbf{\Omega}_0) \left. + \right. \\ & \left. + h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'|\mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}_1'') h(\mathbf{\Omega}_1', \mathbf{\Omega}_1'| \mathbf{\Omega}_1'', \mathbf{\Omega}'') \langle I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}'', \Delta\omega) I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}_1'', -\Delta\omega) \rangle \right], \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2} I_{\omega_0-\Delta\omega/2} \rangle^{(sc)} = I_{\omega_0+\Delta\omega/2} I_{\omega_0-\Delta\omega/2} - I_{\omega_0+\Delta\omega/2}^{(0)} I_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{(0)}$$

$$h(\Omega, \Omega_1 | \Omega', \Omega'_1) = \frac{2\pi i}{k_0} [f(\Omega \Omega') \delta(\Omega_1 - \Omega'_1) - \delta(\Omega - \Omega') f^*(\Omega_1 \Omega'_1)] + f(\Omega \Omega') f^*(\Omega_1 \Omega'_1). \quad (16)$$

Входящие в (15) пропагаторы интенсивности имеют следующий смысл. Величина $I_\omega(\mathbf{r}, \Omega | \Omega_0)$ есть интенсивность излучения на частоте ω в точке \mathbf{r} в направлении Ω при падении на поверхность среды в направлении Ω_0 плоской волны; $I_\omega(\mathbf{r}, \Omega | \Omega_0)$ нормирована на единичную z -компоненту падающего потока. Величина $I_\omega(\mathbf{r}, \Omega | \mathbf{r}', \Omega')$ есть интенсивность излучения в точке \mathbf{r} в направлении Ω от точечного источника единичной мощности, расположенного в точке \mathbf{r}' и испускающего волны в направлении Ω' . Величины $I_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \Omega | \Omega_0)$ и $I_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \Omega | \mathbf{r}', \Omega')$ — значения нерассеянной интенсивности (10).

Аналогично (15) будет выглядеть уравнение и для входящего во второе интегральное слагаемое уравнения (15) момента интенсивности $\langle I_{\omega_0}(\mathbf{r}, \Omega, \Delta\omega) I_{\omega_0}(\mathbf{r}_1, \Omega_1, -\Delta\omega) \rangle$. В отличие от (15) в него войдут пропагаторы интенсивности $I_{\omega_0}(\mathbf{r}, \Omega, \pm\Delta\omega)$, отвечающие падающим волнам со сдвигом частоты $\Delta\omega$.

В правой части уравнения (15) первое слагаемое — произведение средних значений интенсивности — описывает независимое распространение двух «лучей» (каждый «луч» соответствует интенсивности и описывается суммой лестничных диаграмм, см. рис. 1б, в), а следующие два интегральных слагаемых — корреляцию «лучей» соответственно из-за некогерентного рассеяния на отдельном центре и вследствие интерференции.

Как показывает анализ, в условиях $l \gg \max(k_0^{-1}, k_0 a^2)$ амплитуда корреляций должна быть много меньше среднего значения интенсивности:

$$\langle I(\mathbf{r}, \Omega) I(\mathbf{r}_1, \Omega_1) \rangle - I(\mathbf{r}, \Omega) I(\mathbf{r}_1, \Omega_1) \ll I(\mathbf{r}, \Omega) I(\mathbf{r}_1, \Omega_1),$$

и поэтому уравнение (15) можно решать методом итераций, раскладывая второй момент интенсивности в ряд по кратности взаимодействия «лучей». Малыми параметрами этого разложения оказываются величины $1/(k_0 l)^2$ и σ/l^2 , характеризующие соответственно когерентное и некогерентное взаимодействие «лучей».

Основной вклад в корреляционную функцию дает первая итерация. В этом приближении для второго момента интенсивности получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \Omega) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \Omega_1) \rangle &= \langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \Omega | \Omega_0) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \Omega_1 | \Omega_0) \rangle^{(sc)} + \\ &+ n \int d\mathbf{r}' \iint d\Omega' d\Omega'_1 \iint d\Omega'' d\Omega''_1 (I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \Omega | \mathbf{r}', \Omega') I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \Omega_1 | \mathbf{r}', \Omega'_1))^{(sc)} \times \\ &\times [h(\Omega', \Omega' | \Omega'', \Omega'') h(\Omega'_1, \Omega'_1 | \Omega''_1, \Omega''_1) I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \Omega'' | \Omega_0) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \Omega''_1 | \Omega_0) + \\ &+ h(\Omega', \Omega' | \Omega'', \Omega''_1) h(\Omega'_1, \Omega'_1 | \Omega''_1, \Omega'') (I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \Omega'' | \Omega_0, \Delta\omega) I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \Omega''_1 | \Omega_0, -\Delta\omega))]^{(sc)}. \quad (17) \end{aligned}$$

Выражение (17) описывает дальние корреляции интенсивности при произвольном законе однократного и многократного рассеяния волн в неупорядоченной среде. Оно позволяет в общем виде выразить коррелятор интенсивностей через значение средней интенсивности и свести таким образом задачу о вычислении корреляционной функции к решению обычного уравнения переноса [36, 37] с соответствующими источниками.

Мы интересуемся только такими малыми значениями сдвига частот, когда имеет смысл говорить об интерференции многократно рассеянных волн ($\Delta\omega \ll \omega_0/(k_0 l)$). Поэтому в правой части (17) можно везде положить $\omega_0 \pm \Delta\omega/2 \approx \omega_0$, оставив конечной разницу частот только в аргументе пропагаторов $I_{\omega_0}(\mathbf{r}, \Omega | \Omega_0, \pm\Delta\omega)$ в последнем, интерференционном, члене.

Входящую в некогерентную часть выражения (17) h -функцию можно с помощью оптической теоремы (см., например, [39]) преобразовать к виду

$$h(\Omega', \Omega' | \Omega'', \Omega'') = -\sigma_{tot} \delta(\Omega' - \Omega'') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega' | \Omega''). \quad (18)$$

Отметим, что некогерентный вклад в (17) описывает флуктуации интенсивности, обусловленные только пуассоновскими флуктуациями числа рассеивателей в микрообъеме. Этот вклад можно было бы получить с помощью подхода, развитого ранее для описания флуктуаций функции распределения кинетического уравнения Больцмана в неравновесном газе [40]. Для этого в уравнение переноса для интенсивности (см. (8) или (11)) нужно подставить возмущенное локально-неоднородное распределение рассеивателей $n + \delta n(\mathbf{r})$ и, вычисляя затем коррелятор $\langle \delta I \delta I_1 \rangle$, воспользоваться известным соотношением $\langle \delta n(\mathbf{r}) \delta n(\mathbf{r}_1) \rangle = n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, справедливым для некоррелированного расположения рассеивающих центров.

Зная второй момент $\langle I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \Omega) I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \Omega_1) \rangle$, можно вычислить наблюдаемые на опыте величины (см. Приложение Б) — корреляционную функцию между локальными значениями плотности выходящего из среды потока излучения $C(\rho)$ и ее фурье-образ — пространственный спектр флуктуаций $M(\mathbf{q})$:

$$M(\mathbf{q}) = \int d^2\rho \exp(-i\mathbf{q}\rho) C(\rho), \quad (19)$$

где $\rho = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)_{||}$ — вектор в плоскости xy , параллельной границе слоя. Асимптотика $C(\rho)$, характеризующая дальние пространственные корреляции, связана с $\langle I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \Omega) I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \Omega_1) \rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} C(z_f, \rho = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)_{||}, \Delta\omega) &= \\ &= \int_{(\Omega_n) > 0} d\Omega \int_{(\Omega_1, \Omega_n) > 0} d\Omega_1 (\Omega \Omega_n) (\Omega_1 \Omega_n) [\langle I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}(z_f, \mathbf{r}_{||}, \Omega) \times \\ &\times I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}(z_f, \mathbf{r}_{||}, \Omega_1) \rangle - \langle I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}(z_f, \Omega | \Omega_0) I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}(z_f, \Omega_1 | \Omega_0) \rangle^{(sc)}], \end{aligned} \quad (20)$$

где z_f — координата границы слоя, $z_f = 0$ в геометрии отражения и $z_f = L$ в геометрии прохождения, Ω_n — внешняя нормаль к соответствующей границе. Хотя соотношение (20) определяет корреляционную функцию между локальными значениями плотности потока, в соответствии с установившейся традицией (см., например, [10–13, 18, 37]) мы будем пользоваться термином «корреляционная функция интенсивности».

В дальнейшем нам, как правило, будет удобнее иметь дело не с корреляционной функцией $C(\rho)$, а со спектром флуктуаций $M(\mathbf{q})$. Форма спектра при низких пространственных частотах q содержит информацию о дальних пространственных корреляциях интенсивности и оказывается весьма чувствительной к изменению режима распространения волн в неупорядоченной среде. Значение спектра при нулевой пространственной частоте определяет флуктуации полных коэффициентов отражения или прохождения:

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{\omega_0 + \Delta\omega/2} \delta T_{\omega_0 - \Delta\omega/2} \rangle &= \frac{1}{A} M(z_f = L, \mathbf{q} = 0, \Delta\omega), \\ \langle \delta R_{\omega_0 + \Delta\omega/2} \delta R_{\omega_0 - \Delta\omega/2} \rangle &= \frac{1}{A} M(z_f = 0, \mathbf{q} = 0, \Delta\omega), \end{aligned} \quad (21)$$

где A — площадь поверхности слоя. Коэффициенты отражения R и прохождения T мы определяем как нормированные на единичную z -компоненту падающего потока значения полного отраженного и прошедшего потоков излучения [36, 37]. В частности,

$$\begin{aligned} \langle R_\omega \rangle &= \int_{(\mathbf{\Omega}_n) > 0} d\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}_n) I_\omega(z_f = 0, \mathbf{\Omega} | z_i = 0, \mathbf{\Omega}_0), \\ \langle T_\omega \rangle &= \int_{(\mathbf{\Omega}_n) > 0} d\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}_n) I_\omega(z_f = L, \mathbf{\Omega} | z_i = 0, \mathbf{\Omega}_0). \end{aligned} \quad (22)$$

В области низких пространственных частот ($q \ll k_0$), используя связь спектра флуктуаций со вторым моментом интенсивности (см. Приложение Б), в первом приближении получим

$$M(z_f, \mathbf{q}, \Delta\omega) = M^{coh}(z_f, \mathbf{q}, \Delta\omega) + M^{incoh}(z_f, \mathbf{q}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} M^{coh}(z_f, \mathbf{q}, \Delta\omega) &= n \int_0^L dz' \int \int d\mathbf{\Omega}'' d\mathbf{\Omega}_1' \left| \int d\mathbf{\Omega}' I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{q} | z', \mathbf{\Omega}') \times \right. \\ &\times \left. h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}_1') \right|^2 I_{\omega_0}(z', \mathbf{\Omega}'' | \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) I_{\omega_0}(z', \mathbf{\Omega}_1' | \mathbf{\Omega}_0, -\Delta\omega), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} M^{incoh}(z_f, \mathbf{q}) &= n \int_0^L dz' \times \\ &\times \left| \int d\mathbf{\Omega}' \int d\mathbf{\Omega}'' I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{q} | z', \mathbf{\Omega}') \left[\sigma_{tot} \delta(\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}) - \frac{d\sigma}{d\mathbf{\Omega}}(\mathbf{\Omega}' \mathbf{\Omega}'') \right] I_{\omega_0}(z', \mathbf{\Omega}'' | \mathbf{\Omega}_0) \right|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

В (24), (25) учтено, что «входящий» пропагатор интенсивности $I_{\omega_0}(z', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}_0, \pm\Delta\omega)$ не зависит от координат в плоскости параллельной границам слоя, а «выходящий» пропагатор $I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{q} | z', \mathbf{\Omega}')$ равен

$$\begin{aligned} I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{q} | z', \mathbf{\Omega}') &= \int d^2 \rho \exp(-i\mathbf{q}\rho) I_{\omega_0}(z_f, \rho | z', \mathbf{\Omega}') = \\ &= \int d^2 \rho \exp(-i\mathbf{q}\rho) \int_{(\mathbf{\Omega}_n) > 0} d\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}_n) I_{\omega_0}(z_f, \rho, \mathbf{\Omega} | z', \mathbf{\Omega}'), \end{aligned} \quad (26)$$

где $I_{\omega_0}(z_f, \rho | z', \mathbf{\Omega}')$ — пространственное распределение плотности выходящего из среды потока излучения по поверхности $z = z_f$. Значение спектра (23)–(25) нормировано на единичную z -компоненту падающего потока.

Выражения (17) и (23)–(25) выведены без использования каких-либо предположений о виде пропагаторов интенсивности и являются наиболее общими из результатов, предложенных до сих пор для описания дальних корреляций интенсивности в неупорядоченных средах. Известные результаты, изложенные в работах [1, 14, 17, 18, 29, 32, 33],

формулы (23)–(25) обобщают в двух аспектах. С одной стороны, они учитывают эффекты, обусловленные сильным — неборновским — одноцентровым рассеянием, а с другой, справедливы для любого режима многократного рассеяния волн в среде. Результаты, полученные для режима пространственной диффузии излучения [1, 14, 17, 18] и малоуглового многократного рассеяния [29], следуют из выражений (23)–(25) как предельные случаи при подстановке в них соответствующих приближенных выражений для пропагаторов интенсивности.

В борновском приближении, когда в изображенных на рис. 1в диаграммах учитываются только парные корреляции волновых полей, некогерентный вклад в спектр флуктуаций обращается в нуль (см., например, [41]), а когерентный принимает следующий вид [32]:

$$M^{coh}(z_f, \mathbf{q}, \Delta\omega) = \left(\frac{2\pi}{k_0}\right)^2 n \int_0^L dz \iint d\Omega' d\Omega'_1 |I(z_f, \mathbf{q}|z, \Omega') - I(z_f, \mathbf{q}|z, \Omega'_1)|^2 \times \\ \times \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega', \Omega'_1) I(z, \Omega'|\Omega_0, \Delta\omega) I(z, \Omega'_1|\Omega_0, -\Delta\omega). \quad (27)$$

Этот результат получается из (24), если в h -функцию подставить борновскую амплитуду рассеяния и ограничиться линейными по амплитуде слагаемыми.

Выражения типа (24), (25), (27) справедливы также для описания корреляций между значениями интенсивности на противоположных границах слоя и для спектра флуктуаций $M_{tot}(\mathbf{q})$ суммарной рассеянной — отраженной и прошедшей — интенсивности. В последнем случае в (24), (25), (27) вместо $I(z_f, \mathbf{q}|z, \Omega)$ нужно подставить сумму $I(0, \mathbf{q}|z, \Omega) + I(L, \mathbf{q}|z, \Omega)$ [32, 33].

Соотношения (23)–(27) позволяют сразу сделать ряд выводов относительно общих свойств спектра флуктуаций.

При чисто упругом обратном рассеянии волн полубесконечной средой падающий поток полностью отражается, и коэффициент отражения $R = 1$. Поэтому его дисперсия $\langle(\delta R)^2\rangle = 0$, и при $\mathbf{q} = 0$ выражения (23)–(25), (27) должны обращаться в нуль. Действительно, в этом случае величина $I(0, \mathbf{q}|z, \Omega)$ при $\mathbf{q} = 0$ не зависит от направления Ω [36, 42], и мы получаем $M(z_f = 0, \mathbf{q} = 0) = 0$ (вклад (24) для M^{coh} обращается в нуль в силу оптической теоремы для амплитуды рассеяния [39]). При $q > 0$ появляется зависимость $I(0, \mathbf{q}|z, \Omega)$ от Ω , в результате чего $M(z_f = 0, \mathbf{q})$ возрастает. Таким образом, сохранение потока при упругом рассеянии приводит к появлению минимума в спектре отраженной интенсивности.

Учет следующих итераций в уравнении (15) не нарушает отмеченную выше особенность спектра флуктуаций, так как множители вида

$$\int d\Omega' I(0, \mathbf{q}|z, \Omega') h(\Omega', \Omega'|\Omega'', \Omega'_1) \int d\Omega'_1 I^*(0, \mathbf{q}|z, \Omega'_1) h(\Omega'_1, \Omega'_1|\Omega'', \Omega'')$$

явно присутствуют во всех членах разложения спектра флуктуаций в ряд по кратности взаимодействия интенсивностей.

