

ВОЗМОЖНОСТЬ ПОДАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ СВЕТА ПРИ ИЗБЫТОЧНЫХ ФОТОННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ВНУТРИ РЕЗОНАТОРА

Ю. М. Голубев[†], М. И. Колобов^{†*}, И. В. Соколов[†]

[†] Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского университета
198904, Санкт-Петербург, Россия

* Universität Essen Gesamthochschule

Поступила в редакцию 7 октября 1996 г.

На примере оптического возбуждения высокодобротного резонатора показано, что при наблюдении света на выходе этого резонатора эффективное подавление дробового шума фототока ниже квантового предела, вообще говоря, не зависит от параметров стационарного состояния полевого осциллятора (в частности, не зависит от среднеквадратичных фотонных флуктуаций) внутри резонатора и может иметь место как при любом допустимом отрицательном, так даже и при положительном значении параметра Мандела. При решении задачи предполагалось, что оптическое возбуждение осуществляется суперпозицией излучения субпуассоновского лазера и лазера с избыточными фотонными шумами. Формальное решение было осуществлено в рамках кинетического уравнения для матрицы плотности актуальных полей (внутри лазерных и пустого резонаторов), вывод которого с учетом направленного распространения поля из лазерных резонаторов внутрь пустого сделан здесь на основе квантовых уравнений Гейзенберга-Ланжевена. Полученное кинетическое уравнение может быть использовано для решения и других физических задач, поскольку оно применимо к оптическим схемам, содержащим, в принципе, произвольное число связанных резонаторов и интерференционных смесителей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Типичной задачей квантовой оптики является исследование свойств электромагнитного излучения, вышедшего из высокодобротного резонатора. В зависимости от конкретных физических условий внутрирезонаторный полевой осциллятор возбуждается или за счет взаимодействия с активной средой, как, например, для лазеров и микромлазеров, или за счет внешнего электромагнитного воздействия с участием (или без участия) линейной или нелинейной среды, как для узкополосных усилителей, бистабильных систем и т. д. Если речь не идет о таких явлениях, как, например, хаос, то во многих физических ситуациях и, в частности, в тех, которые нас будут интересовать здесь, полевой осциллятор через какое-то время переходит в стационарное состояние, продолжая находиться в непрерывном взаимодействии с другими подсистемами. На первый взгляд, кажется совершенно естественным сопоставлять наблюдаемые эффекты в поле излучения и это стационарное состояние. Во всяком случае традиция именно такая. Например, в случае обычного пуассоновского лазера говорят, что совершенно случайный внутрирезонаторный поток фотонов порождает в конечном счете совершенно же случайный пуассоновский поток фотоэлектронов в цепи фотодетектора. В случае же субпуассоновского лазера — частично урегулированный поток фотонов внутри резонатора порождает частично же урегулированный поток фотоэлектронов.

Следуя этой логике мы должны были бы предположить, что чем дальше состояние

осциллятора отстоит от классического, тем более выразительным должен быть квантовый эффект в наблюдении. И это было бы, несомненно, так, если бы речь шла об ансамблевых измерениях изолированного квантованного осциллятора. Однако здесь мы обсуждаем совершенно иную ситуацию, когда полевой осциллятор находится в условиях стационарного воздействия со стороны других важных подсистем (таких, как нелинейная среда внутри резонатора, внешнее оптическое воздействие, взаимодействие с резонатором и т. д.), и, как понятно из самых общих соображений, предсказательная роль стационарного состояния при этом перестает быть абсолютной, поскольку вклад в усредненные полевые характеристики способны давать теперь и те кинематические процессы, которые приводят осциллятор в конкретное стационарное состояние. Приведем несколько конкретных примеров, хорошо иллюстрирующих это.

Для качественных рассуждений удобно ввести в рассмотрение так называемый параметр Манделя ξ , характеризующий интегральные фотонные флуктуации внутри резонатора:

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}(1 + \xi). \quad (1)$$

Обсудим сейчас предельный случай $\xi = -1$, когда стационарное состояние осциллятора оказывается по своим свойствам близким к состоянию Фока (это осуществляется, например, в микромазере [1]). То, что полевой осциллятор находится в состоянии Фока (таким образом можно трактовать состояние с $\xi = -1$, поскольку оно означает отсутствие фотонных флуктуаций) в условиях непрерывного взаимодействия с другими подсистемами, может означать только одно: любая фотонная флуктуация внутри резонатора затухает с бесконечно большой скоростью. Выход фотона из резонатора воспринимается как флуктуация внутри резонатора, которая немедленно компенсируется релаксационными процессами. Поэтому любой следующий фотон, вышедший из резонатора, не может быть никак скоррелирован с предыдущим, а это означает, что поток фотонов, вышедших из резонатора, может быть только пуассоновским. Таким образом, хотя полевой осциллятор находится в предельном квантовом стационарном состоянии, тем не менее в наблюдении никаких квантовых эффектов ожидать не приходится.

Из этих рассуждений уже видно, что квантовый эффект в наблюдении связан, по меньшей мере, не только со стационарным состоянием полевого осциллятора, но и с релаксационными свойствами системы. Разумеется, этот же вывод может быть сделан и формально. Действительно, хорошо известно, что спектр флуктуаций фототока при идеальной фоторегистрации излучения, например, простейшего лазера или простейшего микромазера представляется в виде [2, 3]

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left(1 + 2\xi \frac{\kappa\Gamma}{\Gamma^2 + \omega^2} \right). \quad (2)$$

Если величина ξ отрицательна, то здесь на нулевой частоте имеется неклассическая особенность: провал с относительной глубиной, равной величине

$$\delta = 1 - \frac{i_{\omega=0}^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 2|\xi| \frac{\kappa}{\Gamma}. \quad (3)$$

Таким образом, здесь в явном виде иллюстрируется то, что квантовый эффект в наблюдении связан не только со стационарным состоянием полевого осциллятора (па-

раметром Мандела ξ), но и с кинематическими свойствами системы, а именно, со скоростью выхода фотонов из резонатора в направлении фотокатода κ и со скоростью затухания внутрирезонаторных фотонных флуктуаций Γ . В то же самое время видно и другое, что количественно один и тот же квантовый эффект (одно и то же значение δ) может быть, в принципе, обеспечен подбором подходящих кинематических параметров при самых разных значениях ξ , т. е. при самых разных стационарных состояниях полевого осциллятора.

Между величинами Γ и κ могут быть разные соотношения в зависимости от физической ситуации. Например, для оптимального субпуассоновского лазера $\Gamma = \kappa$. Это равенство возможно трактовать как то, что затухание фотонных флуктуаций внутри резонатора осуществляется только за счет процессов, связанных с выходом фотонов из резонатора. Однако, если при этом не все излучение попадает на фотодетектор, то $\Gamma > \kappa$. Как понятно, стационарное состояние полевого осциллятора не может зависеть от этого, и, таким образом, $\xi = -1/2$ и в том случае, когда все излучение, выходящее из резонатора, попадает на фотодетектор, и при частичной регистрации. И, как видно из (3), глубина квантового провала оказывается разной при одном и том же параметре Мандела. Уже этот пример заставляет нас думать, что наблюдение и стационарное состояние полевого осциллятора не связаны друг с другом вполне однозначно.