При упругом рассеянии волн конечным слоем сохранение потока точно так же называется на поведении спектра флуктуаций суммарной интенсивности $M_{tot}(\mathbf{q})$. В этом случае $R + T = 1$, $\langle(\delta R + \delta T)^2\rangle = 0$, и поэтому при $\mathbf{q} = 0$ спектр $M_{tot}(\mathbf{q})$ должен обращаться в нуль. Формально это следует из того факта, что входящая в $M_{tot}(\mathbf{q})$ сумма

$I(0, \mathbf{q}|z, \mathbf{\Omega}) + I(L, \mathbf{q}|z, \mathbf{\Omega})$ при $\mathbf{q} = 0$ определяет полный поток излучения через обе границы слоя и в отсутствие поглощения не зависит от $\mathbf{\Omega}$.

Такое поведение спектра $M_{tot}(\mathbf{q})$ наиболее заметно проявляется при малоугловом многократном рассеянии [10–13, 29]. В этом случае вероятность отражения волн пренебрежимо мала и особенность $M_{tot}(\mathbf{q})$ наблюдается в спектре флуктуаций прошедшей интенсивности.

Выше речь шла о дальних пространственных корреляциях интенсивности, информация о которых содержится в координатной зависимости $\langle I_{\omega_0+\Delta\omega/2}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) I_{\omega_0-\Delta\omega/2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1) \rangle$. Однако, зная второй момент, можно исследовать и ближние ($\rho < r_{coh} \sim \lambda/\theta$) корреляции интенсивности в спеклах. Мелкомасштабная структура спекл-изображения в плоскости наблюдения определяется интерференцией волн, падающих под разными углами. Поэтому информацию о ближних корреляциях между локальными значениями плотности потока можно получить из угловой зависимости второго момента интенсивности. Соответствующая корреляционная функция определяется выражением (см. Приложение Б)

$$C(z_f, \rho = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)_{\parallel}, \Delta\omega) = \frac{1}{4} \int d\mathbf{\Omega} \int d\mathbf{\Omega}_1 [\mathbf{\Omega}_n(\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}_1)]^2 \exp\{ik_0(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_1)\rho\} \times \\ \times \left\langle I_{\omega_0} \left(z_f, \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)_{\parallel}, \mathbf{\Omega}, \Delta\omega \right) I_{\omega_0} \left(z_f, \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)_{\parallel}, \mathbf{\Omega}_1, -\Delta\omega \right) \right\rangle. \quad (28)$$

В первом приближении из (28) следует формула

$$C(z_f, \rho, \Delta\omega) = \frac{1}{4} \int d\mathbf{\Omega} \int d\mathbf{\Omega}_1 [\mathbf{\Omega}_n(\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}_1)]^2 \exp\{ik_0(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_1)\rho\} \times \\ \times (I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{\Omega}|\mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) I_{\omega_0}(z_f, \mathbf{\Omega}_1|\mathbf{\Omega}_0, -\Delta\omega))^{(sc)}, \quad (29)$$

которую с учетом (9) можно также записать в виде

$$C(z_f, \rho, \Delta\omega) = -\frac{1}{4k_0^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 \left(|\mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \Delta\omega)|^2 - |\mathcal{S}_2^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \Delta\omega)|^2 \right) \right] \Bigg|_{z=z_1=z_f} \quad (30)$$

При малоугловом рассеянии соотношения (29), (30) переходят в известную формулу, полученную ранее в [10–13, 37].

Непосредственным вычислением можно убедиться, что отвечающий формулам (29), (30) спектр флуктуаций в области пространственных частот $q \ll k_0$ совпадает с высокочастотной асимптотикой спектра (24) или (27) (при больших значениях q асимптотики выражений (24) и (27) не отличаются друг от друга).

Общие соотношения (23)–(25), (29) решают задачу о вычислении спектра и корреляционной функции флуктуаций интенсивности в неупорядоченной среде с дискретными рассеивателями. Согласно (23)–(25), (29), для исследования корреляций достаточно знать соответствующие решения уравнения переноса для пропагаторов.

Ниже мы рассмотрим качественные особенности дальних корреляций для тех предельных режимов распространения волн, для которых в явном виде известны приближенные аналитические выражения для пропагаторов интенсивности. Вычислению спектра и корреляционной функции флуктуаций интенсивности для двух типов неупорядоченных сред, состоящих соответственно из центров малого радиуса и крупномасштабных рассеивателей, посвящены следующие разделы статьи.

3. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА СИСТЕМЕ ЦЕНТРОВ МАЛОГО РАДИУСА

Рассмотрим дальние корреляции интенсивности при рассеянии плоской волны неупорядоченным слоем мелкомасштабных (размер меньше длины волны) центров. Будем считать, что слой является оптически толстым ($L \gg l$), а рассеяние на каждом центре носит изотропный характер.

Корреляции интенсивности на больших расстояниях $\rho \gg l$ определяются поведением спектра при низких пространственных частотах $q \ll l^{-1}$. При $q \ll l^{-1}$ выражения (24), (25) можно преобразовать следующим образом.

Рассмотрим сначала спектр флуктуаций отраженной интенсивности при чисто упругом рассеянии в полубесконечной среде ($L \rightarrow \infty$). В этом случае пропагатор интенсивности $I(z_f = 0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega})$ при $\mathbf{q} = 0$ не зависит от z и от направления $\mathbf{\Omega}$ [36, 42]. Величина $I(0, \mathbf{q} = 0 | z, \mathbf{\Omega})$ представляет собой полный поток через поверхность от расположенного на глубине z и излучающего в направлении $\mathbf{\Omega}$ точечного источника. Поэтому сделанное утверждение означает, что все излучение выходит из среды. С увеличением q при $q \ll l^{-1}$ появляется слабая зависимость $I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega})$ от $\mathbf{\Omega}$, и мы можем воспользоваться разложением I в ряд по сферическим гармоникам. Первые члены такого разложения имеют вид [37]

$$I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (F(0, \mathbf{q} | z) + 3\mathbf{\Omega}\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) + \dots), \tag{31}$$

где

$$F(0, \mathbf{q} | z) = \int d\mathbf{\Omega} I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) = \int d\mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}). \tag{32}$$

Подставляя разложение (31) в (24), (25), получаем

$$\int d\mathbf{\Omega}' I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}') h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') = \frac{3}{4\pi} \frac{2\pi i}{k_0} (f\mathbf{\Omega}'' - f^* \mathbf{\Omega}_1'') \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z), \tag{33}$$

$$\int d\mathbf{\Omega}' I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}') h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') = -\frac{3}{4\pi} \sigma \mathbf{\Omega}'' \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z). \tag{34}$$

где σ — сечение упругого рассеяния, $n\sigma = l^{-1}$. При малых $q \ll l^{-1}$ характерный масштаб изменения $\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z)$ по переменной z оказывается порядка q^{-1} . Поэтому область интегрирования по z в (24), (25) будет много больше длины свободного пробега l . Это позволяет в свою очередь воспользоваться разложением типа (31) и для пропагатора $I(z, \mathbf{\Omega} | 0, \mathbf{\Omega}_0)$. В результате для M_R^{coh} и M_R^{incoh} находим

$$M_R^{coh}(\mathbf{q}) = \frac{3}{8\pi k_0^2} \int_0^\infty \frac{dz}{l} |\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z)|^2 |F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 + \frac{9}{16\pi^2} \left(\sigma - \frac{2\pi}{k_0^2} \right) \int_0^\infty \frac{dz}{l} |\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) \mathbf{J}(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2. \tag{35}$$

$$M_R^{incoh}(\mathbf{q}) = \frac{9}{16\pi^2} \sigma \int_0^\infty \frac{dz}{l} |\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) \mathbf{J}(z | 0, \mathbf{\Omega}_0)|^2. \tag{36}$$

Указанное выше тождество $M_R(\mathbf{q} = 0) = 0$ следует из (33)–(36) в силу того, что при $q \rightarrow 0$ $|\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z)| \sim q^2$.

При отражении волн от толстого слоя ($L \gg l$) или слабопоглощающей среды ($l \ll l_a, l_a$ — длина поглощения) приведенные выше рассуждения остаются в силе. Это связано с тем, что в указанных случаях при $q \ll l^{-1}$ зависимость $I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega})$ от $\mathbf{\Omega}$ остается слабой, и при любых z для $I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega})$ справедливо разложение (31). В случае поглощающих центров в выражениях (33), (34) появляется дополнительное слагаемое:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{\Omega}' I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}') h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') &= -\frac{\sigma_a}{4\pi} F(0, \mathbf{q} | z) + \\ &+ \frac{3}{4\pi} \frac{2\pi i}{k_0} (f\mathbf{\Omega}'' - f^*\mathbf{\Omega}'') \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\int d\mathbf{\Omega}' I(0, \mathbf{q} | z, \mathbf{\Omega}') h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}' | \mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') = -\frac{\sigma_a}{4\pi} F(0, \mathbf{q} | z) - \frac{3\sigma_{tot}}{4\pi} \mathbf{\Omega}'' \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z), \tag{38}$$

где $\sigma_a = \sigma_{tot} - \sigma$ — сечение одноцентрового поглощения, $n\sigma_a = l_a^{-1}$. Первое слагаемое в (37), (38) описывает влияние неоднородного (из-за случайного расположения центров) поглощения в среде на когерентные и некогерентные флуктуации интенсивности. При-сутствие дополнительного слагаемого в (37), (38) не меняет хода наших рассуждений. Область интегрирования по z в (24), (25) остается много больше l , и для $I(z, \mathbf{\Omega} | 0, \mathbf{\Omega}_0)$ можно по-прежнему использовать разложение типа (31). В итоге получаем

$$\begin{aligned} M_R^{coh}(\mathbf{q}) &= \frac{3}{8\pi k_0^2} \int_0^L \frac{dz}{l} |\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z)|^2 |F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 - \\ &- \frac{9}{8\pi k_0^2} \int_0^L \frac{dz}{l} |\mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) \mathbf{J}(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 + \\ &+ \frac{n}{16\pi^2} \int_0^L dz |\sigma_a F(0, \mathbf{q} | z) F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) + 3\sigma_{tot} \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) \mathbf{J}(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2, \end{aligned} \tag{39}$$

$$M_R^{incoh}(\mathbf{q}) = \frac{n}{16\pi^2} \int_0^L dz |\sigma_a F(0, \mathbf{q} | z) F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0) + 3\sigma_{tot} \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z) \mathbf{J}(z | 0, \mathbf{\Omega}_0)|^2. \tag{40}$$

Из формул (39), (40) ясно виден физический механизм возникновения крупномасштабных флуктуаций. Источником является локальное возмущение распределения интенсивности в объеме среды. Всплеск интенсивности может быть связан с интерференцией волн (т.е. с объемным спеклом [1]), а также с локальной неоднородностью рассеивающих и поглощающих свойств вещества, обусловленной флуктуациями числа центров в малом объеме. Неоднородность среды возмущает как «среднее» распределение интенсивности, что приводит к флуктуациям некогерентного происхождения (40), так и

объемную интерференционную картину (см. последнее слагаемое в формуле (39)). Что касается первых двух слагаемых в (39), то они не связаны с флуктуациями плотности рассеивающих центров и обусловлены непосредственно объемным спеклом. Они отвечают разложению (31) в формуле (27).

Отметим, что необходимым условием для перехода от (24), (25) к (39), (40) является возможность представить $I(0, \mathbf{q} | z, \Omega)$ в виде (31) [33]. В геометрии отражения это равенство справедливо при любых z тогда и только тогда, когда $I(0, \mathbf{q} | z, \Omega)$ определяет плотность потока излучения через границу среды (см. (26)). Если в отличие от этого $I(0, \mathbf{q} | z, \Omega)$ определить просто как плотность энергии излучения на границе, то перейти от (24), (25) к (39), (40) уже не удастся. В частности, при чисто упругом обратном рассеянии от полубесконечной среды величина $I(0, \mathbf{q} | z, \Omega)$ при $q = 0$ будет в области $z \leq l$ зависеть от Ω , и поэтому обсуждавшееся выше сокращение при $q = 0$ не произойдет. Вклад в интеграл по z будет определяться приповерхностной областью $z \leq l$. Это не противоречит приведенным выше рассуждениям относительно дисперсии $\langle (\delta R)^2 \rangle$, поскольку плотность энергии излучения на поверхности среды никак не связана с коэффициентом отражения.

Последнее замечание важно иметь в виду при сравнении наших результатов с [14, 19]. Аналогичные вычисления, выполненные в [14, 19], не дают сокращения при $q \rightarrow 0$. Остается неисчезающий при $q \rightarrow 0$ вклад в спектр от приповерхностной области $z \leq l$. На основании этого авторы [14, 19] сделали качественно неверные выводы относительно значения $\langle (\delta R)^2 \rangle$, формы спектра флуктуаций отраженной интенсивности (в [14] вместо провала при $q = 0$ предсказан максимум) и поведения коррелятора интенсивностей. Имеются две причины [33], которые могли привести авторов [14, 19] к выводу о важности поверхностного вклада для геометрии отражения. Как показано в [33], одна причина связана с тем, что в [14, 19] учтены не все диаграммы, дающие вклад в коррелятор интенсивностей, и из-за этого дисперсия коэффициента отражения не удовлетворяет условию сохранения потока. Вторую возможную причину мы только что обсуждали. Авторы [14] не делают различия между плотностью энергии на поверхности и плотностью потока через поверхность. Их вычисления относятся к флуктуациям плотности энергии, и на их основе нельзя делать выводы о флуктуациях коэффициента отражения.

При прохождении волн через толстый слой ($L \gg l$) ситуация более простая, чем при отражении. Основной вклад в интегралы (24), (25) дает область $z, L - z \gg l$. Вклад в интегралы (24), (25) от приповерхностных слоев ($z \leq l, L - z \leq l$) оказывается в l/L раз меньше объемного вклада. Для входящих в (24), (25) пропагаторов можно сразу воспользоваться разложениями типа (31). В результате для $M_T(\mathbf{q})$ получаем выражение, отличающееся от (39), (40) только заменой $F(0, \mathbf{q} | z), \mathbf{J}(0, \mathbf{q} | z)$ на $F(L, \mathbf{q} | z), \mathbf{J}(L, \mathbf{q} | z)$.

В том приближении, в котором интенсивность определяется первыми двумя членами разложения (31), поток \mathbf{J} выражается через градиент плотности F [37], и входящие в (39), (40) величины $\mathbf{J}(z | 0, \Omega_0)$ и $\mathbf{J}(z_f, \mathbf{q} | z)$ можно записать следующим образом:

$$J_k(z | 0, \Omega_0, \Delta\omega) = -\frac{l}{3} \delta_{k,z} \frac{\partial}{\partial z} F(z | 0, \Omega_0, \Delta\omega),$$

$$J_k(z_f, \mathbf{q} | z) = \frac{l}{3} (\delta_{k,z} \frac{\partial}{\partial z} + iq_k) F(z_f, \mathbf{q} | z), \quad (41)$$

где функции $F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)$ и $F(z_f, \mathbf{q}|z)$ выражаются через диффузионные асимптотики решения уравнения переноса [33].

В случае транспорта волн другой природы, например, электронов, нейтронов, соотношения (41) могут быть более сложными и содержать слагаемые, пропорциональные внешним полям.

С учетом равенств (41) из (39), (40) получаем

$$\begin{aligned}
 M^{coh}(z_f, \mathbf{q}) = & \frac{l}{24\pi k_0^2} \int_0^L dz \left(\left| \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, \mathbf{q}|z) \right|^2 + q^2 |F(z_f, \mathbf{q}|z)|^2 \right) \times \\
 & \times |F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 - \frac{l^3}{72\pi k_0^2} \int_0^L dz \left| \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, \mathbf{q}|z) \frac{\partial}{\partial z} F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) \right|^2 + \\
 & + \frac{n}{16\pi^2} \int_0^L dz \left| \sigma_a F(z_f, \mathbf{q}|z) F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \sigma l^2 \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, \mathbf{q}|z) \frac{\partial}{\partial z} F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) \right|^2, \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^{incoh}(z_f, \mathbf{q}) = & \frac{n}{16\pi^2} \int_0^L dz \left| \sigma_a F(z_f, \mathbf{q}|z) F(z|0, \mathbf{\Omega}_0) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \sigma l^2 \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, \mathbf{q}|z) \frac{\partial}{\partial z} F(z|0, \mathbf{\Omega}_0) \right|^2. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Согласно формулам (39), (40) и (42), (43), когерентный и некогерентный вклады в спектр флуктуаций можно представить в следующем виде:

$$M^{coh} = M^{coh(sp)} + M^{coh(a)} + M^{coh(a,s)} + M^{coh(s)}, \quad (44)$$

$$M^{incoh} = M^{incoh(a)} + M^{incoh(a,s)} + M^{incoh(s)}. \quad (45)$$

Первое слагаемое в (44) описывает флуктуации интенсивности, источником которых является объемный спекл. Слагаемые $M^{(a)}$, $M^{(s)}$, $M^{(a,s)}$, входящие в оба равенства, обусловлены пуассоновскими флуктуациями пространственного распределения частиц неупорядоченной среды; эти слагаемые отвечают отдельным флуктуациям поглощающих и рассеивающих свойств среды, а также их корреляции.

Как показывает анализ, ведущим в разложении спектра (42), (43) является первое слагаемое выражения (42). Оно, по сути дела, совпадает с фурье-образом формулы Пнини и Шапиро, выведенной в [18] для корреляционной функции в геометрии прохождения. Это связано с тем, что низкочастотное ($q < l^{-1}$) поведение спектра флуктуаций, как показано выше, и при прохождении, и при отражении определяется только длинными траекториями распространения волн; вкладом в спектр от приповерхностной области $z \leq l$ можно пренебречь. Соответствующая формула в [18] была выведена в рамках ланжевеновского подхода, предложенного ранее Зюзиным и Спиваком [1, 15] для описания корреляций диффузионных потоков в неупорядоченном веществе. В этом

подходе рассматриваются только длинные траектории распространения волн и заранее предполагается, что вклад коротких траекторий пренебрежимо мал. Различия между первым слагаемым выражения (42) и соответствующим результатом [18] касаются только определения функций $F(z_f, \mathbf{q} | z)$. В [18] рассматривались корреляции в объеме среды между значениями плотности энергии, тогда как выражение (42) записано для плотности потока через поверхность. В случае прохождения волн через толстый слой это различие не носит принципиального характера, однако в случае отражения является существенным. Как указано выше, формула (42) справедлива для геометрии отражения, только если речь идет о флуктуациях плотности потока излучения. Именно в этом случае остаются в силе утверждения, касающиеся влияния сохранения потока на флуктуации отраженной и прошедшей интенсивности, и в (24), (25) можно пренебречь вкладом от области $z \leq l$, в которой пропагаторы интенсивности определяются короткими траекториями распространения волн.

Второе и третье слагаемые в (42) и некогерентный спектр (43) представляют собой поправку к ведущему когерентному вкладу в (42). При условии $\min(L, l_D) < l (k_0 l)^2$ ($l_D = \sqrt{l_a/3}$ — диффузионная длина [36, 37]) вклад этих слагаемых в спектр флуктуаций превышает вклад второго порядка по взаимодействию «лучей» (т. е. вклад следующей итерации в уравнении (15)). Последний рассматривался ранее в контексте задачи о флуктуациях электронной проводимости малых металлических образцов (см., например, [1, 4, 5, 41]).

Отметим, что с ростом значения пространственной частоты q ($l^{-1} < q \ll k_0$) некогерентный вклад (25) стремится к нулю, а когерентный вклад (24) — к некоторой постоянной величине, значение которой совпадает с найденным в [33] с помощью выражения (27). Это асимптотическое значение M^{coh} может быть также получено путем фурье-преобразования формулы (29) при $q \ll k_0$ и отвечает ближним корреляциям интенсивности, обсуждавшимся ранее в [1, 8, 17, 31]. Таким образом, мы видим, что спектр $M(z_f, q)$ нельзя рассматривать просто как сумму [17, 19] высокочастотного и низкочастотного вкладов. Для геометрии прохождения это не столь важно, поскольку $M_T(q \gg l^{-1}) \ll M_T(q \ll l^{-1})$ [1, 16–19, 31]. Однако в случае отражения ситуация оказывается существенно иной, так как выполняется обратное неравенство $M_R(q \gg l^{-1}) \gg M_R(q \ll l^{-1})$ [32, 33].

Значения входящих в (42), (43) функций $F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)$ и $F(z_f, \mathbf{q} | z)$ можно найти с помощью соотношений, полученных при решении задачи о когерентном обратном рассеянии волн от неупорядоченного слоя центров малого радиуса [43–45]. В соответствии с решением [45] выражения для этих функций имеют вид [33]

$$F(z | 0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) = \sqrt{3}H(\mu_0, 1) \frac{\text{sh}[\gamma_0(L - z)]}{\text{sh} \gamma_0 L},$$

$$F(z_f, \mathbf{q} | z) = 4\pi \frac{\text{sh}[\gamma(L - |z_f - z|)]}{\text{sh} \gamma L},$$
(46)

где $H(\mu_0, 1)$ — функция Чандрасекара [36, 42], $\mu_0 = |\mathbf{\Omega}_n \mathbf{\Omega}_0|$ — косинус угла падения излучения на поверхность среды,

$$\gamma_0 = \sqrt{l_D^{-2} + 3i \frac{\Delta\omega}{c} l^{-1}}, \quad \gamma = \sqrt{l_D^{-2} + q^2},$$

l_D — диффузионная длина. Отметим, что функция $H(\mu_0, 1)$ удовлетворяет равен-

ствам [36, 42]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_n \Omega > 0} H(\Omega_n \Omega, 1) d\Omega = 1, \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_n \Omega > 0} (\Omega_n \Omega) H(\Omega_n \Omega, 1) d\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Второе из этих равенств обеспечивает выполнение теоремы взаимности [36] для функций $F(z | 0, \Omega_0)$ и $F(z_f = 0, \mathbf{q} = 0 | z)$.

Подставляя функции (46) в (42), (43), приходим к следующим результатам.

3.1. Непоглощающая среда

При отражении монохроматического когерентного излучения ($\Delta\omega = 0$) от толстого слоя неупорядоченной среды ведущим всегда является когерентный вклад в спектр флуктуаций. Для него справедливо выражение

$$M_R^{coh}(q) = H^2(\mu_0, 1) \left\{ \frac{2\pi}{k_0^2} \left[\frac{l}{L} \mathcal{F}_R(qL) - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{L} \right)^3 \mathcal{F}(qL) + \dots \right] + \frac{1}{3} \sigma \left(\frac{l}{L} \right)^3 \mathcal{F}(qL) + \dots \right\}, \quad (47)$$

где

$$\mathcal{F}_R(x) = \frac{1}{4x \operatorname{sh}^2 x} (\operatorname{sh} 2x - 2x \operatorname{ch} 2x + 2x^2 \operatorname{sh} 2x), \quad (48)$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x}{4 \operatorname{sh}^2 x} (\operatorname{sh} 2x + 2x). \quad (49)$$

Слагаемые в квадратных скобках в (47) описывают вклад чисто интерференционного происхождения, а последнее слагаемое в (47) — вклад, обусловленный возмущением объемной интерференционной картины локальной неоднородностью среды. Выражение (47) представляет собой разложение по степеням l/L . В случае рассеивателей малого радиуса справедливо неравенство $\sigma \leq 4\pi/k_0^2$, и поэтому основной вклад в спектр (47) всегда дает первое слагаемое в квадратных скобках.

Выражение (47) справедливо в области $q < l^{-1}$. При $q > l^{-1}$ зависимость $M_R^{coh}(q)$ выходит на плато, где $M_R^{coh}(q) \sim 1/k_0^2$ [32, 33].

Спектр $M_R(q)$ имеет минимум при $q = 0$. Согласно формуле (21), величина $M_R(q = 0)$ определяет дисперсию коэффициента отражения:

$$\langle (\delta R)^2 \rangle^{coh} = \frac{1}{A} M_R(q = 0) = \frac{(1 - \langle R \rangle)^2}{A} \left[\frac{2\pi}{k_0^2} \left(\frac{L}{l} - \frac{l}{L} + \dots \right) + \sigma \frac{l}{L} + \dots \right], \quad (50)$$

где

$$\langle R \rangle = 1 - \frac{l}{\sqrt{3}L} H(\mu_0, 1)$$

— средний коэффициент отражения слоя при упругом рассеянии [42]. Значение дисперсии (50) существенно меньше, чем значение $\langle (\delta R)^2 \rangle \sim 1/Ak_0^2$, которое следует из [14, 19].

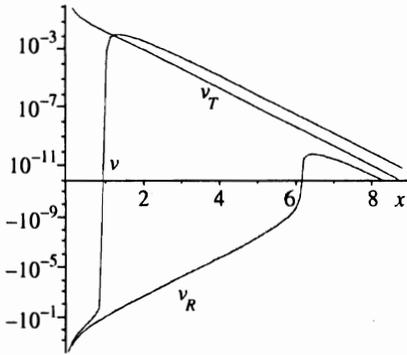


Рис. 2. Графики функций $\nu_R(x)$, $\nu_T(x)$ и $\nu(x)$

В пределе полубесконечной среды ($L \rightarrow \infty, R \rightarrow 1$) флуктуации коэффициента отражения исчезают ($\langle (\delta R)^2 \rangle \rightarrow 0$). В этом случае провал в спектре приобретает треугольную форму [32, 33]:

$$M_R(q) = H^2(\mu_0, 1) \frac{2\pi}{k_0^2} |q|l. \tag{51}$$

Для слоя конечной толщины линейный закон (51) наступает при $q > L^{-1}$ (см. (47)).

Коррелятор интенсивностей, отвечающий спектру (47), можно представить в виде

$$C_R^{coh}(\rho) = H^2(\mu_0, 1) \left\{ \frac{2\pi}{k_0^2} \left[\frac{l}{L^3} \nu_R \left(\frac{\rho}{L} \right) - \frac{1}{3} \frac{l^3}{L^5} \nu \left(\frac{\rho}{L} \right) + \dots \right] + \frac{1}{3} \sigma \frac{l^3}{L^5} \nu \left(\frac{\rho}{L} \right) + \dots \right\}. \tag{52}$$

Основной вклад в (52) дает слагаемое, пропорциональное функции ν_R . При $l/L < x < 1$ функция $\nu_R(x)$ имеет степенной вид [32, 33]:

$$\nu_R(x) = -\frac{1}{2\pi x^3}, \tag{53}$$

при $x \approx 6$ она меняет знак и далее убывает экспоненциально:

$$\nu_R(x) = \sqrt{\frac{x}{8}} \exp(-\pi x). \tag{54}$$

Входящая в (52) функция $\nu(x)$ при малых x равна $\nu(x) = -1/(4\pi x^3)$, меняет знак при $x \approx 1$ и при больших x убывает как

$$\nu(x) = \pi^2 \sqrt{\frac{x}{8}} \exp(-\pi x).$$

Графики функций $\nu_R(x)$ и $\nu(x)$ изображены на рис. 2.

Отметим, что провал в спектре пространственных флуктуаций (47), (51) напоминает по форме перевернутый пик когерентного обратного рассеяния [3, 7, 43–47]. Это сходство является следствием дальнедействующего характера корреляций. В то же время физические причины, определяющие особенности в спектре флуктуаций интенсивности и в угловом распределении обратнорассеянных волн, существенно различаются. Тот

факт, что треугольная особенность (51) соответствует минимуму спектра $M_R(q)$, является следствием сохранения полного потока энергии при чисто упругом рассеянии в среде. По той же причине должен наблюдаться эффект антикорреляции между локальными значениями интенсивности в области расстояний $l < \rho < L$ (см. (52)–(54)).

Некогерентный вклад в спектр флуктуаций, $M_R^{incoh}(q)$, совпадает со слагаемым в $M_R^{coh}(q)$, которое обусловлено локальной неоднородностью среды,

$$M_R^{incoh}(q) = \frac{1}{3} \sigma H^2(\mu_0, 1) \left(\frac{l}{L}\right)^3 \mathcal{F}(qL), \quad (55)$$

где функция $\mathcal{F}(x)$ определена выражением (49). Отвечающая (55) корреляционная функция равна

$$C_R^{incoh}(\rho) = \frac{1}{3} \sigma H^2(\mu_0, 1) \frac{l^3}{L^3} \nu\left(\frac{\rho}{L}\right) \quad (56)$$

и оказывается в $(\sigma k_0^2)(l/L)^2$ раз меньше, чем $C_R^{coh}(\rho)$ (52). Поэтому роль некогерентных флуктуаций для случая отражения незначительна.

Когда падающие на среду волны различаются по частоте, должно наблюдаться, в отличие от выводов [14], дополнительное ослабление дальних корреляций.

В этом случае область глубин z , где падающие волны образуют объемную спекл-структуру, ограничена величиной $l_{\Delta\omega} = (2lc/\Delta\omega)^{1/2}$. Заметная зависимость спектра M_R^{coh} от $\Delta\omega$ наступает при $l_{\Delta\omega} < L$. Значение спектра M_R^{coh} в минимуме $M_R^{coh}(q=0)$ уменьшается с ростом $\Delta\omega$ пропорционально $l_{\Delta\omega}/L$. Формула (51) становится справедливой только при $q > l_{\Delta\omega}^{-1}$. Что касается пространственных корреляций, то $\nu_R(x, \Delta\omega)$ при $l/L < x < l_{\Delta\omega}/L$ по-прежнему определяется выражением (53), а при $l_{\Delta\omega}/L < x < 1$ убывает более быстро:

$$\nu_R(x, \Delta\omega) = -\frac{3}{2\pi} \frac{l_{\Delta\omega}^2}{L^2} \frac{1}{x^5}. \quad (57)$$

Хвост корреляционной функции при больших x убывает по тому же закону, что и при $\Delta\omega = 0$ (см. (54)), однако амплитуда корреляций уменьшается (при $x = \rho/L \gg 1$, $\nu_R(x, \Delta\omega) = (\pi^2 l_{\Delta\omega} / 3^{1/2} L) \nu_R(x, \Delta\omega = 0)$). Некогерентные корреляции интенсивности не зависят от $\Delta\omega$, однако до тех пор пока $l_{\Delta\omega} > l$, их амплитуда остается меньше, чем амплитуда корреляций интерференционного происхождения.

При прохождении волн через слой выражение для когерентного вклада в спектр по-прежнему определяется формулой (47), куда теперь вместо $\mathcal{F}_R(x)$ нужно подставить функцию

$$\mathcal{F}_T(x) = \frac{1}{4x \operatorname{sh}^2 x} (\operatorname{sh} 2x - 2x). \quad (58)$$

Вклад в спектр флуктуаций, пропорциональный функции $\mathcal{F}_T(x)$, был получен различными способами во многих работах (см., например, [14, 17, 18, 31]). Спектр $M_T^{coh}(q)$ с ростом q убывает по закону $M_T^{coh}(q) \sim k_0^{-2}(l/L)^2(ql)^{-1}$ до значения $M_T^{coh}(q \sim l^{-1}) \sim k_0^{-2}(l/L)^2$, которое отвечает ближним корреляциям интенсивности [1, 8, 17, 31].

Пространственные корреляции прошедшего через слой излучения всегда остаются положительными. Корреляционная функция $C_T^{coh}(\rho)$ получается из (52) заменой $\nu_R(x)$

на $\nu_T(x)$, где $\nu_T(x) = 1/(4\pi x)$ при $x < 1$, а при $x \gg 1$ $\nu_T(x)$ определяется тем же асимптотическим выражением, что и $\nu_R(x)$ (см. (54)); график функции $\nu_T(x)$ показан на рис. 2. Совпадение асимптотик корреляторов интенсивностей отраженной и прошедшей волн объясняется тем, что при упругом рассеянии в слое режим распространения волн на больших расстояниях, $\rho \gg L$, не зависит от положения источника и носит универсальный характер.

Когерентные и некогерентные флуктуации интенсивности, вызванные локальной неоднородностью среды, описываются в случае прохождения теми же соотношениями, что и при отражении; в частности, $M_T^{incoh} = M_R^{incoh}$, $C_T^{incoh} = C_R^{incoh}$. Поскольку соответствующий вклад в спектр возрастает с увеличением q , роль локальной неоднородности среды в геометрии прохождения оказывается более заметной. Сравнивая выражения (47), (58) с выражениями (55), (49), получаем $M_T^{incoh}/M_T^{coh} \sim k_0^2 \sigma (ql)^2 > > M_R^{incoh}/M_R^{coh}$.