В микромазере возникает другая ситуация. Там могут быть обеспечены условия, когда $\xi = -1$, но при этом оказывается, что $\Gamma \gg \kappa$ даже при полной регистрации излучения и, как результат, глубина квантового провала в наблюдении почти равна нулю, т. е. внутри резонатора поле предельно квантовое, а снаружи — фактически пуассоновское. Разрушение квантовых свойств излучения при его выходе из резонатора тоже происходит, но не из-за стохастичности самого механизма выхода, а из-за слишком жесткой внутрирезонаторной скоррелированности процессов.

Еще один пример — в некотором смысле промежуточный между субпуассоновским лазером и микромазером. В сверхизлучательном лазере [4] тоже имеет место равенство $\xi = -1/2$, и при слабом возбуждении активной среды $\Gamma = 2\kappa$. Здесь так же, как и в микромазере, снижение глубины квантового провала (там до нуля, а здесь в два раза) возникает из-за отрицательного влияния внутрирезонаторных релаксационных процессов. Это влияние может быть сведено к нулю, если обеспечить значительное возбуждение активной среды, и тогда глубина квантового провала станет предельной.

Все приведенные здесь примеры допускают физически прозрачную трактовку: при выходе света из резонатора по разным причинам его квантовые свойства могут разрушаться.

Однако это далеко не полное и далеко не самое интересное заключение, которое в действительности может быть сделано. Сам вид формулы (3) заставляет нас задуматься над ситуациями, в которых между кинематическими коэффициентами возникает неравенство $\Gamma < \kappa$. Если подобные случаи встречаются в физике, то это означает, что полное подавление дробового шума возможно даже тогда, когда параметр Мандела хотя и отрицателен, но близок к нулю (стационарное состояние внутрирезонаторного полевого осциллятора практически пуассоновское). Формально этому ничто не мешает, но тут, разумеется, важно иметь какие-то конкретные физические примеры, и на деле они уже имеются. Так, в работе [5] рассмотрено возбуждение активной среды обычного лазера излучением субпуассоновского лазера. С помощью полученных в [5] формул здесь в Приложении Б показано, что подбором физических параметров возможно реализовать ситуацию, когда возникают параметры Мандела хотя и отрицательные, но близкие к

нулю, а в то же время наблюдаемый квантовый эффект оказывается полным, $\delta = 1$. Совершенно аналогичная ситуация имеет место и для микромазера при возбуждении его активной среды излучением субпуассоновского лазера [3].

Все это заставляет нас прийти к следующему заключению: вообще нет никаких оснований связывать заранее наблюдаемый квантовый оптический эффект со стационарным состоянием внутрирезонаторного полевого осциллятора. Пример оптического возбуждения пустого резонатора суперпозицией излучения от двух лазеров (субпуассоновского и с избыточными шумами), который здесь будет рассмотрен, хорошо иллюстрирует эту мысль. Мы покажем, что полное подавление дробового шума в фототоке может соответствовать самым разным (и даже положительным) значениям параметра Манделя. В частности, например, большим (суперпуассоновским) фотонным флуктуациям внутри резонатора могут соответствовать предельно малые (субпуассоновские) флуктуации фотоэлектронов.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 описывается постановка задачи с использованием кинетического уравнения для матрицы плотности поля в резонаторах, связанных направленными оптическими сигналами. Вывод этого уравнения дан в Приложении А. В разд. 3 и 4 проводятся расчеты стационарной дисперсии распределения числа фотонов и параметра Манделя внутреннего поля, а также наблюдаемой при фотоприеме выходящего излучения величины — спектра флуктуаций фототока. Сначала изучается более простая оптическая система, в которой пассивный резонатор освещается одним лазерным источником (разд. 3). Далее (в разд. 4) рассматривается освещение пассивного резонатора световым потоком, который формируется при оптическом смешении излучений обычного и субпуассоновского лазеров. Раздел 5 работы посвящен обсуждению физических результатов. В Приложении Б приведены результаты работы [5], переписанные под тем углом зрения, который интересен нам здесь.

2. СОВМЕСТНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ, ОБМЕНИВАЮЩИХСЯ НЕКЛАССИЧЕСКИМИ СВЕТОВЫМИ СИГНАЛАМИ

Вопрос о том, как описать с помощью метода квантового кинетического уравнения для светового поля направленную передачу оптического сигнала из одного резонатора в другой, рассматривался впервые Колобовым и Соколовым [6] и позднее Кармайклом [7] и Гардинером [8]. В этих работах рассмотрена ситуация, когда имеются два резонатора. Один из них образует источник (например, лазер), а второй — приемник того, вообще говоря, неклассического (субпуассоновского, сжатого и т. д.) света, который испускается источником.

Здесь мы будем обсуждать несколько более сложную физическую ситуацию, когда пассивный оптический резонатор возбуждается излучением от двух лазерных источников. Поэтому в Приложении А дается обобщение теории [6] на случай нескольких резонансных (или почти резонансных) полевых осцилляторов, сосредоточенных в разных резонаторах и обменивающихся в произвольной геометрии направленными оптическими сигналами. Исходный пункт данного рассмотрения отличается от [6]. Теория [6] строилась в некотором смысле из первых принципов. Квантование было проведено по модам сплошного спектра всего пространства с учетом краевых условий на зеркалах резонаторов, без выделения заранее локальных осцилляторов мод в резонаторах. Отсюда были получены коммутационные соотношения операторов светового поля внутри и вне

оптических резонаторов (соотношения с участием внешних полей см. [9]). На основе этих коммутационных соотношений и было выведено кинетическое уравнение.

В Приложении А мы используем более простой и наглядный метод квантовых уравнений Гейзенберга–Ланжевена, который в последнее время стал широко эксплуатироваться для задач квантовой оптики. Эти уравнения похожи на уравнения классической электродинамики. С их помощью в квантовой теории наглядно описываются такие волновые явления как интерференция, дифракция, частотная дисперсия сигнала при его распространении и т. д. Развита теория ввода и вывода излучения из резонатора [10, 11]. Мы покажем, что метод уравнений Гейзенберга–Ланжевена легко объединяется с использованным в [6] приемом обоснования кинетического уравнения для случая направленного переноса излучения. Это позволяет без затруднений получить кинетическое уравнение для нескольких осцилляторов поля, сосредоточенных в различных резонаторах и обменивающихся направленными оптическими сигналами. При этом естественным образом возможен учет промежуточных оптических элементов, осуществляющих деление, смешение сигналов и т. д.