Вследствие сохранения полного потока излучения при чисто упругом рассеянии ($R+T = 1$) дисперсия флуктуаций коэффициента прохождения удовлетворяет тождеству

$$\langle (\delta T)^2 \rangle = -\langle (\delta T)(\delta R) \rangle = \langle (\delta R)^2 \rangle. \tag{59}$$

Поэтому $\langle (\delta T)^2 \rangle^{coh}$ совпадает с результатом (50).

Здесь следует обратить внимание на одно принципиальное различие между случаями прохождения и отражения волн. В геометрии прохождения $C_T^{coh}(\rho)$ убывает как $1/\rho$ и основной вклад в $\langle (\delta T)^2 \rangle^{coh}$ дают дальние корреляции. Вклад ближних корреляций является величиной следующего порядка малости по l/L , и им можно пренебречь. В геометрии отражения ситуация иная. Дальние и ближние корреляции дают в $\langle (\delta R)^2 \rangle^{coh}$ вклады одного порядка, $1/Ak_0^2$, но разного знака. При отражении от полубесконечной среды эти вклады точно компенсируют друг друга, а в случае конечного слоя суммарный вклад оказывается порядка $l/(Ak_0^2 L)$ и обусловлен изменением корреляций при больших ρ .

При прохождении через среду волн, различающихся по частоте, амплитуда корреляций интенсивности, обусловленных интерференцией, уменьшается. В этой ситуации становится особенно важным некогерентный механизм корреляций. При $l_{\Delta\omega} < L$ он может оказаться основным.

Влияние частотного сдвига $\Delta\omega$ по-разному сказывается на различных участках спектра флуктуаций $M_T^{coh}(q)$. Равенство $M_R(q = 0) = M_T(q = 0)$ остается справедливым и при ненулевых значениях $\Delta\omega$, поскольку полный поток энергии излучения сохраняется. Высота максимума M_T^{coh} понижается в $\sqrt{3}l_{\Delta\omega}/2L$ раз. С увеличением q спектр M_T^{coh} сначала убывает экспоненциально,

$$M_T^{coh} \sim k_0^{-2} q^2 l_{\Delta\omega} l \exp(-2qL),$$

а затем при $q > l_{\Delta\omega}^{-1}$ — как $1/q$:

$$M_T^{coh} \sim k_0^{-2} (ql)^{-1} \left[\frac{l}{l_{\Delta\omega}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}L}{l_{\Delta\omega}}\right) \right]^2.$$

Сопоставляя эти результаты с независимым от $\Delta\omega$ вкладом $M_T^{incoh} = M_R^{incoh}$ (см. (55)), находим, что некогерентный вклад в спектр будет основным при $q > l_{\Delta\omega}^{-1}$, если $l_{\Delta\omega} < L/\ln(L/l\sqrt{k_0^2\sigma})$.

К аналогичным выводам можно прийти и с помощью анализа корреляционной функции $C_T(\rho, \Delta\omega) = C_T^{coh}(\rho, \Delta\omega) + C_T^{incoh}(\rho)$. При $l_{\Delta\omega} < L$ зависимость C_T^{coh} от частотного сдвига $\Delta\omega$ проявляется при любых ρ . В интервале $l < \rho < L$ функция $C_T^{coh}(\rho, \Delta\omega)$ убывает с ростом ρ очень медленно [33],

$$\nu_T(x, \Delta\omega) \approx \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{l_{\Delta\omega}}{L} \zeta(3) + \frac{3}{\pi x} \left[\frac{L}{l_{\Delta\omega}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}L}{l_{\Delta\omega}}\right) \right]^2, \quad (60)$$

где $\zeta(3) = 1,202$, $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана [48]. При $\rho > L$ поведение $C_T^{coh}(\rho, \Delta\omega)$ оказывается таким же, как и при отражении (т.е. при $x \gg 1$ $\nu_T(x, \Delta\omega) = \nu_R(x, \Delta\omega) = (\pi^2 l_{\Delta\omega} / \sqrt{3}L) \nu_R(x, \Delta\omega = 0)$, где $\nu_R(x, \Delta\omega = 0)$ определяется по формуле (54)). Сравнение $C_T^{coh}(\rho, \Delta\omega)$ с $C_T^{incoh}(\rho) = C_R^{incoh}(\rho)$ (56) показывает, что при $\rho < L (l^2 k_0^2 \sigma / L l_{\Delta\omega})^{1/3}$ корреляционная функция $C_T(\rho)$ определяется некогерентным вкладом.

3.2. Поглощающая среда

Имеются два механизма, благодаря которым поглощение влияет на спектр флуктуаций интенсивности. С одной стороны, поглощение влияет на режим распространения волн в среде. Оно ограничивает пространственный масштаб дальних корреляций и приводит к нарушению сохранения потока излучения. С другой стороны, если поглощением обладают сами рассеивающие центры, то становится существенной локальная пространственная неоднородность поглощающих свойств среды [49].

Влияние поглощения на режим распространения отражается на значениях входящих в выражения (42), (43) функций (46). С неоднородностью поглощения связано появление в спектре флуктуаций (42), (43) новых — пропорциональных сечению поглощения σ_a — членов.

При отражении волн от относительно тонкого слоя ($L \ll l_D$) роль поглощения практически незаметна. Закономерности корреляций интенсивности, рассмотренные выше для случая чисто упругого рассеяния, остаются без изменений. Поглощение существенно влияет на флуктуации интенсивности, только когда толщина рассеивающего слоя превышает характерную длину ослабления потока излучения в среде, $L > l_D$. В этом случае различные вклады в спектр пространственных флуктуаций отраженной интенсивности (см. (44), (45)) определяются выражениями

$$M_R^{coh(sp)} = 3 \frac{\pi}{k_0^2} \frac{l_D}{l} (1 - \langle R \rangle)^2 \frac{1}{a(x) + 1} \left[2a^2(x) - 1 - \frac{1}{3} \frac{l^2}{l_D^2} a^2(x) \right], \quad (61)$$

$$M_R^{coh(a)} = M_R^{incoh(a)} = \frac{3}{2} \sigma_a \frac{l_D}{l} (1 - \langle R \rangle)^2 \frac{1}{a(x) + 1}, \quad (62)$$

$$M_R^{coh(a,s)} = M_R^{incoh(a,s)} = -3 \sigma_a \frac{l_D}{l} (1 - \langle R \rangle)^2 \frac{1}{a(x) + 1}, \quad (63)$$

$$M_R^{coh(s)} = M_R^{incoh(s)} = \frac{1}{2} \sigma \frac{l}{l_D} (1 - \langle R \rangle)^2 \frac{a^2(x)}{a(x) + 1}, \quad (64)$$

где $x = ql_D$, $a(x) = \sqrt{1 + x^2}$,

$$\langle R \rangle = 1 - \frac{l}{\sqrt{3}l_D} H(\mu_0, 1)$$

— коэффициент отражения от поглощающей среды [42].

Переход в формулах (61)–(64) от случая дискретных поглощающих частиц к объемному поглощению в среде получается в пределе $\sigma_a \rightarrow 0$, $n\sigma_a = l_a^{-1} = \text{const}$.

В рассматриваемом случае центров малого радиуса ведущим всегда является вклад чисто интерференционного происхождения (61). Вклады, обусловленные неоднородностью среды, (62)–(64), имеют дополнительную малость порядка $\sigma k_0^2(l/l_D)^2$. В выражениях (61)–(64) диффузионная длина l_D играет качественно ту же роль, что и толщина L в случае чисто упругого рассеяния. При $q > l_D^{-1}$ ведущий вклад в спектр (61) переходит в (51).

Что касается поведения корреляционной функции интенсивности, то для нее аналогия со слоем конечной толщины не вполне годится, так как антикорреляция интенсивностей сохраняется и при больших ρ ($\rho \gg l_D$):

$$C_R(\rho) \approx C_R^{\text{coh}(sp)}(\rho) = -H^2(\mu_0, 1) \frac{l}{k_0^2 \rho^3} \begin{cases} 1, & l < \rho < l_D, \\ \frac{\rho}{2l_D} \exp\left(-\frac{\rho}{l_D}\right), & \rho > l_D. \end{cases} \quad (65)$$

При прохождении волн через толстый поглощающий слой ($L \gg l_D$) слагаемые спектра флуктуаций равны

$$M_T^{\text{coh}(sp)} = \frac{3\pi}{4k_0^2} \frac{l_D}{l} \langle T \rangle^2 \frac{1}{a(x) - 1} \left\{ [2a^2(x) - 1] \times \right. \\ \times \left[\frac{2}{a(x)[a(x) + 1]} - \exp\left(-\frac{2L}{l_D} [a(x) - 1]\right) \right] - \frac{1}{3} \frac{l^2}{l_D^2} a^2(x) \times \\ \left. \times \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_D} [a(x) - 1]\right) \right] \right\}, \quad (66)$$

$$M_T^{\text{coh}(a)} = M_T^{\text{incoh}(a)} = \frac{3}{8} \sigma_a \frac{l_D}{l} \langle T \rangle^2 \frac{1}{a(x) - 1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_D} [a(x) - 1]\right) \right], \quad (67)$$

$$M_T^{\text{coh}(a,s)} = M_T^{\text{incoh}(a,s)} = \frac{3}{4} \sigma_a \frac{l_D}{l} \langle T \rangle^2 \frac{a(x)}{a(x) - 1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_D} [a(x) - 1]\right) \right], \quad (68)$$

$$M_T^{\text{coh}(s)} = M_T^{\text{incoh}(s)} = \frac{1}{8} \sigma \frac{l}{l_D} \langle T \rangle^2 \frac{a^2(x)}{a(x) - 1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_D} [a(x) - 1]\right) \right], \quad (69)$$

где

$$\langle T \rangle = \frac{2l}{\sqrt{3}l_D} H(\mu_0, 1) \exp\left(-\frac{L}{l_D}\right)$$

— коэффициент прохождения через толстый поглощающий слой ($L \gg l_D$, $\langle T \rangle \ll 1 - \langle R \rangle$) [42].

Основной вклад в спектр флуктуаций прошедшей интенсивности дает выражение (66). В спектре $M_T(q)$ можно выделить три участка. При $q < (l_D L)^{-1/2}$ спектр $M_T(q)$ практически не меняется, в интервале $(l_D L)^{-1/2} < q < l_D^{-1}$ спектр флуктуаций убывает как $1/q^2$ и, наконец, при $q > l_D^{-1}$ — как $1/q$.

Отвечающая спектру (66) корреляционная функция ведет себя следующим образом:

$$C_T^{coh(sp)}(\rho) = \frac{3\langle T \rangle^2}{2(k_0 l)^2} \frac{l}{l_D} \begin{cases} \frac{l_D}{\rho} + \frac{1}{4} \ln \frac{L}{l_D}, & l < \rho < l_D, \\ \frac{L l_D}{\rho^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4L l_D}\right), & \rho > \sqrt{L l_D}. \end{cases} \quad (70)$$

В интервале $l_D < \rho < \sqrt{L l_D}$ функция $C_T^{coh(sp)}(\rho)$ остается практически постоянной. Такое поведение корреляционной функции существенно отличается от предсказаний [18].

Вклад в корреляционную функцию, обусловленный неоднородностью среды, может оказаться важным только при небольших ρ , $l < \rho < l_D$, где

$$C_T^{coh(s)}(\rho) = C_T^{incoh(s)}(\rho) = -\frac{1}{16\pi} \langle T \rangle^2 \frac{\sigma}{l_D l} \left(\frac{l}{\rho}\right)^3. \quad (71)$$

Интересно отметить, что, согласно формулам (63) и (68), одновременные флуктуации рассеивающих и поглощающих свойств среды по-разному действуют в геометрии отражения и в геометрии прохождения. Локальное увеличение коэффициентов рассеяния и поглощения вызывает в отраженной интенсивности изменения противоположных знаков: увеличение рассеивающей способности среды увеличивает, а поглощения, напротив, уменьшает значение интенсивности. Поэтому в геометрии отражения флуктуации, обусловленные локальной неоднородностью среды, оказываются подавленными (см. сумму вкладов (62)–(64)). Дисперсия коэффициента отражения в рассматриваемом приближении определяются чисто интерференционным механизмом:

$$\langle (\delta R)^2 \rangle = \frac{3\pi}{2A k_0^2} (1 - \langle R \rangle)^2 \frac{l_D}{l} \left(1 - \frac{l^2}{3l_D^2} + \dots\right). \quad (72)$$

В случае прохождения ситуация иная. Локальное увеличение коэффициентов рассеяния и поглощения приводит к эффектам одного знака — уменьшает значение прошедшей интенсивности. Поэтому в присутствии поглощающих частиц флуктуации только увеличиваются (см. (67)–(69)). Дисперсия коэффициента прохождения равна

$$\langle (\delta T)^2 \rangle = \frac{3}{2A} \langle T \rangle^2 \frac{L}{l} \left[\frac{\pi}{k_0^2} \left(1 - \frac{l^2}{3l_D^2} + \dots\right) + 3 \left(\sigma_a + \sigma \frac{l^2}{9l_D^2} + \dots\right) \right]. \quad (73)$$

В отличие от (59) в поглощающей среде $\langle (\delta R)^2 \rangle \gg \langle (\delta T)^2 \rangle$. При этом, однако, относительные флуктуации коэффициента прохождения оказываются намного больше, $\langle (\delta R)^2 \rangle / \langle R \rangle^2 \ll \langle (\delta T)^2 \rangle / \langle T \rangle^2$, и линейно растут с толщиной L .

При распространении в поглощающей среде волн, различающихся по частоте, когерентный вклад в спектр флуктуаций изменяется так же, как и в случае упругого рассеяния. В частности, величина $M^{coh}(q=0, \Delta\omega)$ приобретает дополнительный множитель $2l_{\Delta\omega}/(\sqrt{3}l_D)$ при отражении и $2l_{\Delta\omega}/(\sqrt{3}L)$ при прохождении.

Хотя приведенные выше результаты получены для неупорядоченной среды, состоящей из центров малого радиуса, многие качественные выводы относительно характера дальних корреляций интенсивности остаются в целом справедливыми и для рассеивателей произвольного размера. Необходимо только, чтобы режим распространения волн в среде был диффузионным. Для крупных рассеивателей условие $\sigma \leq 4\pi/k_0^2$ может не выполняться, и поэтому роль слагаемых, обусловленных локальной неоднородностью среды, оказывается более заметной. Подробнее этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

4. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В СРЕДЕ С КРУПНЫМИ РАССЕИВАТЕЛЯМИ

При многократном рассеянии волн в среде с крупными (размер больше длины волн) частицами возможны два предельных режима распространения.

В случае, когда рассеивающий слой является толстым ($L \gg l_{tr}$, $l_{tr} = l/(1 - \langle \cos \vartheta \rangle)$) — транспортная длина упругого рассеяния, $\langle \cos \vartheta \rangle$ — средний косинус угла однократного рассеяния), а поглощение в среде слабым ($l_{tr} \ll l_a$), угловое распределение рассеянных волн мало отличается от изотропного [36, 37], и реализуется режим пространственной диффузии излучения, аналогичный рассмотренному в разд. 3 для рассеивателей малого радиуса. Структура выражений для спектра флуктуаций остается такой же, как и в формулах (42), (43), однако коэффициенты перед различными вкладами несколько изменяются (см. Приложение В). При этом коэффициенты перед ведущим когерентным и некогерентным вкладами в спектр флуктуаций отличаются от соответствующих коэффициентов в формулах (42), (43) лишь заменой l и σ на l_{tr} и $\sigma_{tr} = \sigma(1 - \langle \cos \vartheta \rangle)$. Существенно, что для крупных частиц соотношение между k_0^{-2} и σ_{tr} может быть произвольным. В частности, для неборновских рассеивателей выполняется неравенство $k_0^2 \sigma_{tr} \sim k_0^2 a^2 |n_0 - 1|^2 \gg 1$ (n_0 — показатель преломления частиц), и некогерентный вклад становится таким же важным, как и ведущий когерентный вклад в спектр флуктуаций.

При $k_0^2 \sigma_{tr} \gg 1$ сравнение выражений для когерентного и некогерентного вкладов в корреляционную функцию (см. формулы (52), (56), (57), (60), (65), (70), (71)) с учетом замены l, σ на l_{tr}, σ_{tr} приводит к следующим выводам.

В случае прохождения волн через слой как при чисто упругом рассеянии, так и при наличии поглощения некогерентный вклад в корреляционную функцию $C_T(\rho)$ доминирует в интервале $l_{tr} < \rho < l_{tr} \sqrt{k_0^2 \sigma_{tr}}$. Если падающие волны различаются по частоте на $\Delta\omega$, верхняя граница этого интервала сдвигается до значения

$$l_{tr} \sqrt{k_0^2 \sigma_{tr}} \left(\frac{\Delta\omega L^4}{c l_{tr}^3 k_0^2 \sigma_{tr}} \right)^{1/6} > l_{tr} \sqrt{k_0^2 \sigma_{tr}}.$$

В случае отражения от среды монохроматического излучения когерентный и некогерентный вклады в корреляционную функцию $C_R(\rho)$ имеют одинаковую зависимость от ρ , и поэтому некогерентный вклад преобладает только для относительно тонких слоев или при достаточно сильном поглощении, $\min(L, l_D) < l_{tr} \sqrt{k_0^2 \sigma_{tr}}$, где $l_D = \sqrt{l_a l_{tr}/3}$ — диффузионная длина для частиц произвольного размера [37, 42]. Если частоты падающих волн различаются, то когерентный вклад с ростом ρ начинает убывать быстрее (см. (57)), и при сдвиге частот $\Delta\omega > c/(l_{tr} k_0^2 \sigma_{tr})$ на достаточно больших расстояниях $\rho > L(\Delta\omega l_{tr} k_0^2 \sigma_{tr}/c)^{-1/2}$ некогерентный вклад становится преобладающим.

В случае, когда толщина рассеивающего слоя невелика ($L < l_{tr}$), а также в условиях достаточно сильного поглощения ($l_a < l_{tr}$) при любом значении L реализуется другой предельный режим распространения волн — малоугловое многократное рассеяние [37, 50–53]. В отличие от режима пространственной диффузии при малоугловом многократном рассеянии угловое распределение резко анизотропно — вытянуто в направлении первоначального распространения волн. Интенсивностью рассеянного назад излучения в этом случае можно пренебречь [37].

Флуктуации интенсивности при малоугловом многократном рассеянии чрезвычайно подробно исследованы применительно к задаче распространения волн в турбулент-

ной среде [10–13]. Применимость результатов [10–13] ограничена теми условиями, которые характерны для турбулентных сред: очень крупные пространственные неоднородности показателя преломления, отсутствие поглощения, борновское однократное рассеяние. Как показывает анализ [29], полученные в [10–13] результаты применимы до тех пор, пока поперечное смещение траекторий распространения волн не превышает максимальный размер неоднородностей («внешний» масштаб турбулентности). В неоднородной среде с дискретными рассеивателями предположения, использованные в [10–13], как правило, не выполняются, и необходимо применять иную схему решения уравнения для \mathcal{S}_4 . Вопрос о переходе от приближений, предложенных в [10–13], к рассматриваемому нами случаю, когда последовательные столкновения происходят в зоне Фраунгофера отдельного рассеивателя, проанализирован в работах [29, 49].

Рассмотрим общие выражения (24), (25) в условиях многократного рассеяния на малые углы. Чтобы избежать громоздких вычислений, будем предполагать, что волны падают на среду по нормали к поверхности. В этом случае удобно перейти от единичных векторов Ω к двумерным векторам $\theta = \Omega_{||}$ и считать, что компоненты θ меняются в бесконечных пределах. В новых переменных общие выражения (24), (25) для спектра флуктуаций интенсивности прошедшего через слой излучения примут вид

$$M_T^{coh}(\mathbf{q}) = n \int_0^L dz \int d^2\theta'' \int d^2\theta'_1 \left| \int d^2\theta' I(L, \mathbf{q}|z, \theta') h(\theta', \theta'|\theta'', \theta'_1) \right|^2 \times \\ \times I(z, \theta''|\theta_0 = 0, \Delta\omega) I(z, \theta'_1|\theta_0 = 0, -\Delta\omega), \quad (74)$$

$$M_T^{incoh}(\mathbf{q}) = n \int_0^L dz \left| \int d^2\theta' \int d^2\theta'' I(L, \mathbf{q}|z, \theta') \left[\sigma_{tot} \delta(\theta' - \theta'') - \frac{d\sigma}{d\Omega}(|\theta' - \theta''|) \right] \right| \times \\ \times I(z, \theta''|\theta_0 = 0)^2, \quad (75)$$

где

$$h(\theta', \theta'|\theta'', \theta'_1) = \frac{2\pi i}{k_0} [f(\theta' - \theta'') \delta(\theta' - \theta'_1) - f^*(\theta' - \theta'_1) \delta(\theta' - \theta'')] + \\ + f(\theta' - \theta'') f^*(\theta' - \theta'_1). \quad (76)$$

В отличие от случая пространственной диффузии излучения спектр флуктуаций в среде с крупномасштабными центрами оказывается чувствительным к виду амплитуды однократного рассеяния. Поэтому вычисления по формулам (74), (75) нужно проводить с учетом конкретной угловой зависимости $f(\theta)$.

Качественные особенности корреляций интенсивности при малоугловом рассеянии можно понять в рамках наиболее простой модели, соответствующей приближению Фоккера–Планка, или диффузионному приближению по угловой переменной [37, 42, 50–53]. В этом приближении, с одной стороны, можно достаточно просто выделить различные вклады в спектр флуктуаций, а с другой, — удается избежать вычислительных трудностей, связанных с конкретным видом амплитуды рассеяния.

Предположим, что угол отклонения в одном столкновении мал по сравнению с характерным углом многократного рассеяния и пропагаторы интенсивности, входящие в (74), (75), являются более плавными функциями углов, чем амплитуда $f(\theta)$. Тогда в

уравнении переноса (8) (или (11)), а также в выражениях (74), (75) пропагаторы интенсивности можно разложить в ряд по малому углу однократного рассеяния.

Уравнение переноса (11) в этом приближении превращается в уравнение Фоккера-Планка, или в уравнение диффузии по углам [42]. Его решение с учетом поглощения в среде было найдено в работах [50, 51]. Используя результаты [51], входящие в (74), (75), пропагаторы можно записать в виде

$$I(z, \theta|0, \Delta\omega = 0) = \left(2\pi \operatorname{sh} \frac{z}{\sqrt{l_a l_{tr}}}\right)^{-1} \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \exp \left[-\frac{z}{l_a} - \frac{1}{2} \theta^2 \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \operatorname{cth} \frac{z}{\sqrt{l_a l_{tr}}} \right], \quad (77)$$

$$I(L, \mathbf{q}|z, \theta) = \left(\operatorname{ch} \frac{L-z}{\sqrt{l_a l_{tr}}}\right)^{-1} \exp \left[-\frac{L-z}{l_a} - \frac{\theta^2}{2} \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \operatorname{th} \frac{L-z}{\sqrt{l_a l_{tr}}} - \right. \\ \left. - i\mathbf{q}\theta \sqrt{l_a l_{tr}} \operatorname{th} \frac{L-z}{\sqrt{l_a l_{tr}}} - \frac{1}{2} q^2 l_a \left(L-z - \sqrt{l_a l_{tr}} \operatorname{th} \frac{L-z}{\sqrt{l_a l_{tr}}} \right) \right]. \quad (78)$$

При конечном сдвиге частот $\Delta\omega$ значение $I(z, \theta|0, \Delta\omega)$ можно получить из (77), заменив l_a на $l_a/[1 - i(\Delta\omega/c)l_a]$.

Когерентный вклад в спектр флуктуаций (74) преобразуем, раскладывая величину $I(L, \mathbf{q}|z, \theta')$ в ряд в окрестности направления $\theta'_+ = (\theta'' + \theta''_+)/2$. В результате получим

$$\int d^2\theta' I(L, \mathbf{q}|z, \theta') h(\theta'|\theta'', \theta''_+) = I(L, \mathbf{q}|z, \theta_+) \frac{d\sigma_a}{d\Omega}(\theta_-) + \left\{ -\frac{\pi i}{k_0} [f(-\theta_-) + f^*(\theta_-)] \theta_- + \right. \\ \left. + \int d^2\theta' (\theta' - \theta_+) f\left(\theta' - \theta_+ - \frac{1}{2}\theta_-\right) f^*\left(\theta' - \theta_+ + \frac{1}{2}\theta_-\right) + \dots \right\} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \theta_+} I(L, \mathbf{q}|z, \theta_+) + \dots, \quad (79)$$

где $\theta_- = \theta'' - \theta''_+$,

$$\frac{d\sigma_a}{d\Omega}(\theta_-) = \frac{2\pi i}{k_0} [f(-\theta_-) - f^*(\theta_-)] + \int d^2\theta' f\left(\theta' - \frac{1}{2}\theta_-\right) f^*\left(\theta' + \frac{1}{2}\theta_-\right) \approx \\ \approx \frac{1}{k_0^2} \int_0^\infty d^2p \exp(i\mathbf{p}\theta) (1 - |S_p|^2) \quad (80)$$

— «дифференциальное» сечение поглощения в малоугловом приближении,

$$S_p = |S_p| \exp(2i\delta_p) = 1 + 2ik_0 f_p,$$

S_p и f_p — коэффициенты разложения S -матрицы и амплитуды рассеяния по парциальным волнам [39]. Подставляя разложение (79) в выражение (74), приходим к следующему ряду для когерентного вклада в спектр флуктуаций:

$$M_T^{coh}(\mathbf{q}) = n \int_0^z dz \int d^2\theta \left[\alpha_a |I(L, \mathbf{q}|z, \theta)|^2 + \alpha_{sp} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} I(L, \mathbf{q}|z, \theta) \right|^2 - \right. \\ \left. - \alpha_{a,s} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} |I(L, \mathbf{q}|z, \theta)|^2 + \alpha_s \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_k} + \frac{\delta_{ik}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i} I(L, \mathbf{q}|z, \theta) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \theta_k} I^*(L, \mathbf{q}|z, \theta) + \dots \right] I^2(z, \theta|0, \Delta\omega). \quad (81)$$

Выражение (81) представляет собой сумму вкладов (44), отвечающих различным механизмам возникновения флуктуаций интенсивности.

Первое слагаемое в выражении (81) — это вклад $M_T^{coh(a)}$, обусловленный возмущением объемной спекл-структуры флуктуациями числа поглощающих частиц в малом объеме среды. При $\Delta\omega = 0$ разложение спектра $M_T^{coh(a)}$ при малых q в ведущем по l/L порядке имеет вид

$$M_T^{coh(a)}(\mathbf{q}) = n\alpha_a \int_0^L dz \int d^2\theta |I(L, \mathbf{q}|z, \theta)|^2 I^2(z, \theta|0, \Delta\omega = 0) =$$

$$= \frac{n\alpha_a}{4\pi} \langle T \rangle^2 l_{tr} \begin{cases} \ln \frac{L}{l} \left(1 - \frac{1}{3} q^2 \frac{L^3}{l_{tr}} + \dots \right), & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ 2 \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}. \end{cases} \quad (82)$$

где

$$\alpha_a = \int d^2\theta \left[\frac{d\sigma_a}{d\Omega}(\theta) \right]^2 = \frac{(2\pi)^2}{k_0^4} \int d^2p (1 - |S_p|^2)^2, \quad (83)$$

$$\langle T \rangle = \left(\text{ch} \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{L}{l_a} \right) \quad (84)$$

— коэффициент прохождения излучения через слой толщиной L [50, 51]. Выражение для спектра в нуле, $M_T^{coh(a)}(\mathbf{q} = 0)$, в несколько ином виде было получено в [49].

Коэффициент α_a (93) пропорционален разности суммарного сечения поглощения двух «лучей», распространяющихся независимо, и сечения поглощения двух «лучей», проходящих через один центр:

$$\alpha_a = \frac{4\pi^2}{k_0^2} (2\sigma_a - \sigma_a^{(2)}), \quad \sigma_a = \frac{1}{k_0^2} \int d^2p (1 - |S_p|^2), \quad \sigma_a^{(2)} = \frac{1}{k_0^2} \int d^2p (1 - |S_p|^4). \quad (85)$$

Отметим, что для «черных» сферических частиц радиуса a

$$\sigma_a = \sigma_a^{(2)} = \pi a^2, \quad \alpha_a = \left(\frac{2\pi}{k_0} \right)^2 \sigma_a.$$

Второе слагаемое в выражении (81) представляет собой вклад $M_T^{coh(sp)}$, источником которого являются всплески интенсивности в объемной спекл-структуре. В том же приближении, в каком получено соотношение (82), вклад $M_T^{coh(sp)}$ имеет вид

$$M_T^{coh(sp)}(\mathbf{q}) = n\alpha_{sp} \int_0^L dz \int d^2\theta \left| \frac{\partial}{\partial \theta} I(L, \mathbf{q}|z, \theta) \right|^2 I^2(z, \theta|0, \Delta\omega = 0) =$$

$$= \frac{n\alpha_{sp}}{4\pi} \langle T \rangle^2 l_{tr} \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{L^3}{l_a^2 l_{tr}} + q^2 L^2 \ln \frac{L}{l} + \dots, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \frac{L}{l_a} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (86)$$

где

$$\alpha_{sp} = \left(\frac{2\pi}{k_0}\right)^2 \sigma_{tr} = 2\frac{(2\pi)^2}{k_0^4} \int d^2p \left(\frac{d\delta}{dp}\right)^2 |S_p|^2. \tag{87}$$

В борновском приближении для сечения однократного рассеяния результат (86) был получен ранее в [29] с помощью решения малоуглового транспортного уравнения для четвертого момента.

«Перекрестный» вклад в спектр, $M_T^{coh(a,s)}$, определяется третьим слагаемым в (81). Он обусловлен корреляцией возмущений объемной спекл-структуры (флуктуациями площающих и рассеивающих свойств среды). Выражение для $M_T^{coh(a,s)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} M_T^{coh(a,s)}(\mathbf{q}) &= -n\alpha_{a,s} \int_0^L dz \int d^2\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} |I(L, \mathbf{q}|z, \boldsymbol{\theta})|^2\right) I^2(z, \boldsymbol{\theta}|0, \Delta\omega = 0) = \\ &= \frac{n\alpha_{a,s}}{4\pi} \langle T \rangle^2 l_{tr} \begin{cases} 4\frac{L}{l_a} \ln \frac{L}{l} - \frac{8}{3} \frac{L^3}{l_a^2 l_{tr}} - \frac{4}{3} q^2 \frac{L^4}{l_a l_{tr}} \ln \frac{L}{l} + \dots, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ 4\frac{L}{l_a} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots\right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \end{aligned} \tag{88}$$

где

$$\alpha_{a,s} = \frac{(2\pi)^2}{k_0^4} \int d^2p \left(\frac{d\delta}{dp}\right)^2 (1 - |S_p|^2). \tag{89}$$

Четвертое слагаемое в (81) отвечает вкладу $M_T^{coh(s)}$, который связан с возмущением объемного спекла флуктуациями рассеивающих свойств среды. Для $M_T^{coh(s)}$ справедливо следующее разложение:

$$\begin{aligned} M_T^{coh(s)}(\mathbf{q}) &= n\alpha_s \int_0^L dz \int d^2\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_k} + \frac{\delta_{ik}}{2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial\theta_i} I(L, \mathbf{q}|z, \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial\theta_k} I^*(L, \mathbf{q}|z, \boldsymbol{\theta}) I^2(z, \boldsymbol{\theta}|0, \Delta\omega = 0) = \\ &= \frac{n\alpha_s}{4\pi} \langle T \rangle^2 l_{tr} \begin{cases} 4 \ln \frac{L}{l} \left[\left(\frac{L}{l_a}\right)^2 + q^2 \frac{L^3}{l_a} + \frac{3}{8} q^4 L^4 + \dots \right], & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ 2\frac{L}{l_a} \sqrt{\frac{l_a}{l_{tr}}} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots\right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \end{aligned} \tag{90}$$

где

$$\alpha_s = \frac{(2\pi)^2}{k_0^4} \int d^2p \left(\frac{d\delta}{dp}\right)^4. \tag{91}$$

Вклад $M_T^{coh(s)}$ пропорционален четвертой степени амплитуды рассеяния и в обычном борновском приближении для однократного рассеяния отсутствует [29].