Когда мы имеем дело с системой резонаторов, между которыми по определенным направлениям происходит обмен электромагнитной энергией, формально можно представлять это как набор множества квантовых осцилляторов электромагнитного поля, каждый из которых локализован в своем резонаторе. Для описания можно ввести в рассмотрение многоосцилляторную матрицу плотности и постараться построить для нее замкнутое уравнение. И здесь основная проблема теории состоит в том, чтобы она оказалась адекватной и отражала факт направленного движения световой волны: это не просто стандартное взаимодействие каких-то двух локализованных осцилляторов, приводящее к взаимному обмену электромагнитной энергией, а перенос энергии от одного осциллятора к другому, но не обратно.

Будет показано, что для многоосцилляторной матрицы плотности в случае многих оптически связанных резонаторов основное кинетическое уравнение может быть представлено в виде

$$\dot{\rho} = \left(\sum_{m=1}^M \hat{L}_m + \sum_{m \neq m_0}^M \hat{L}_{m_0 m} \right) \rho. \quad (4)$$

Оператор \hat{L}_m описывает развитие m -осциллятора (полевой осциллятор внутри m -резонатора) в отсутствие всех других осцилляторов.

Оператор $\hat{L}_{m_0 m}$ описывает воздействие на m -осциллятор со стороны m_0 -осциллятора:

$$\hat{L}_{m_0 m} \rho = g_{m m_0} [a_m^+, a_{m_0} \rho] + \text{H.c.} \quad (5)$$

Здесь a_i, a_i^+ ($i = m, m_0$) — фотонные операторы соответствующего локализованного осциллятора, $g_{m m_0}$ — коэффициент, описывающий проникновение сигнала из резонатора m_0 в резонатор m . В Приложении он приведен в наиболее общем виде с учетом возможного наличия каких-то оптических элементов в промежутках между резонаторами. Сейчас укажем, чему он равен для тех двух физических ситуаций, которые мы будем далее обсуждать. Например, нас будет интересовать система, состоящая всего из двух резонаторов (рис. 1): a -резонатор, в котором осуществляется субпуассоновская лазерная генерация и излучение которого попадает в другой, пассивный b -резонатор.

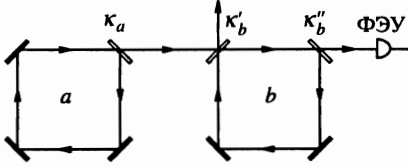


Рис. 1

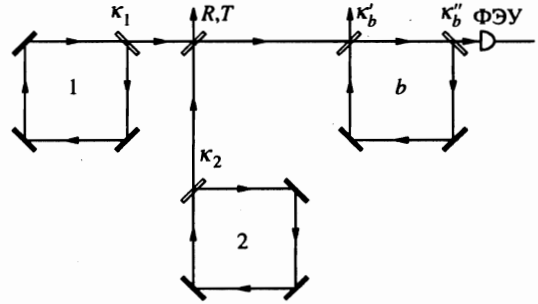


Рис. 2

Тогда из всех констант $g_{m\tau_0}$ отлична от нуля только одна:

$$g_{ba} = \sqrt{\kappa'_b \kappa_a}. \tag{6}$$

Здесь $\kappa_{a,b}^{-1}$ — время жизни фотона внутри a, b -резонатора. Величина κ_b образуется за счет пропускания входного и выходного зеркал, которые в теории для b -резонатора мы разделяем: $\kappa_b = \kappa'_b + \kappa''_b$.

Более сложная система, которая нас также будет здесь интересовать, состоит из трех резонаторов (рис. 2). Два из них (1 и 2) образуют независимые лазерные источники, а третий (b), как и прежде, пассивный, который возбуждается за счет электромагнитных полей от источников. Теперь здесь отличны от нуля две константы:

$$g_{b1} = T \sqrt{\kappa'_b \kappa_1}, \quad g_{b2} = R \sqrt{\kappa'_b \kappa_2}. \tag{7}$$

Здесь T и R ($T^2 + R^2 = 1$) — коэффициенты пропускания и отражения (по амплитуде) дополнительного зеркала, на котором происходит смешение излучений от обоих лазерных источников, прежде чем они попали в b -резонатор (рис. 2).

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАССИВНОГО РЕЗОНАТОРА СУБПУАССОНОВСКИМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

3.1. Основное кинетическое уравнение

Сначала будем полагать, что физическая система состоит только из двух последовательно стоящих оптических резонаторов (рис. 1). В a -резонаторе осуществляется субпуассоновская лазерная генерация. Излучение субпуассоновского лазера попадает в b -резонатор, накапливается там и, в конечном счете, отражаясь от него или проходя насквозь, попадает на фотодетектор, с помощью которого и анализируется. Нас будет интересовать только та часть света, которая проходит насквозь через резонатор. Для простоты будем полагать, что все актуальные частоты в этой системе совпадают.

Согласно сказанному выше, для двухосцилляторной полевой матрицы плотности ρ , описывающей как внутрирезонаторное поле генерации субпуассоновского лазера, так и поле внутри второго пустого резонатора, может быть записано следующее уравнение:

$$\dot{\rho} = r_a \left(\hat{L}_a - \frac{1}{2} \hat{L}_a^2 \right) \rho - \frac{\kappa_a}{2} \hat{R}_a \rho - \frac{\kappa_b}{2} \hat{R}_b \rho + g_{ba} \hat{L}_{a \rightarrow b} \rho. \quad (8)$$

Оператор \hat{L}_a определяет развитие субпуассоновской генерации внутри a -резонатора за счет активной среды. Он получен в [2] и может быть записан в следующей форме:

$$\hat{L}_a = \left[2 \begin{array}{c} a^+ \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} a \\ \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} a a^+ \\ \rightarrow \end{array} - \begin{array}{c} a a^+ \\ \leftarrow \end{array} - \frac{1}{2} \beta_a \left(\begin{array}{c} a a^+ \\ \rightarrow \end{array} - \begin{array}{c} a a^+ \\ \leftarrow \end{array} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[\begin{array}{c} a a^+ \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} a a^+ \\ \leftarrow \end{array} + \frac{1}{2} \beta_a \left(\begin{array}{c} a a^+ \\ \rightarrow \end{array} - \begin{array}{c} a a^+ \\ \leftarrow \end{array} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (9)$$

Затухание квантового осциллятора описывается хорошо известным оператором вида

$$\hat{R}_a = \begin{array}{c} a^+ a \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} a^+ a \\ \leftarrow \end{array} - 2 \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} a^+ \\ \leftarrow \end{array}. \quad (10)$$

Здесь r_a — средняя скорость возбуждения верхнего лазерного уровня, a, a^+ — фотонные операторы для лазерной моды $[a, a^+] = 1$,

$$\beta_a^{-1} = \frac{\gamma_b \gamma_{ab}}{2g^2}$$

— число фотонов, насыщающее лазерный переход в активной среде субпуассоновского лазера (γ_a, γ_b — продольные константы релаксации, относящиеся к верхнему и нижнему лазерным уровням, $\gamma_a = 0, \gamma_{ab}$ — поперечная константа релаксации). Стрелки под операторами определяют направление действия по отношению к операторным выражениям, включая матрицу плотности, стоящим правее. Оператор затухания поля в b -резонаторе \hat{R}_b получается из оператора \hat{R}_a заменой фотонных операторов a на фотонные операторы b, κ_a^{-1} и κ_b^{-1} — времена жизни фотонов в a - и b -резонаторах из-за их конечных добротностей.

Явное выражение для оператора $\hat{L}_{a \rightarrow b}$, определяющего одностороннее воздействие a -осциллятора на b -осциллятор, записанное в предыдущем разделе, может быть представлено в форме [9]

$$\hat{L}_{a \rightarrow b} = \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} b^+ \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} a^+ \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} b \\ \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} b^+ \\ \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} b \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} a^+ \\ \leftarrow \end{array}. \quad (11)$$

Сила этого воздействия определяется константой g_{ba} (6).

Полная спектральная ширина b -резонатора зависит от пропускания входного и выходного зеркал:

$$\kappa_b = \kappa'_b + \kappa''_b. \quad (12)$$

Перейдем в уравнении (8) к диагональному представлению Глаубера согласно интегральному соотношению

$$\rho(t) = \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, \beta, t) |\alpha\rangle |\beta\rangle \langle \beta | \langle \alpha |, \quad (13)$$

где

$$d^2\alpha = d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha),$$

$$d^2\beta = d(\operatorname{Re} \beta)d(\operatorname{Im} \beta),$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle.$$

Воспользуемся приближением малых фотонных флуктуаций:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{n_a + \varepsilon_a} \exp(i\varphi_a), & \varepsilon_a &\ll n_a, \\ \beta &= \sqrt{n_b + \varepsilon_b} \exp(i\varphi_b), & \varepsilon_b &\ll n_b. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь n_a, n_b — стационарные решения полуклассической лазерной задачи:

$$\frac{d}{dt}n_b = -\kappa_b n_b + 2g_{ab}\sqrt{n_a n_b} \cos(\bar{\varphi}_a - \bar{\varphi}_b) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_b = g_{ba}\sqrt{\frac{n_a}{n_b}} \sin(\bar{\varphi}_a - \bar{\varphi}_b) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}n_a = r_a - \kappa_a n_a = 0, \quad \frac{d}{dt}\varphi_a = 0. \quad (17)$$

Эти уравнения могут быть получены непосредственно из уравнения (8) умножением его на оператор a и взятием шпура, а затем на оператор b и снова взятием шпура. Пренебрегая в полученных таким образом выражениях флуктуациями полевых переменных, получим замкнутую систему уравнений для комплексных амплитуд $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Переходя к амплитудам и фазам, получим требуемое.

Нетрудно увидеть, что имеют место следующие устойчивые стационарные решения:

$$\bar{\varphi}_a = \bar{\varphi}_b, \quad (18)$$

$$n_a = r_a/\kappa_a, \quad (19)$$

$$\frac{n_a}{n_b} = \frac{\kappa_b^2}{4g_{ab}^2} = \frac{\kappa_b^2}{4\kappa_b'\kappa_a}. \quad (20)$$

Для фотонной матрицы плотности

$$R(\varepsilon_a, \varepsilon_b, t) = \int d\varphi_a d\varphi_b P(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varphi_a, \varphi_b, t) \quad (21)$$

в этих приближениях может быть получено следующее уравнение:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\kappa_b}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_b} \left(\varepsilon_b - \frac{n_b}{n_a} \varepsilon_a \right) R + \kappa_a \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} (\varepsilon_a R) - \frac{1}{2} \kappa_a n_a \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon_a^2} + \{ \dots \}. \quad (22)$$

Это и есть то основное кинетическое уравнение, которое позволит в дальнейшем получить всю нужную информацию о поле во втором резонаторе. Через $\{ \dots \}$ обозначена вся совокупность ε -производных третьего и всех более высоких порядков, которая возникает в диагональном представлении Глаубера для квантовых полей. Эти члены не будут давать вклада в те наблюдаемые величины, которые мы будем в дальнейшем здесь рассматривать.

3.2. Параметр Мандела

Из основного кинетического уравнения (22) стандартной процедурой умножения его на соответствующую величину с последующим интегрированием по переменным ε , φ получается система уравнений

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b^2} = -\kappa_b \overline{\varepsilon_b^2} + \kappa_b \frac{n_b}{n_a} \overline{\varepsilon_a \varepsilon_b} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_a \varepsilon_b} = -\left(\kappa_a + \frac{\kappa_b}{2}\right) \overline{\varepsilon_a \varepsilon_b} + \frac{\kappa_b}{2} \frac{n_b}{n_a} \overline{\varepsilon_a^2} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_a^2} = -2\kappa_a \overline{\varepsilon_a^2} - \kappa_a n_a = 0. \quad (25)$$

Стационарные решения имеют форму

$$\overline{\varepsilon_a^2} = -\frac{1}{2} n_a = \xi_a n_a, \quad (26)$$

$$\overline{\varepsilon_a \varepsilon_b} = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_b}{\kappa_b + 2\kappa_a} n_b, \quad (27)$$

$$\overline{\varepsilon_b^2} = -\frac{1}{2} \frac{n_b}{n_a} \frac{\kappa_b}{\kappa_b + 2\kappa_a} n_b = \xi_b n_b. \quad (28)$$

Принимая во внимание (20), получим, что статистический параметр Мандела в b -резонаторе может быть представлен в виде

$$\xi_b = -\frac{2\kappa'_b \kappa_a}{\kappa_b(\kappa_b + 2\kappa_a)}. \quad (29)$$

Варьируя соотношения между резонаторными ширинами κ_a и κ_b , можем получить самые разные (отрицательные) значения параметра Мандела. В частности, в двух предельных случаях, когда $\kappa_a \gg \kappa_b$,

$$\xi_b = -\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (30)$$

(превращается в $-1/2$ в случае симметричного b -резонатора, когда $\kappa'_b = \kappa''_b$) и

$$\xi_b = -\frac{2\kappa'_b \kappa_a}{\kappa_b^2}, \quad |\xi| \ll 1, \quad (31)$$

когда $\kappa_a \ll \kappa_b$.