В выражении (81) приведены только ведущие члены, отвечающие вкладам различной природы в спектр флуктуаций. По этой причине в (81) не выписано отдельно слагаемое $(\partial I/\partial \theta)(\partial^3 I^*/\partial \theta^3) + \text{с.с.}$, которое имеет то же происхождение, что и вклад (86), и является лишь поправкой к нему. Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить малоугловое разложение в формуле (27).

Используя полученные выше соотношения для различных вкладов в спектр флуктуаций и формулу (21), находим

$$\frac{\langle (\delta T)^2 \rangle^{coh}}{\langle T \rangle^2} = \frac{\pi n}{Ak_0^4} l_{tr} \int d^2 p \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 \frac{L^3}{l_a^2 l_{tr}} + \left[(1 - |S_p|^2) + 2 \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 \frac{L}{l_a} \right]^2 \ln \frac{L}{l}, & L \ll \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ 2 \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 \frac{L}{l_a} + 2 \left[(1 - |S_p|^2) + \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \right]^2 \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}}, & L \gg \sqrt{l_a l_{tr}}. \end{cases} \quad (92)$$

Первое слагаемое в (92) связано с образованием случайной интерференционной картины в объеме среды, а слагаемое в квадратных скобках — с возмущением этой картины пуассоновскими флуктуациями распределения рассеивателей. Вклад в дисперсию $\langle (\delta T)^2 \rangle^{coh}$, обусловленный локальной неоднородностью среды, фактически представляет собой разложение по степеням малой величины — среднего угла многократного рассеяния в слое $\langle \theta^2 \rangle_L$ ($\langle \theta^2 \rangle_L = 2L/l_{tr}$ при $L < \sqrt{l_a l_{tr}}$ и $\langle \theta^2 \rangle_L = 2\sqrt{l_a/l_{tr}}$ при $L > \sqrt{l_a l_{tr}}$ [50–53]).

Если поглощение обусловлено самими частицами среды, то ведущим среди слагаемых, связанных с пуассоновскими флуктуациями, будет первое, источником которого являются флуктуации поглощающих свойств среды. В результате в формулах (81) и (92) конкурировать могут только два вклада, $M_T^{coh(sp)}$ и $M_T^{coh(a)}$. Сравнение этих вкладов позволяет получить следующую универсальную оценку для их отношения:

$$\frac{M_T^{coh(sp)}}{M_T^{coh(a)}} \sim \frac{\langle \theta^2 \rangle_L^3}{\langle \vartheta^2 \rangle},$$

где $\langle \vartheta^2 \rangle \approx 2(1 - \langle \cos \vartheta \rangle)$ — средний квадрат угла однократного рассеяния. Из этой оценки следует, что соотношение между $M_T^{coh(sp)}$ и $M_T^{coh(a)}$ может быть любым. Однако с увеличением толщины роль вклада $M_T^{coh(sp)}$ в общем случае возрастает. В частности, при $L > \sqrt{l_a l_{tr}}$ этот вклад всегда является главным, если сечение поглощения не очень велико, $\sigma_a < \sigma(\sigma_{tr}/\sigma)^{1/3} < \sigma$.

Если частицы только рассеивают излучение, а поглощающим является континуум между ними, то в разложениях (81), (92) остаются только два вклада, $M_T^{coh(sp)}$ и $M_T^{coh(s)}$. Их отношение по порядку величины равно

$$\frac{M_T^{coh(sp)}}{M_T^{coh(s)}} \sim \frac{\langle \theta^2 \rangle_L}{\langle \vartheta^2 \rangle} \gg 1.$$

В этом случае остаются справедливыми все качественные выводы, полученные в борновском приближении для сечений [29].

Главным вкладом в спектр отвечают следующие асимптотики корреляционных функций:

$$C_T^{coh(sp)}(\rho) = \frac{\langle T \rangle^2}{k_0^2} \begin{cases} 4 \frac{L^2}{\rho_L^4} \ln \frac{L}{l} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_L^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{\rho_L^2} \right), & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \frac{2}{\rho_L^2} \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \left(\frac{\rho_L^4}{8 l_a^{3/2} l_{tr}^{1/2} \rho^2} - 1 \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{\rho_L^2} \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (93)$$

$$C_T^{coh(a)}(\rho) = \frac{n \alpha_a}{(2\pi)^2} \langle T \rangle^2 l_{tr} \begin{cases} \frac{1}{\rho_L^2} \ln \frac{L}{l} \exp \left(-\frac{\rho^2}{\rho_L^2} \right), & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \frac{2L}{l_a^{1/2} l_{tr}^{1/2} \rho_L^2} \exp \left(-\frac{\rho^2}{\rho_L^2} \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (94)$$

где $\rho_L^2 = 4L^3/(3l_{tr})$ при $L < \sqrt{l_a l_{tr}}$ и $\rho_L^2 = 4Ll_a$ при $L > \sqrt{l_a l_{tr}}$.

Рассмотрим теперь некогерентный вклад в спектр флуктуаций. Предполагая, что входящие в (75) пропагаторы интенсивности являются более плавными функциями углов, чем дифференциальное сечение однократного рассеяния, представим выражение для $M_T^{incoh}(\mathbf{q})$ в следующем виде:

$$M_T^{incoh}(\mathbf{q}) = n \int_0^L dz \left| \int d^2\theta \left(\sigma_a I(L, \mathbf{q}|z, \theta) I(z, \theta|0) + \frac{\sigma_{tr}}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} I(L, \mathbf{q}|z, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} I(z, \theta|0) \right) \right|^2. \quad (95)$$

Первое слагаемое под знаком модуля в (95) отвечает флуктуациям поглощающих, а второе слагаемое — рассеивающих свойств среды. В связи с этим формулу (95) можно записать как сумму вкладов (45). Подставляя в (95) выражения (77), (78), получим

$$M_T^{incoh}(\mathbf{q}) = n \langle T \rangle^2 [\sigma_a^2 m_a(\mathbf{q}) + \sigma_a \sigma_{tr} m_{a,s}(\mathbf{q}) + \sigma_{tr}^2 m_s(\mathbf{q})], \quad (96)$$

где

$$m_a(\mathbf{q}) = \begin{cases} L - \frac{1}{6} q^2 \frac{L^4}{l_{tr}} + \dots, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ L \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (97)$$

$$m_{a,s}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{L^2}{l_a} + \frac{1}{3} q^2 L^3 + \dots, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ L \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (98)$$

$$m_s(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{L^3}{l_a^2} + \frac{1}{4} q^2 \frac{L^4}{l_a} + \frac{1}{20} q^4 L^5 + \dots, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \frac{1}{4} L \frac{l_{tr}}{l_a} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 L l_a + \dots \right), & L > \sqrt{l_a l_{tr}}. \end{cases} \quad (99)$$

При $q = 0$ соотношения (96)–(99) определяют дисперсию коэффициента прохождения излучения через слой (см. (21)):

$$\frac{\langle(\delta T)^2\rangle^{incoh}}{\langle T\rangle^2} = \frac{\sigma_a}{A} \frac{L}{l_a} \begin{cases} 1 + \frac{L}{l_{tr}} + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{l_{tr}}\right)^2, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ 1 + \sqrt{\frac{l_a}{l_{tr}}} + \frac{1}{4} \frac{l_a}{l_{tr}}, & L > \sqrt{l_a l_{tr}}. \end{cases} \quad (100)$$

Из выражений (96)–(100) следует, что если поглощение обусловлено самими частицами неупорядоченной среды, то источником некогерентных флуктуаций интенсивности, в первую очередь, являются флуктуации поглощающей способности среды. Напротив, если частицы среды только рассеивают излучение, а поглощающим является континуум между ними, то флуктуации поглощения отсутствуют, и в выражении (96) остается только слагаемое, пропорциональное $m_s(\mathbf{q})$. В этом случае дисперсия коэффициента прохождения определяется третьими слагаемыми в формуле (100).

Спектру (96)–(99) отвечает асимптотика корреляционной функции следующего вида:

$$C_T^{incoh}(\rho) = n \langle T \rangle^2 \frac{\exp(-\rho^2/\rho_L^2)}{\pi \rho^2} L \times \begin{cases} \left(\sigma_a^2 - 3 \frac{\rho^2}{\rho_L^2} \frac{l_{tr}}{L} \sigma_a \sigma_{tr} + 9 \frac{\rho^4}{\rho_L^4} \frac{l_{tr}}{L} \sigma_{tr}^2 \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho}{\rho_L}, & L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \sigma_a^2 + \sqrt{\frac{l_{tr}}{l_a}} \sigma_a \sigma_{tr} + \frac{1}{4} \frac{l_{tr}}{l_a} \sigma_{tr}^2, & L > \sqrt{l_a l_{tr}}, \end{cases} \quad (101)$$

где смысл ρ_L^2 тот же, что и в (93), (94), и предполагается $\rho > \rho_L$. Как следует из выражения (101), при небольших толщинах ($L < \sqrt{l_a l_{tr}}$) дальняя асимптотика $C_T^{incoh}(\rho)$ определяется флуктуациями рассеивающих свойств среды (при $\rho > \rho_L (l_{tr} L / l_a^2)^{1/4}$ в (101) преобладает последнее слагаемое). При $L > \sqrt{l_a l_{tr}}$ корреляционная функция, как и спектр флуктуаций, определяется, в первую очередь, флуктуациями поглощения.

В случае, когда падающие волны различаются по частоте, флуктуации интерференционного происхождения ослабляются, а некогерентные флуктуации остаются без изменений. Спектр $M_T^{coh}(\mathbf{q}, \Delta\omega)$ можно вычислить с помощью формулы (81), подставив в нее значение $I(z, \theta|0, \Delta\omega)$, которое получается из (77) с помощью замены l_a на $l_a(1 - i(\Delta\omega/c)l_a)^{-1}$. Мы не будем останавливаться на анализе спектра, а рассмотрим только корреляции между значениями полного потока при разных частотах. В связи с экспериментами [20–25] интересно понять, насколько частотные корреляции интенсивности чувствительны к особенностям рассеяния волн в неупорядоченной среде.

Асимптотика корреляционной функции

$$C_T(\Delta\omega) = \langle (T_{\omega_0+\Delta\omega/2} - \langle T_{\omega_0+\Delta\omega/2} \rangle) (T_{\omega_0-\Delta\omega/2} - \langle T_{\omega_0-\Delta\omega/2} \rangle) \rangle^{coh} = \frac{1}{A} M_T^{coh}(\mathbf{q}=0, \Delta\omega)$$

имеет следующий вид:

$$C_T(\Delta\omega) = \frac{\pi}{A} \frac{n}{k_0^4} \langle T \rangle^2 l_{tr} \int d^2 p \left[3 \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 \frac{l_{\Delta\omega}}{l_a} \text{th}^2 \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}} + \right. \\ \left. + (1 - |S_p|^2)^2 \left(\ln \frac{l_{\Delta\omega}}{l} + 2 \frac{l_{\Delta\omega}}{\sqrt{l_a l_{tr}}} \text{th} \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}} + \dots \right) \right]. \quad (102)$$

В (102) $l_{\Delta\omega} = \sqrt{2cl_{tr}/\Delta\omega}$ и предполагается, что $l < l_{\Delta\omega} < \min(L, \sqrt{l_a l_{tr}})$. Если частицы среды не поглощают излучение, то из (102) получаем

$$C_T(\Delta\omega) = \frac{3\pi}{2Ak_0^2} \langle T \rangle^2 \frac{l_{\Delta\omega}}{l_a} \text{th}^2 \frac{L}{\sqrt{l_a l_{tr}}}, \quad (103)$$

Сравнивая выражения (102) и (103), можно прийти к выводу, что флуктуации поглощающих свойств среды приводят к появлению слабо зависящего от частоты вклада в $C(\Delta\omega)$. Объяснение этому эффекту дать достаточно просто. При относительно больших значениях $\Delta\omega$ область пространства, где волны интерферируют и образуют объемный спекл, ограничена глубинами $z < l_{\Delta\omega}$. Поэтому длина $l_{\Delta\omega}$ играет в рассматриваемом случае ту же роль, что и толщина слоя L в случае $\Delta\omega = 0$ при $L < \sqrt{l_a l_{tr}}$ (см. (82) и (92)).

Отметим, что при распространении волн, достаточно сильно различающихся по частоте ($l_{\Delta\omega} < l_{tr}$), общая формула (81) может быть использована для вычисления спектра флуктуаций не только при малоугловом рассеянии, но и в случае диффузионного транспорта волн в толстом ($L \gg l_{tr}$) слое. В этой ситуации «входящие» пропагаторы в (81) описывают малоугловое рассеяние волн при распространении в относительно тонких (толщиной порядка $l_{\Delta\omega}$) слоях, а «выходящие» отвечают распространению волн в режиме пространственной диффузии. Основной вклад будет давать второе слагаемое в (81), так как диффузионный режим предполагает выполнение условия слабого поглощения ($l_{tr} \ll l_a$, или $1 - |S_p|^2 \ll (d\delta/dp)^2$). В геометрии прохождения

$$C_T(\Delta\omega) = \frac{\pi}{2Ak_0^2} \langle T \rangle^2 \frac{l_{\Delta\omega}}{l_{tr}}, \quad (104)$$

где $\langle T \rangle$ — коэффициент прохождения излучения через толстый ($L \gg l_{tr}$) слой среды при нормальном падении. Аналогичную формулу можно получить и для случая отражения, если подставить в (81) значения «выходящих» пропагаторов не при $z = L$, а при $z = 0$. При $L \ll \sqrt{l_a l_{tr}}$ результаты вычислений не будут отличаться от (104), что является следствием сохранения потока.

Формулу (104) интересно сравнить со значением $C_T(\Delta\omega)$ при меньших частотных сдвигах ($l_{\Delta\omega} \gg l_{tr}$), которое нетрудно получить с помощью формул разд. 3, заменив в них l на l_{tr} . Соответствующие результаты отличаются только общим численным множителем (в (104) он в три раза меньше), что объясняется различиями в режиме распространения интерферирующих волн на участке $z < l_{\Delta\omega}$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выше были выведены общие соотношения, позволяющие свести задачу о вычислении спектра флуктуаций к решению уравнения переноса для средней интенсивности, и приведены результаты расчетов, выполненных для двух характерных режимов многократного рассеяния волн в неупорядоченной среде — пространственной диффузии и малоуглового рассеяния. Полученные результаты дают достаточно полное представление о дальних корреляциях интенсивности при распространении когерентного излучения в среде с дискретными рассеивателями.

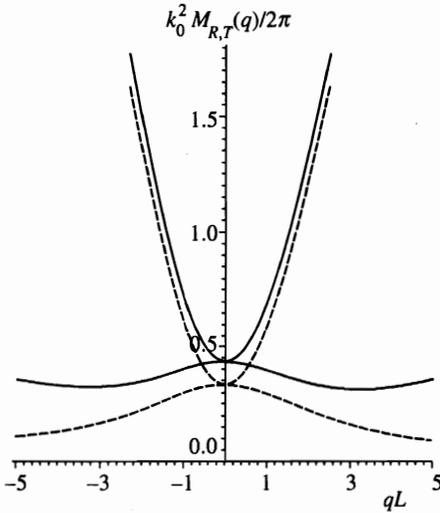


Рис. 3. Спектр флуктуаций отраженной (верхние кривые) и прошедшей (нижние кривые) интенсивности при упругом рассеянии в слое неупорядоченной среды. Толщина слоя $L = 10 l_{tr}$, поглощение отсутствует. Сплошные кривые — сильные рассеиватели ($k_0 a |n_0 - 1| = 2$), штриховые — предельный случай «борновских» центров ($k_0 a |n_0 - 1| \ll 1$)

В общем случае имеется два источника флуктуаций интенсивности — случайная интерференция многократно рассеянных волн и случайная пространственная неоднородность коэффициентов рассеяния и поглощения среды, которая вызвана флуктуациями числа рассеивателей в единице объема. Оба источника дают вклад в когерентные флуктуации интенсивности, и только второй источник — в некогерентные флуктуации.

Относительная роль каждого из указанных выше механизмов возникновения флуктуаций, а также особенности поведения корреляционной функции и спектра флуктуаций интенсивности зависят от режима многократного рассеяния волн в среде, присутствия поглощения, размеров рассеивающих частиц и степени монохроматичности падающего излучения.