3.3. Спектр фототока

Для того чтобы понять роль, которую играет стационарное состояние внутрирезонаторного полевого осциллятора в формировании квантовых особенностей в наблюдении, достаточно проанализировать какую-нибудь одну реально наблюдаемую. Например, это может быть спектр шумов фототока, который при наблюдении излучения из b -резонатора при идеальном фотодетектировании может быть представлен следующей формулой [2]:

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 + \frac{2\kappa_b''}{n_b} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} \right]. \quad (32)$$

Из основного кинетического уравнения (22) стандартной процедурой получается система уравнений:

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} = -\frac{\kappa_b}{2} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} + \frac{\kappa_b}{2} \frac{n_b}{n_a} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_a(t)}, \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_a(t)} = -\kappa_a \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_a(t)}. \quad (34)$$

Отсюда можно получить

$$\overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} = \overline{\varepsilon_b^2} \exp\left(-\frac{\kappa_b}{2}t\right) + \overline{\varepsilon_a\varepsilon_b} \frac{\kappa_b}{\kappa_b - 2\kappa_a} \frac{n_b}{n_a} \left[\exp(-\kappa_a t) - \exp\left(-\frac{\kappa_b}{2}t\right) \right]. \quad (35)$$

После подстановки этого выражения в (32) с учетом (27), (28) найдем

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 - k^2 \frac{\kappa_a^2}{\omega^2 + \kappa_a^2} \frac{\kappa_b^2}{4\omega^2 + \kappa_b^2} \right], \quad k^2 = \frac{4\kappa_b'\kappa_b''}{\kappa_b^2}. \quad (36)$$

В случае симметричного b -резонатора ($k^2 = 1$), как видно, относительная глубина квантового провала на нулевой частоте есть $\delta = 1$, независимо от каких-либо других физических условий, включая и соотношения резонаторных ширин κ_a и κ_b , что является важным фактом для наших дальнейших выводов.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАСИВНОГО РЕЗОНАТОРА СВЕТОМ ОТ ДВУХ ЛАЗЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

4.1. Кинетическое уравнение

Теперь будем иметь в виду физическую схему, условно представленную на рис. 2. Будем обсуждать случай, когда пустой резонатор b возбуждается светом двух лазерных источников. Будем полагать, что в активной среде лазера 1 осуществляется регулярная (без шумов) накачка верхнего лазерного уровня, что обеспечивает некий параметр Мандела ξ_1 , который в оптимальных условиях может стать равным $-1/2$. В активной среде лазера 2 осуществляется обычная совершенно случайная накачка активных атомов на верхний же лазерный уровень. В этом случае параметр Мандела ξ_2 достаточно велик в

слабых полях генерации и стремится к нулю при насыщении. В конечных формулах нас будет интересовать случай, когда $\xi_1 = -1/2$ и $\xi_2 \sim 1$.

Уравнение для трехосцилляторной матрицы плотности ρ , описывающей внутрирезонаторные поля двух лазерных источников и в пассивном резонаторе, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & r_1 \left(\hat{L}_1 - \frac{1}{2} L_1^2 \right) \rho - \frac{\kappa_1}{2} \hat{R}_1 \rho + g_{b1} \hat{L}_{1 \rightarrow b} \rho + \\ & + r_2 \hat{L}_2 \rho - \frac{\kappa_2}{2} \hat{R}_2 \rho - g_{b2} \hat{L}_{2 \rightarrow b} \rho - \frac{\kappa_b}{2} \hat{R}_b \rho. \end{aligned} \quad (37)$$

Операторы $\hat{L}_{1,2}$ и $\hat{R}_{1,2}$ определяют развитие электромагнитного поля внутри лазерных резонаторов:

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{2} \beta_{1a} \left[2 a_{\rightarrow 1}^+ a_1 - a_{\rightarrow 1} a_1^+ - a_{\leftarrow 1} a_1^+ - \frac{1}{2} \beta_{1b} \left(a_{\rightarrow 1} a_1^+ - a_{\leftarrow 1} a_1^+ \right)^2 \right] \frac{1}{\hat{Q}_1}, \quad (38)$$

$$\hat{Q}_1 = 1 + \frac{1}{2} \beta_{1+} \left(a_{\rightarrow 1} a_1^+ + a_{\leftarrow 1} a_1^+ \right) + \frac{1}{4} \beta_{1a} \beta_{1b} \left(a_{\rightarrow 1} a_1^+ - a_{\leftarrow 1} a_1^+ \right)^2,$$

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{2} \beta_{2a} \left[2 a_{\rightarrow 2}^+ a_2 - a_{\rightarrow 2} a_2^+ - a_{\leftarrow 2} a_2^+ - \frac{1}{2} \beta_{2b} \left(a_{\rightarrow 2} a_2^+ - a_{\leftarrow 2} a_2^+ \right)^2 \right] \frac{1}{\hat{Q}_2}, \quad (39)$$

$$\hat{Q}_2 = 1 + \frac{1}{2} \beta_{2+} \left(a_{\rightarrow 2} a_2^+ + a_{\leftarrow 2} a_2^+ \right) + \frac{1}{4} \beta_{2a} \beta_{2b} \left(a_{\rightarrow 2} a_2^+ - a_{\leftarrow 2} a_2^+ \right)^2,$$

$$\hat{R}_1 = a_{\rightarrow 1}^+ a_1 + a_{\leftarrow 1}^+ a_1 - 2 a_{\rightarrow 1} a_{\leftarrow 1}^+, \quad (40)$$

$$\hat{R}_2 = a_{\rightarrow 2}^+ a_2 + a_{\leftarrow 2}^+ a_2 - 2 a_{\rightarrow 2} a_{\leftarrow 2}^+. \quad (41)$$

Нелинейные параметры для лазерных источников имеют вид

$$\beta_{ia} = \frac{2|g_{iab}|^2}{\gamma_{ia}\gamma_{iab}}, \quad \beta_{ib} = \frac{2|g_{iab}|^2}{\gamma_{ib}\gamma_{iab}}, \quad \beta_{i\pm} = \beta_{ia} \pm \beta_{ib}, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

где γ_{ia}, γ_{ib} — ширины верхнего и нижнего лазерных уровней, γ_{iab} — однородная ширина контура усиления рабочего перехода, g_{iab} — константа взаимодействия атома с плоской лазерной волной в дипольном приближении.

Здесь r_i — средняя скорость возбуждения верхнего лазерного уровня, a_i, a_i^+ — фотонные операторы для лазерной моды, κ_i^{-1} — времена жизни фотонов в резонаторах из-за их конечных добротностей.

Напомним, что наличие в основном кинетическом уравнении члена с оператором \hat{L}_1^2 говорит о том, что в первом лазерном источнике осуществляется регулярная (без флуктуаций) накачка активных атомов. При $\gamma_{1a} = 0$ будем иметь идеальный субпуассоновский лазер и оператор \hat{L}_1 будет по форме совпадать с оператором \hat{L}_a из первого случая, когда возбуждение пассивного резонатора осуществлялось излучением именно идеального субпуассоновского лазера.

Явное выражение для оператора $\hat{L}_{1 \rightarrow b}$, определяющего одностороннее воздействие излучения из 1-резонатора на b -резонатор, записанное в предыдущем разделе, может быть представлено в форме

$$\hat{L}_{1 \rightarrow b} = \underset{\rightarrow}{a_1} \underset{\rightarrow}{b}^+ + \underset{\leftarrow}{a_1}^+ \underset{\leftarrow}{b} - \underset{\rightarrow}{a_1} \underset{\leftarrow}{b}^+ - \underset{\rightarrow}{b} \underset{\leftarrow}{a_1}^+. \quad (43)$$

Аналогично,

$$\hat{L}_{2 \rightarrow b} = \underset{\rightarrow}{a_2} \underset{\rightarrow}{b}^+ + \underset{\leftarrow}{a_2}^+ \underset{\leftarrow}{b} - \underset{\rightarrow}{a_2} \underset{\leftarrow}{b}^+ - \underset{\rightarrow}{b} \underset{\leftarrow}{a_2}^+. \quad (44)$$

Сила этих воздействий определяется константами g_{bi} (7).

Полуклассические уравнения могут быть получены таким же образом, как и ранее из основного кинетического уравнения (37) в пренебрежении всеми полевыми флуктуациями:

$$\frac{d}{dt} n_b = -\kappa_b n_b + 2g_{1b} \sqrt{n_1 n_b} \cos(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_b) + 2g_{2b} \sqrt{n_2 n_b} \cos(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_b) = 0, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\varphi}_b = g_{1b} \sqrt{\frac{n_1}{n_b}} \sin(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_b) + g_{2b} \sqrt{\frac{n_2}{n_b}} \sin(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_b) = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt} n_1 = \left(-\kappa_1 + \frac{r_1 \beta_{1a}}{1 + \beta_{1a} + n_1} \right) n_1 = 0, \quad \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_1 = 0, \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} n_2 = \left(-\kappa_2 + \frac{r_2 \beta_{2a}}{1 + \beta_{2a} + n_2} \right) n_2 = 0, \quad \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_2 = 0, \quad (48)$$

$$\alpha_1 = |\alpha_1| \exp(i\varphi_1), \quad \alpha_2 = |\alpha_2| \exp(i\varphi_2). \quad (49)$$

4.2. Параметр Мандела и спектр фототока

Теперь так же, как и прежде, будем переходить к диагональному представлению Глаубера, вводя в формальную схему вместо фотонных операторов a_i , a_i^+ соответствующие c -числовые амплитуды поля α_i , α_i^* и производные по ним. В приближении малых фотонных флуктуаций

$$|\alpha_i|^2 = n_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \ll n_i \quad (50)$$

с учетом полуклассических уравнений для фотонной матрицы плотности

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_b, t) = \int d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_b P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_b, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_b, t) \quad (51)$$

получим следующее основное кинетическое уравнение при условии, что между фазами лазерных волн имеется сдвиг кратный π (в других случаях мы должны были бы записывать уравнение, определяющее одновременно и амплитудные, и фазовые флуктуации):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} = & \frac{\kappa_b}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_b} (\varepsilon_b - \delta_1 \varepsilon_1 - \delta_2 \varepsilon_2) R + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} (\varepsilon_1 R) + \Gamma_1 \xi_1 n_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon_1^2} + \\ & + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} (\varepsilon_2 R) + \Gamma_2 \xi_2 n_2 \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon_2^2} + \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь введены обозначения

$$\delta_1 = \frac{2g_{1b}}{\kappa_b} \sqrt{\frac{n_b}{n_1}}, \quad (53)$$

$$\delta_2 = \frac{2g_{2b}}{\kappa_b} \sqrt{\frac{n_b}{n_2}}, \quad (54)$$

$$\Gamma_1 = \kappa_1 \frac{I_1}{1+I_1}, \quad \xi_1 = \frac{1}{I_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{1b}}{\gamma_{1a} + \gamma_{1b}}, \quad (55)$$

$$\Gamma_2 = \kappa_2 \frac{I_2}{1+I_2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{I_2}, \quad (56)$$

$$I_i = \beta_{i+} n_i. \quad (57)$$

Из основного кинетического уравнения получается

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b^2} = -\kappa_b \overline{\varepsilon_b^2} + \delta_1 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_b} + \delta_2 \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_b} = 0, \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_b} = -\left(\Gamma_1 + \frac{\kappa_b}{2}\right) \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_b} + \frac{\kappa_b}{2} \delta_1 \overline{\varepsilon_1^2} = 0, \quad (59)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_b} = -\left(\Gamma_2 + \frac{\kappa_b}{2}\right) \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_b} + \frac{\kappa_b}{2} \delta_2 \overline{\varepsilon_2^2} = 0, \quad (60)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_1^2} = -2\Gamma_1 \overline{\varepsilon_1^2} + 2\Gamma_1 \xi_1 n_1 = 0, \quad (61)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_2^2} = -2\Gamma_2 \overline{\varepsilon_2^2} + 2\Gamma_2 \xi_2 n_2 = 0, \quad (62)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} = -\frac{\kappa_b}{2} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} + \frac{\kappa_b}{2} \delta_1 \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_1(t)} + \frac{\kappa_b}{2} \delta_2 \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_2(t)}, \quad (63)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_1(t)} = -\Gamma_1 \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_1(t)}, \quad (64)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_2(t)} = -\Gamma_2 \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_2(t)}. \quad (65)$$

Разрешая эту систему, найдем

$$\xi_b = \delta_1^2 \frac{\kappa_b}{\kappa_b + 2\Gamma_1} \frac{n_1}{n_b} \xi_1 + \delta_2^2 \frac{\kappa_b}{\kappa_b + 2\Gamma_2} \frac{n_2}{n_b} \xi_2, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_b(0)\varepsilon_b(t)} &= \delta_1^2 \frac{\kappa_b^2}{\kappa_b^2 - 2\Gamma_1^2} \left[\exp(-\Gamma_1 t) - \frac{2\Gamma_1}{\kappa_b} \exp\left(-\frac{\kappa_b}{2} t\right) \right] \overline{\varepsilon_1^2} + \\ &+ \delta_2^2 \frac{\kappa_b^2}{\kappa_b^2 - 2\Gamma_2^2} \left[\exp(-\Gamma_2 t) - \frac{2\Gamma_2}{\kappa_b} \exp\left(-\frac{\kappa_b}{2} t\right) \right] \overline{\varepsilon_2^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Проделив все необходимые действия, получим следующие выражения для спектра фототока и для параметра Мандела:

$$i_\omega^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 - k^2 T^2 \frac{\kappa_1^2}{\omega^2 + \kappa_1^2} \frac{\kappa_b^2}{4\omega^2 + \kappa_b^2} + 2k^2 \frac{1+I_2}{I_2^2} R^2 \frac{\Gamma_2^2}{\omega^2 + \Gamma_2^2} \frac{\kappa_b^2}{4\omega^2 + \kappa_b^2} \right], \quad (68)$$

$$\xi_b = -\frac{2\kappa_b'}{\kappa_b} \frac{\kappa_1 T^2}{\kappa_b + 2\kappa_1} + \frac{4\kappa_b'}{\kappa_b} \frac{\kappa_2 R^2}{\kappa_b(1+I_2) + 2\kappa_2 I_2} \frac{1+I_2}{I_2}. \quad (69)$$