При распространении волн в режиме пространственной диффузии ($l_{tr} \ll \ll \min(L, l_a)$) преобладает чисто интерференционный механизм возникновения флуктуаций интенсивности. Флуктуации, обусловленные случайной неоднородностью среды, в целом представляют собой поправку к чисто интерференционному вкладу. Их роль наиболее важна при диффузии волн в среде с сильными («неборновскими», $k_0 a |n_0 - 1| > 1$) рассеивателями. В этой ситуации становится заметным некогерентный вклад в спектр, который при $q > l_{tr}^{-1} \sqrt{k_0^2 \sigma_{tr}}$ в геометрии прохождения превышает вклад, связанный с интерференцией (см. рис. 3).

Отметим, что при ограничении длины траекторий распространения волн ($\min(L, \sqrt{l_a l_{tr}}) < l_{tr} (k_0 l_{tr})^2 (k_0^2 \sigma_{tr})$) флуктуации, вызванные случайной неоднородностью среды, в первую очередь, некогерентного происхождения, оказываются больше, чем обсуждавшийся ранее (см., например, [16, 17, 19]) интерференционный вклад второго порядка по взаимодействию «лучей».

Некогерентный вклад в спектр флуктуаций играет принципиальную роль в случае, когда падающие волны различаются по частоте, и с ростом частотного сдвига $\Delta\omega$ ведущий когерентный вклад уменьшается. Учет некогерентного вклада может объяснить наблюдавшееся в экспериментах [23, 24] плато в кривой ослабления корреляций с ростом $\Delta\omega$ и изменить количественные результаты для коррелятора интенсивности. В связи с этим использованная в [23, 24] процедура извлечения значений транспорт-

ных коэффициентов среды из кривой ослабления корреляций, а также интерпретация экспериментальных данных [23, 24] должны быть пересмотрены.

Присутствие поглощения при распространении волн в режиме пространственной диффузии сказывается в основном на изменении распределения многократно рассеянного излучения в среде. Дополнительные флуктуации, возникающие из-за поглощения в самих рассеивающих частицах, могут быть заметны только для достаточно крупных частиц, если выполнено условие $k_0^2 \sigma_a \sim (k_0 a)^3 \text{Im } n_0 > 1$ (одновременно должно выполняться предположение о диффузионном режиме, $\sigma_a \ll \sigma_{tr}$). Близкие условия, как показывает анализ, были достигнуты в экспериментах [23, 24].

В случае сильно анизотропного многократного рассеяния волн ($l_{tr} \gg \min(L, l_a)$) чисто интерференционный источник флуктуаций остается по-прежнему важным, однако роль эффектов, обусловленных флуктуациями числа рассеивателей становится более заметной, чем в режиме пространственной диффузии излучения.

Если поглощение излучения происходит в континууме, а сами рассеивающие частицы являются непоглощающими, то соотношение между ведущим интерференционным и некогерентным вкладами в спектр зависит от значения параметра $k_0^2 \sigma_{tr}$; для слабопреломляющих частиц большого радиуса

$$k_0^2 \sigma_{tr} \simeq 8\pi(k_0 a |n_0 - 1|)^2 \ln \frac{1}{|n_0 - 1|}$$

[53]. В борновском случае ($k_0 a |n_0 - 1| \ll 1$) преобладает интерференционный вклад, а в противоположном случае сильных рассеивателей ($k_0 a |n_0 - 1| > 1$) — некогерентный вклад в спектр флуктуаций. Для сильных рассеивателей интерференционный вклад оказывается важным только в тонких слоях ($L < \sqrt{l_a l_{tr}}$), где он определяет зависимость спектра от пространственной частоты q при $q < (k_0^2 \sigma_{tr} L^3 / l_{tr})^{-1/2}$.

Если поглощающими являются сами частицы неупорядоченной среды, то роль флуктуаций числа частиц в единице объема становится особенно существенной. Возникающие в этом случае пространственные флуктуации коэффициента поглощения проявляются как в когерентном, так и в некогерентном вкладах в спектр флуктуаций; при этом когерентный вклад в одинаковой степени определяется случайной интерференцией волн и возмущением интерференционной картины флуктуациями поглощения в среде. В рассматриваемой ситуации меняется соотношение между когерентным и некогерентным вкладами в спектр. Некогерентный вклад может оказаться преобладающим даже в борновском случае ($k_0^2 \sigma_{tr} \sim (k_0 a |n_0 - 1|)^2 \ll 1$) при условии, что сечение поглощения достаточно велико ($k_0^2 \sigma_a \sim (k_0 a)^3 \text{Im } n_0 > 1$).

Отметим, что различные слагаемые в когерентном и некогерентном вкладах в спектр флуктуаций должны быть сопоставимы друг с другом в промежуточных условиях $\sigma \sim \sigma_{tr} \sim \sigma_a \sim k_0^{-2}$ ($k_0 a \sim |n_0 - 1| \sim \text{Im } n_0 \sim 1$), при которых режим распространения волн не сводится ни к диффузии, ни к малоугловому рассеянию.

Как следует из полученных выше результатов, увеличение поглощения (при неизменных других оптических параметрах среды) приводит в целом к усилению флуктуаций интенсивности. Наиболее простая причина этого связана с флуктуациями коэффициента поглощения в случае, когда поглощение происходит в самих частицах неупорядоченной среды. Если же поглощающим является континуум между частицами, то с увеличением поглощения изменяется только распределение излучения в среде. Уменьшаются эффективные длины траекторий распространения волн, и спектр флуктуаций сужается. Однако относительная величина дисперсии флуктуаций коэффициента про-

хождения $\langle(\delta T)^2\rangle/\langle T\rangle^2$ с ростом поглощения в среде ведет себя немонотонным образом. Для крупномасштабных рассеивателей величину $\langle(\delta T)^2\rangle/\langle T\rangle^2$ можно оценить, учитывая только чисто интерференционный и некогерентный вклады (дополнительные слагаемые когерентного вклада в этом случае оказываются меньше, чем некогерентный вклад). В результате получаем

$$\frac{\langle(\delta T)^2\rangle}{\langle T\rangle^2} = \frac{L}{A l_{tr}} \begin{cases} \frac{2\pi}{k_0^2} + \sigma_{tr} \left(\frac{l_{tr}}{L}\right)^2, & l_{tr} < L < \sqrt{l_a l_{tr}}, \\ \frac{3\pi}{2k_0^2} + \sigma_{tr} \frac{l_{tr}}{l_a}, & l_{tr} < \sqrt{l_a l_{tr}} < L, \\ \frac{\pi}{k_0^2} + \sigma_{tr} \frac{l_{tr}}{l_a}, & \sqrt{l_a l_{tr}} < l_{tr} < L. \end{cases} \quad (105)$$

Из (105) следует, что в режиме диффузии интерференционный вклад с ростом поглощения уменьшается, а при переходе к режиму распространения с сильно анизотропным угловым распределением излучения начинает возрастать. Что касается некогерентного вклада в (105), то он с ростом поглощения в среде увеличивается монотонно, причем при $L > \sqrt{l_a l_{tr}}$ формулы, полученные для случаев пространственной диффузии и малоуглового многократного рассеяния, совпадают.

Еще одна важная качественная закономерность связана с влиянием сохранения потока на форму спектра флуктуаций интенсивности. Если почти весь падающий поток отражается ($1 - \langle R \rangle \ll 1$), то в спектре флуктуаций отраженной интенсивности имеется провал (рис. 3). Аналогичная особенность есть в спектре рассеянного на малые углы прошедшего излучения, когда почти весь поток проходит через среду ($1 - \langle T \rangle \ll 1$, см. соотношения (82), (86) и (96)). Если при этом поглощение происходит в континууме, то провал в спектре флуктуаций при $q = 0$ сохраняется до больших глубин. Форма спектра в последнем случае будет уже зависеть от значения «редуцированного» коэффициента прохождения $\langle \tilde{T} \rangle$ ($\langle T \rangle = \exp(-L/l_a) \langle \tilde{T} \rangle$), который описывает уменьшение пропускания излучения слоем среды из-за возникающего при рассеянии искривления траекторий распространения волн. До тех пор пока $1 - \langle \tilde{T} \rangle \ll 1$, случайное перераспределение интенсивности в плоскости наблюдения будет происходить при заданном прошедшем потоке, равном ослабленному в $\exp(-L/l_a)$ раз падающему потоку. При $\langle \tilde{T} \rangle < 1$ условие, связанное с сохранением потока, становится несущественным, и в спектре вместо провала возникает максимум. Аналогичный максимум всегда есть в спектре прошедшей интенсивности при распространении волн в режиме пространственной диффузии, поскольку в этом случае $\langle T \rangle \ll 1$.

Поведение спектра в окрестности $q = 0$, подобно форме пика когерентного обратного рассеяния [3, 7, 43–47], определяется длиной траекторий распространения волн в среде. В частности, при отражении от полубесконечной непоглощающей среды, когда ограничения длины траекторий нет, провал в спектре имеет треугольную форму.

В заключение отметим, что полученные выше результаты могут быть использованы и при описании корреляций между сдвинутыми во времени значениями интенсивности $I(\mathbf{r}, \Omega, t)I(\mathbf{r}_1, \Omega_1, t_1)$ в неупорядоченной среде с медленно движущимися частицами. Соответствующие изменения коснутся только когерентного вклада в спектр флуктуаций. Для вычисления $M^{coh}(z_f, \mathbf{q}, t - t_1)$ в формулах (24), (42) и (74) во «входящие» пропагаторы вместо $-i\Delta\omega/c$ нужно подставить дополнительное «эффективное поглощение» $n\sigma_a^{add}(t - t_1)$, описывающее разрушение когерентности волн из-за движения

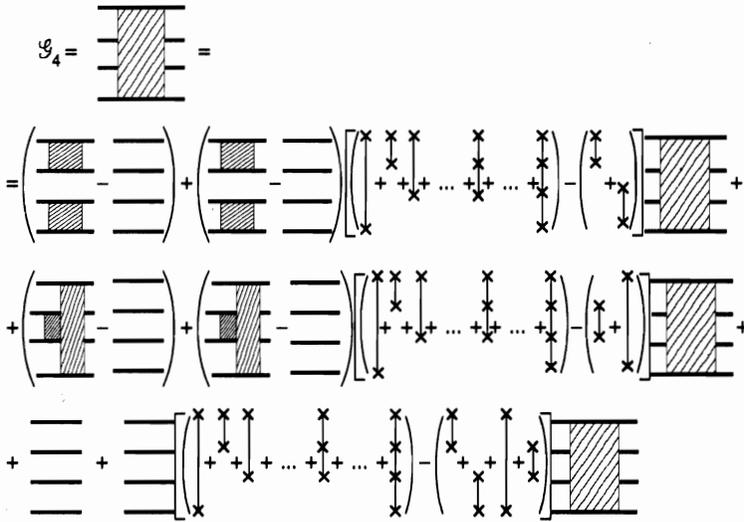


Рис. 4

рассеивателей (см., например, [3, 37, 54, 55]). В наиболее интересном случае небольших значений $t - t_1$, когда интерференция еще не подавлена,

$$n\sigma_a^{add}(t - t_1) = n\sigma_{tr}k_0^2\langle(\Delta x)^2\rangle_{t-t_1} \ll n\sigma_{tr},$$

где $\langle(\Delta x)^2\rangle_t$ — среднее квадратичное смещение рассеивающей частицы за время t . Для броуновского движения $\langle(\Delta x)^2\rangle_t = 2Dt$, D — коэффициент диффузии частиц.

Автор признателен М. Ю. Черкасову за сотрудничество на начальном этапе работы. Также автор благодарен Е. Е. Городничеву, С. Л. Дудареву и А. И. Кузовлеву за интерес к работе и ценные советы, а также Ш. Фенгу за полезное обсуждение затронутых в работе проблем. Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (гранты N3U000 и N3U300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95.02.05530).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ряд диаграмм, определяющих четвертый момент поля (рис. 1б), можно перегруппировать и представить \mathcal{G}_4 в виде суммы трех вкладов (рис. 4):

$$\mathcal{G}_4(1, 2, 3, 4) = \mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 2; 3, 4) + \mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 4; 3, 2) + \mathcal{G}_4^{(non)}(1, 2, 3, 4), \quad (A.1)$$

где $\mathcal{G}_4^{(sc)}$ определяется диаграммами, содержащими не менее одного акта рассеяния в «выходящих» лестничных пропагаторах, а $\mathcal{G}_4^{(non)}$ определяется диаграммами, у которых «выходящие» пропагаторы отвечают нерассеянному полю. Представление (A.1) не нарушает условие симметрии (13), хотя слагаемые $\mathcal{G}_4^{(sc)}$ в отдельности этому условию не удовлетворяют.

В условиях многократного рассеяния ($l \ll L$) основной вклад в четвертый момент поля дают величины $\mathcal{G}_4^{(sc)}$. Это обстоятельство позволяет написать для $\mathcal{G}_4^{(sc)}$ замкнутое уравнение (рис. 5):

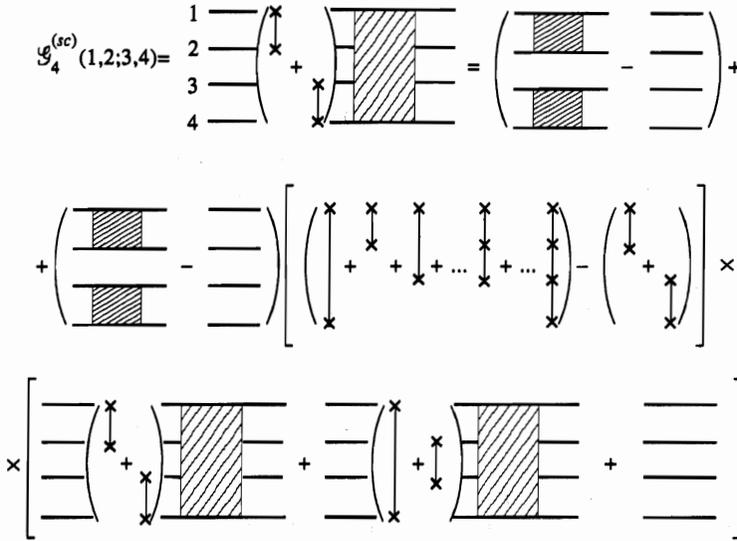


Рис. 5

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 2; 3, 4) = & \mathcal{G}_2(1, 2)\mathcal{G}_2(3, 4) - \mathcal{G}_2^{(0)}(1, 2)\mathcal{G}_2^{(0)}(3, 4) + \\
 & + \left[\mathcal{G}_2(1, 2)\mathcal{G}_2(3, 4) - \mathcal{G}_2^{(0)}(1, 2)\mathcal{G}_2^{(0)}(3, 4) \right] \sum_a \hat{h}_a(1, 2)\hat{h}_a(3, 4) \left[\mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 2; 3, 4) + \right. \\
 & \left. + \mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 4; 3, 2) + \mathcal{G}_1(1)\mathcal{G}_1^*(2)\mathcal{G}_1(3)\mathcal{G}_1^*(4) \right], \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

где цифрами 1, ..., 4 обозначены переменные, относящиеся к входящим в определение (1) полям $\Psi(1), \dots, \Psi^*(4)$. Уравнение (A.2) следует из (4), если \mathcal{G}_4 в виде (A.1) подставить в интегральное слагаемое уравнения (4) и при этом приближенно положить $\mathcal{G}_4^{(non)} = \mathcal{G}_1(1)\mathcal{G}_1^*(2)\mathcal{G}_1(3)\mathcal{G}_1^*(4)$.