В последних двух формулах мы положили $\gamma_{1a} \ll \gamma_{1b}$, вследствие чего первый источник превращается в идеальный субпуассоновский лазер: $I_1 \rightarrow \infty$ и $\xi_1 \rightarrow -1/2$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим сначала физическую ситуацию с двумя резонаторами: с лазерным источником и пустым резонатором (рис. 1). Как известно, если частота внешнего (в данном случае лазерного) поля совпадает с собственной частотой резонатора и резонатор симметричен ($\kappa_b' = \kappa_b''$ и $k^2 = 1$), то излучение, падающее на входное зеркало извне вследствие интерференционных явлений, не отражается от этого зеркала, а проходит полностью сквозь резонатор через выходное зеркало. Поскольку при этом не возникает никаких неконтролируемых потерь и пустой резонатор как бы «ничего не делает», то можно предполагать, что излучение от субпуассоновского лазера не будет искажаться. Мы должны видеть полностью подавленный на низких частотах дробовой шум фототока как при наблюдении излучения непосредственно после лазерного резонатора, так и при наблюдении после дополнительного пустого резонатора. Этот факт, по-видимому, не должен зависеть ни от каких других обстоятельств и, в частности, от соотношения между κ_a и κ_b . И в этом нетрудно убедиться, если в формуле для спектра фототока (36) положить $k^2 = 1$. Тогда глубина провала в дробовом шуме на нулевой частоте оказывается максимальной, достигая нулевой отметки, и не зависящей от κ_a и κ_b .

В то же самое время даже из качественных соображений ясно, что стационарное состояние полевого осциллятора (и, в частности, параметр Мандела) должно зависеть от того, какие реально выбраны кинематические константы. Действительно, пусть, например, $\kappa_a \gg \kappa_b$. Тогда спектральный контур пустого резонатора окажется заполненным фурье-компонентами, скоррелированными так же, как они скоррелированы в резонаторе субпуассоновского лазера. Поэтому внутрирезонаторная полевая ситуация окажется такой же, как и внутри субпуассоновского лазера, и мы можем ожидать, что в этом предельном случае $\xi_b = -1/2$. В другом же предельном случае $\kappa_a \ll \kappa_b$ «правильно организованные» фурье-компоненты заполняют только очень узкую центральную часть спектрального контура пустого резонатора, а все остальные компоненты (которых несравненно больше) заполняются вакуумными флуктуациями. Таким образом, можно

ожидать, что параметр Манделя окажется близким к нулю. Теперь мы видим, что для симметричного пассивного резонатора дробовой шум оказывается полностью подавленным на низких частотах при любых соотношениях между резонаторными ширинами. В то же время параметр Манделя может меняться в пределах от $-1/2$ до нуля. Нетрудно получить, что формулы (29), (36) подтверждают эти качественные выводы:

$$\xi_b = -\frac{2\kappa'_b}{\kappa_b} \frac{\kappa_a}{\kappa_b}, \quad (70)$$

т. е. $|\xi_b| \ll 1$.

Теперь мы можем пойти и дальше, предположив, например, что в предельном случае $\kappa_a \ll \kappa_b$ «свободные» фурье-компоненты возбуждаются не вакуумными флуктуациями, а флуктуациями от дополнительного лазерного источника. Это можно осуществить в схеме, представленной на рис. 2, смешиванием на промежуточном зеркале света от субпуассоновского лазера и от лазера с избыточными шумами. Понятно, что если добавка от суперпуассоновского лазера будет незначительна (что может иметь место при $T \sim 1$ и $R \ll 1$), то она не должна заметно испортить наблюдаемый квантовый эффект. В то же самое время можно ожидать, что величина ξ_b вполне может стать положительной, поскольку основная часть спектрального контура пустого резонатора формируется именно излучением суперпуассоновского лазера. Обратимся теперь к конкретным формулам и запишем их для симметричного пустого резонатора в предельном случае $\kappa_1 \ll \kappa_b \ll \kappa_2$ в предположении, что безразмерная мощность генерации суперпуассоновского лазера I_2 — промежуточная и имеет порядок единицы:

$$\xi_b = -\frac{\kappa_1}{\kappa_b} T^2 + \frac{1+I_2}{I_2^2} R^2, \quad (71)$$

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 - T^2 \frac{\kappa_1^2}{\omega^2 + \kappa_1^2} + 2 \frac{1+I_2}{I_2^2} R^2 \frac{\kappa_b^2}{4\omega^2 + \kappa_b^2} \right]. \quad (72)$$

Записывая последнее соотношение для нулевой частоты, получим выражение для глубины квантового провала в форме

$$\delta = 1 - R^2 \left(1 + 2 \frac{1+I_2}{I_2^2} \right). \quad (73)$$

Если $R^2 \ll 1$, то $\delta \approx 1$. В то же самое время, если эта величина все-таки не слишком маленькая и

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_b} \ll R^2 \ll 1, \quad (74)$$

то параметр Манделя ξ_b , как мы и предполагали, становится положительным:

$$\xi_b = \frac{1+I_2}{I_2^2} R^2. \quad (75)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Построение совместного кинетического уравнения для матрицы плотности
электромагнитного поля в случае оптически связанных резонаторов**

Пусть имеются локальные осцилляторы полей в резонаторах, операторы уничтожения (положительно-частотные медленные операторные амплитуды) которых есть $a_m(t)$, $m = 1, \dots, M$. Так как зеркала связи резонаторов обладают конечным пропусканием, в методе уравнений Гейзенберга–Ланжевена возникает затухание модовых осцилляторов и одновременно появляются квантовые случайные силы, отвечающие за связь с термостатом квантованных световых мод внешнего пространства.

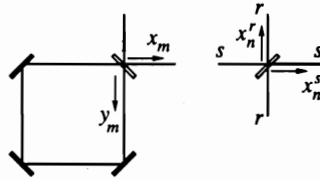


Рис. 3

Для описания светового поля внутри резонатора m и снаружи в окрестности его зеркала связи удобно ввести продольные координаты y_m , x_m , как показано на рис. 3. Здесь $0 < y_m < l_m$, $-\infty < x_m < \infty$, где l_m — длина обхода резонатора. Собственные частоты резонаторов ω_m считаем близкими друг к другу. Их разность должна быть много меньше межмодового расщепления в каждом из резонаторов. Выберем некоторую несущую частоту ω_0 , равную (или близкую в невырожденном случае) ω_m . Поле световой волны при $x_m < 0$, т.е. падающей на зеркало связи, связано с медленной амплитудой $e_m^{(in)}(x_m, t)$ соотношением

$$E(x_m, t) = -i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{S}} \exp\{i(k_0x_m - \omega_0t)\} e_m^{(in)}(x_m, t). \quad (\text{A.1})$$

Аналогичное определение задает при $x_m > 0$ медленную амплитуду $e_m^{(out)}(x_m, t)$ поля, уходящего от резонатора. Здесь S — сечение светового потока. В этой нормировке среднее значение $\langle e^+ e \rangle$ отвечает числу фотонов на единицу длины луча. Для поля внутри резонатора примем

$$E(y_m, t) = -i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{S}} \exp\{i(k_my_m - \omega_0t)\} \frac{1}{\sqrt{l_m}} a_m(t). \quad (\text{A.2})$$

Выполняется условие $E(y_m = l_m, t) = -E(y_m = 0, t)$, т.е. с учетом сдвига фазы на π при отражении от слабопропускающего зеркала связи имеет место периодичность поля на обход резонатора. Коэффициенты отражения и пропускания зеркала связи резонатора m взяты для определенности в виде $\rho_m = -|\rho_m|$, $\tau_m = i|\tau_m|$.