По своему определению величина $\mathcal{G}_4^{(sc)}(1, 2; 3, 4)$ является резкой функцией разностных переменных $r_1 - r_2$ и $r_3 - r_4$ (масштаб изменения $\mathcal{G}_4^{(sc)}$ по этим переменным порядка r_{coh}) и плавной функцией переменных $(r_1 + r_2)/2$ и $(r_3 + r_4)/2$. Поэтому, имея дело с $\mathcal{G}_4^{(sc)}$, можно перейти к (r, Ω) -представлению. Для этого в (A.2) нужно выполнить фурье-преобразование по разностным переменным. В результате для второго момента интенсивности, связанного с $\mathcal{G}_4^{(sc)}$ соотношением (14), из уравнения (A.2) получим уравнение (15).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Определим плотность потока в точке r как [37]

$$\begin{aligned}
 J_k(r) = & \frac{i}{2k_0} \left[\Psi(r) \frac{\partial}{\partial r_k} \Psi^*(r) - \Psi^*(r) \frac{\partial}{\partial r_k} \Psi(r) \right] = \\
 = & \frac{i}{2k_0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{\partial}{\partial r'_k} \right) \Psi(r) \Psi^*(r) \right]_{r=r'} \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Тогда для корреляционной функции между значениями плотности потока излучения в плоскости наблюдения $z = z_f$ получим формулу

$$\begin{aligned}
 C(z_f, \rho = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)_{\parallel}) &= \langle J_z(z_f, \mathbf{r}_{\parallel}) J_z(z_f, \mathbf{r}_{1\parallel}) \rangle - \langle J_z(z_f) \rangle^2 = \\
 &= -\frac{1}{4k_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z'_1} \right) \left[\mathcal{F}_4(z, \mathbf{r}_{\parallel}; z', \mathbf{r}_{\parallel}; z_1, \mathbf{r}_{1\parallel}; z'_1, \mathbf{r}_{1\parallel}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathcal{F}_2(z, \mathbf{r}_{\parallel}; z', \mathbf{r}_{\parallel}) \mathcal{F}_2(z_1, \mathbf{r}_{1\parallel}; z'_1, \mathbf{r}_{1\parallel}) \right] \right\} \Big|_{z=z'=z_1=z'_1=z_f}. \quad (\text{Б.2})
 \end{aligned}$$

Если подставить в определение (Б.2) выражения для составляющих момента \mathcal{F}_4 (см. (А.1)), получим корреляционную функцию $C(z_f, \rho)$ в виде суммы трех вкладов. Подстановка в (Б.2) величины

$$\mathcal{F}_4^{(sc)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) - \left[\mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{F}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) - \mathcal{F}_2^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{F}_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \right]$$

с учетом соотношений (9) и (14) приводит к выражению (20), которое определяет дальние ($\rho \gg l\theta$, где θ — характерный угол многократного рассеяния) корреляции интенсивности. Подстановка в (Б.2) величины $\mathcal{F}_4^{(sc)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$ дает вклад (28), описывающий ближние убывающие на масштабах $\rho \sim \lambda/\theta$ корреляции. Наконец, величина $\mathcal{F}_4^{(non)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) - \mathcal{F}_2^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{F}_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$ определяет часть корреляционной функции $C(z_f, \rho)$, которая, хотя и не играет такой самостоятельной роли, как первые два вклада, должна учитываться при $\rho < l\theta$.

Фурье-образ корреляционной функции — спектр флуктуаций (19) — выражается через второй момент интенсивности следующим образом.

При низких пространственных частотах ($q \ll k_0\theta$) вклад в спектр флуктуаций дают все составляющие корреляционной функции. Подставляя в (Б.2) соотношение

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_4(1, 2, 3, 4) - \mathcal{F}_2(1, 2) \mathcal{F}_2(3, 4) &= \mathcal{F}_2(1, 2) \mathcal{F}_2(3, 4) \times \\
 \times \sum_a \hat{h}_a(1, 2) \hat{h}_a(3, 4) &\left[\mathcal{F}_4^{(sc)}(1, 2; 3, 4) + \mathcal{F}_4^{(sc)}(1, 4; 3, 2) + \mathcal{F}_1(1) \mathcal{F}_1^*(2) \mathcal{F}_1(3) \mathcal{F}_1^*(4) \right]
 \end{aligned}$$

и используя формулы (9) и (14), получим

$$\begin{aligned}
 M(z_f, \mathbf{q}) &= \int_{(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_n) > 0} d\mathbf{\Omega} \int_{(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_n) > 0} d\mathbf{\Omega}_1 \int d^2\rho \exp(-i\mathbf{q}\rho) (\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_n)(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{\Omega}_n) \times \\
 &\times \left\{ n \int d\mathbf{r}' \iint d\mathbf{\Omega}' d\mathbf{\Omega}'_1 \iint d\mathbf{\Omega}'' d\mathbf{\Omega}''_1 I_{\omega_0 + \Delta\omega/2} \left(z_f, \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)_{\parallel} + \frac{1}{2}\rho, \mathbf{\Omega}|\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}' \right) \times \right. \\
 &\times I_{\omega_0 - \Delta\omega/2} \left(z_f, \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)_{\parallel} - \frac{1}{2}\rho, \mathbf{\Omega}_1|\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}'_1 \right) \times \\
 &\times \left[h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'|\mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') h(\mathbf{\Omega}'_1, \mathbf{\Omega}'_1|\mathbf{\Omega}''_1, \mathbf{\Omega}''_1) \langle I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}'') I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}''_1) \rangle + \right. \\
 &+ h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'|\mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}''_1) h(\mathbf{\Omega}'_1, \mathbf{\Omega}'_1|\mathbf{\Omega}''_1, \mathbf{\Omega}'') \langle I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}'', \Delta\omega) I_{\omega_0}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}''_1, -\Delta\omega) \rangle + \\
 &\left. + h(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'|\mathbf{\Omega}'', \mathbf{\Omega}'') h(\mathbf{\Omega}'_1, \mathbf{\Omega}'_1|\mathbf{\Omega}''_1, \mathbf{\Omega}''_1) I_{\omega_0 + \Delta\omega/2}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}''|\mathbf{\Omega}_0) I_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}''_1|\mathbf{\Omega}_0) \right] \Big\}. \quad (\text{Б.3})
 \end{aligned}$$

При высоких пространственных частотах ($q > k_0\theta$) вклад в спектр флуктуаций дают только ближние корреляции, и $M(z_f, \mathbf{q})$ определяется как фурье-образ выражения (28).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В случае слабого поглощения $l_{tr} \ll l_a$ режим пространственной диффузии волн в среде с рассеивателями произвольного размера наступает при толщине слоя $L \gg l_{tr}$. Подставляя в общие выражения (24), (25) пропагаторы интенсивности в диффузионном приближении [37] (см. формулы (31), (41), где l нужно заменить на l_{tr}), получим для спектра флуктуаций следующее разложение:

$$\begin{aligned}
 M^{coh}(z_f, \mathbf{q}) = & \frac{l_{tr}}{24\pi k_0^2} \int_0^L dz \left[\left| \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, q|z) \right|^2 + q^2 |F(z_f, q|z)|^2 \right] |F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 + \\
 & + \frac{1}{16\pi^2} n \varepsilon_a \int_0^L dz |F(z_f, q|z)|^2 |F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 - \\
 & - \frac{l_{tr}^2}{96\pi^2} n \varepsilon_{a,s} \int_0^L dz \frac{\partial}{\partial z} |F(z_f, q|z)|^2 \frac{\partial}{\partial z} |F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega)|^2 + \\
 & + \frac{l_{tr}^4}{144\pi^2} n \int_0^L dz \left[\varepsilon_s^{(0)} \left| \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, q|z) \right|^2 + q^2 \varepsilon_s^{(1)} |F(z_f, q|z)|^2 \right] \left| \frac{\partial}{\partial z} F(z|0, \mathbf{\Omega}_0, \Delta\omega) \right|^2, \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^{incoh}(z_f, \mathbf{q}) = & \frac{n}{16\pi^2} \int_0^L dz |\sigma_a F(z_f, q|z) F(z|0, \mathbf{\Omega}_0) - \\
 & - \frac{1}{3} \sigma_{tr} l_{tr}^2 \frac{\partial}{\partial z} F(z_f, q|z) \frac{\partial}{\partial z} F(z|0, \mathbf{\Omega}_0)|^2. \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

Входящие в (B.1), (B.2) функции можно вычислить с помощью выражений (46), в которых l нужно заменить на l_{tr} . Коэффициенты в разложении (B.1) определяются выражениями

$$\varepsilon_a = \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1) (\sigma_a^p)^2, \quad (B.3)$$

$$\varepsilon_{a,s} = \sum_{p=0}^{\infty} \left[(p+1) \sigma_{tr}^{p+1} + p \sigma_{tr}^p \right] \sigma_a^p, \quad (B.4)$$

$$\varepsilon_s^{(0,1)} = \frac{3}{5} \sum_{p=0}^{\infty} \left[A_p^{(0,1)} (\Delta_p \Delta_{p-1}^* + \text{c.c.}) + B_p^{(0,1)} (\Delta_p^2 + \text{c.c.}) \right], \quad (B.5)$$

где σ_a^p и σ_{tr}^p — парциальные сечение поглощения и транспортное сечение,

$$\sigma_a^p = \frac{\pi}{k_0^2} (1 - |S_p|^2), \quad \sigma_{tr}^p = \frac{\pi}{k_0^2} |S_p - S_{p-1}|^2, \quad (B.6)$$

$$A_p^{(0)} = \frac{4p(p-1)}{2p-1}, \quad B_p^{(0)} = \frac{p(4p^2+1)}{4p^2-1}, \quad (\text{B.7})$$

$$A_p^{(1)} = \frac{3p(p-1)}{2p-1}, \quad B_p^{(1)} = -\frac{2p(p^2-1)}{4p^2-1}, \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta_p = \frac{2\pi i}{k_0} (f_p - f_{p-1}^*) + 4\pi f_p f_{p-1}^* = \frac{\pi}{k_0^2} (S_p S_{p-1}^* - 1), \quad (\text{B.9})$$

S_p и f_p — коэффициенты разложения S -матрицы и амплитуды рассеяния по парциальным волнам, $S_p = 1 + 2ik_0 f_p$ [39].

В случае рассеивателей малого радиуса в суммах (B.3)–(B.5) остается по одному слагаемому, отвечающему s -волне. В результате имеем

$$\sigma_{tr} = \sigma, \quad \varepsilon_a = \sigma_a^2, \quad \varepsilon_{a,s} = \sigma\sigma_a, \quad \varepsilon_s^{(0)} = \sigma^2 - \frac{2\pi\sigma}{k_0^2}, \quad \varepsilon_s^{(1)} = 0, \quad (\text{B.10})$$

и формулы (B.1), (B.2) переходят в (42), (43).

В случае крупных рассеивателей, когда в каждом отдельном столкновении происходит отклонение на малый угол, в суммах (B.3)–(B.5) нужно удерживать большое число членов. Если считать входящие в (B.3)–(B.5) слагаемые плавными функциями p и заменить в (B.3)–(B.5) суммирование интегрированием, то для коэффициентов ε_a , $\varepsilon_{a,s}$ и ε_s можно получить следующие соотношения:

$$\varepsilon_a = \frac{\pi}{k_0^4} \int d^2p (1 - |S_p|^2)^2, \quad (\text{B.11})$$

$$\varepsilon_{a,s} = \frac{4\pi}{k_0^4} \int d^2p (1 - |S_p|^2) \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2, \quad (\text{B.12})$$

$$\varepsilon_s^{(0)} = \frac{4\pi}{k_0^4} \int d^2p \left[\frac{3}{5} \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^4 \right], \quad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon_s^{(1)} = \frac{4\pi}{k_0^4} \int d^2p \left[\frac{6}{5} \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^2 - \left(\frac{d\delta}{dp} \right)^4 \right]. \quad (\text{B.14})$$

При выводе этих соотношений предполагалось, что $S_p = |S_p| \exp(2i\delta)$ и выполнено условие слабого поглощения $1 - |S_p|^2 \ll (d\delta/dp)^2$.

Литература

1. А. Ю. Зюзин, Б. З. Спивак, ЖЭТФ 93, 994 (1987).
2. J. Rammer, Rev. Mod. Phys. 65, 781 (1994).
3. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, УФН 166, 247 (1996).
4. Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ 41, 530 (1985).
5. P. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. 55, 1622 (1985).

6. C. P. Umbach, S. Washburn, R. B. Laibowitz, and R. A. Webb, *Phys. Rev. B* **30**, 4048 (1984); R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz, in *Localization, interaction and transport phenomena in impure metals*, ed. by G. Bergmann, Y. Bruynseraede, and B. Kramer (Springer-Verlag, New York (1985)).
7. S. Etemad, R. Thompson, and M. J. Andrejko, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 575 (1986); M. Kaveh, M. Rosenbluh, I. Edrei, and I. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2049 (1986).
8. B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2168 (1986).
9. A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2042 (1987).
10. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН **114**, 415 (1974).
11. V. I. Tatarskii and V. U. Zavorotnyi, *Prog. in Opt.* **18**, 204 (1980).
12. R. L. Fante, *Proc. IEEE* **68**, 1424 (1980).
13. J. L. Codona, D. B. Creamer, S. M. Flatte, R. G. Frehlich, and F. S. Henyey, *Radio Sci.* **21**, 929 (1986).
14. M. J. Stephen and G. Cwillich, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 285 (1987).
15. B. Z. Spivak and A. Yu. Zyuzin, *Sol. St. Comm.* **65**, 311 (1988).
16. P. A. Mello, E. Akkermans, and B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 459 (1988).
17. S. Feng, C. Kane, P. A. Lee, and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 834 (1988).
18. R. Pnini and B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **39**, 6986 (1989); *Phys. Lett. A* **157**, 265 (1991).
19. L. Wang and S. Feng, *Phys. Rev. B* **40**, 8284 (1989).
20. N. Garcia and A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1678 (1989).
21. M. P. van Albada, J. F. de Boer, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2787 (1990).
22. A. Z. Genack, N. Garcia, and W. Polkosnik, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2129 (1990).
23. N. Garcia and A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1850 (1991).
24. A. Z. Genack and N. Garcia, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2064 (1991).
25. J. F. de Boer, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **45**, 658 (1992).
26. E. Kogan and M. Kaveh, *Phys. Rev. B* **45**, 1049 (1992).
27. A. A. Lisyansky and D. Livdan, *Phys. Lett. A* **170**, 53 (1992); *Phys. Rev. B* **47**, 14157 (1993).
28. N. Garcia, A. Z. Genack, and A. A. Lisyansky, *Phys. Rev. B* **46**, 14475 (1992).
29. D. B. Rogozkin and M. Yu. Cherkasov, *Laser Phys.* **2**, 727 (1992); *Phys. Lett. A* **178**, 431 (1993).
30. N. Garcia, A. Z. Genack, R. Pnini, and B. Shapiro, *Phys. Lett. A* **176**, 458 (1993).
31. M. C. W. van Rossum, and Th. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Lett. A* **177**, 452 (1993).
32. Д. Б. Рогозкин, М. Ю. Черкасов, Письма в ЖЭТФ **58**, 608 (1993).
33. D. B. Rogozkin and M. Yu. Cherkasov, *Phys. Rev. B* **51**, 12256 (1995).
34. R. Berkovits and S. Feng, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3120 (1990).
35. Th. M. Nieuwenhuizen and M. C. W. van Rossum, *Phys. Lett. A* **177**, 102 (1993).
36. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, Москва (1972).
37. A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academ. Press, New York (1978).
38. Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов, *Теория переноса излучения: волновые и статистические аспекты*, Наука, Москва (1983).
39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
40. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
41. C. L. Kane, R. A. Serota, and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **37**, 6701 (1988).
42. В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, Москва (1972).
43. Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин, ЖЭТФ **94**(6), 56 (1988).
44. M. V. van der Mark, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **37**, 3575 (1988).
45. Е. Е. Городничев, С. Л. Дударев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **96**, 847 (1989); *Phys. Lett. A* **144**, 48 (1990).
46. P. E. Wolf, G. Maret, E. Akkermans, and R. Maynard, *J. de Phys.* **49**, 63 (1988).
47. Yu. N. Varabanenkov, Yu. A. Kravtsov, V. D. Ozrin, and A. I. Saichev, *Prog. in Opt.* **29**, 67 (1991).
48. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).

49. D. B. Rogozkin and M. Yu. Cherkasov, *Laser Phys.* **2**, 913 (1992).
50. Л. С. Долин, *ДАН СССР* **260**, 1344 (1981).
51. В. С. Ремизович, Д. Б. Рогозкин, М. И. Рязанов, *Изв. вузов, Радиофизика* **24**, 891 (1982).
52. J. Tessorof, *Phys. Rev. A* **35**, 872 (1987).
53. Е. Е. Городничев, Д. Б. Рогозкин, *ЖЭТФ* **107**, 209 (1995).
54. G. Maret and P. E. Wolf, *Z. Phys. B* **65**, 409 (1987); *Phys. Scr. T* **29**, 223 (1989).
55. F. C. MacKintosh and S. John, *Phys. Rev. B* **40**, 2383 (1989).