Связь между полями a_m , $e_m^{(in)}$ и $e_m^{(out)}$ дается [8, 9] соотношениями

$$\dot{a}_m = -\left(i\Delta_m + \frac{\kappa_m}{2}\right) a_m + \frac{c\tau_m}{\sqrt{l_m}} e_m^{(in)}(0, t), \quad (\text{A.3})$$

$$e_m^{(out)}(0, t) = -e_m^{(in)}(0, t) - \frac{\tau_m}{\sqrt{l_m}} a_m(t). \quad (\text{A.4})$$

Здесь $\Delta_m = \omega_m - \omega_0$ — расстройка частоты, $\kappa_m = c|\tau_m|^2/l_m$ — скорость затухания энергии поля. Предполагается, что выполнено условие $1 - |\rho_m| \ll 1$, которое необходимо для последовательного выделения модовых осцилляторов. Эти соотношения отражают правила сложения полей на зеркале связи. С другой стороны, равенства (A.3), (A.4) могут пониматься как уравнения Гейзенберга–Ланжевена в отсутствие активного вещества в резонаторах.

Пусть оптическая схема содержит $n = 1, \dots, N$, где $N \geq M$, узлов. Ими являются линейные элементы, т. е. резонаторы описанного выше вида, а также интерференционные смесители без потерь. Частично поглощающие линейные фильтры, если они есть, будем представлять смесителями, которые выводят часть светового потока из схемы. Не будем рассматривать оптические конфигурации, в которых световые сигналы, связывающие элементы схемы, образуют замкнутые пути. Тем самым мы исключаем явно или неявно возникающие сложные резонаторы.

Входы оптической схемы, на которые падают независимые световые потоки в вакуумном состоянии, будем нумеровать индексом $r = 1, \dots, R$. Начиная от каждого входа схемы, проследим до ее выхода световые лучи с теми же номерами. Это можно сделать, причем различными способами, поскольку каждый из n элементов схемы имеет равное число входов и выходов: по одному для резонаторов и по два для смесителей.

Для смесителя n введем связанные с ним продольные координаты x_n^r, x_n^s вдоль лучей r, s , которые в нем пересекаются (см. рис. 3). Определим аналогично выражению (A.1) входное и выходное поля смесителя в его собственных координатах. Они связаны преобразованием

$$e_n^{r(out)}(0, t) = \sum_s R_n^{rs} e_n^{s(in)}(0, t), \quad (\text{A.5})$$

где $\{R_n\}$ — унитарная матрица смесителя. На пути от элемента n до соседнего элемента m по лучу r имеет место лишь запаздывание светового сигнала на расстоянии d_{nm}^r , что выражается соотношением

$$e_m^{r(in)}(0, t) = \exp(ik_0 d_{nm}^r) e_n^{r(out)}(0, t - d_{nm}^r/c). \quad (\text{A.6})$$

Ниже мы считаем время запаздывания малым по сравнению с другими временами задачи и пренебрегаем им.

Соотношения (A.3)–(A.6) должны рассматриваться вместе с коммутационными соотношениями для независимых световых полей, которые приходят из свободного пространства на входы оптической схемы:

$$\left[\bar{e}^{r(in)}(x, t), \bar{e}^{r'(in)+}(x', t') \right] = \delta_{r,r'} \delta((x - x') - c(t - t')). \quad (\text{A.7})$$

Здесь $\bar{e}^{r(in)}(x, t) = e_n^{r(in)}(x, t)$ — входные поля элементов, расположенных первыми по ходу лучей.

Вопрос о том, насколько непротиворечиво с точки зрения квантовой теории введенное выше описание, мы обсудим ниже.

Преобразуем уравнения (А.3), учитывая связи (А.4)–(А.6). Представим входное поле каждого резонатора через сумму полей резонаторов, являющихся для него источниками сигнала, и полей на входах оптической схемы:

$$\dot{a}_m = -\left(i\Delta_m + \frac{\kappa_m}{2}\right) a_m + \sum_{m_0 \neq m} g_{mm_0} a_{m_0} + \sum_r f_m^r \bar{e}^{r(in)}(0, t). \quad (\text{A.8})$$

Здесь g_{mm_0} — пропагатор, описывающий проникновение сигнала из резонатора m_0 в резонатор m :

$$g_{mm_0} = c \frac{|r_m \tau_{m_0}|}{\sqrt{l_m l_{m_0}}} \sum_{path} \left\{ \exp(ik_0 d_{path}) S_{n_p}^{r_p r_{p-1}} \dots S_{n_1}^{r_1 r_0} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Выше проводится суммирование по всем путям сигнала от m_0 до m . Если путь проходит через промежуточные элементы n_1, \dots, n_p , то в суммирование входит произведение коэффициентов пропускания этих элементов. Для отражения от резонатора, согласно (А.4), имеем $S_{n_i}^{r_i r_{i-1}} = -1$. Длина пути есть

$$d_{path} = d_{m_0 n_1}^{r_0} + \dots + d_{n_p m}^{r_p}. \quad (\text{A.10})$$

Пропагатор, описывающий проникновение вакуумного поля со входа r оптической схемы в резонатор m , имеет похожий вид:

$$f_m^r = c \frac{|r_m|}{\sqrt{l_m}} \sum_{path} \left\{ \exp(ik_0 d_{path}) S_{n_p}^{r_p r_{p-1}} \dots S_{n_1}^{r_1 r} \right\}, \quad (\text{A.11})$$

где

$$d_{path} = d_{n_1 n_2}^{r_1} + \dots + d_{n_p m}^{r_p}. \quad (\text{A.12})$$

Перейдем от этих построений к кинетическому уравнению. Будем считать, что пока в резонаторах нет активного вещества, развитие полей $a_m(t)$ согласно уравнениям Гейзенберга–Ланжевена эквивалентно их развитию вида

$$a_m(t) \sim \exp(iH_0 t/\hbar) a_m \exp(-iH_0 t/\hbar). \quad (\text{A.13})$$

В невозмущенный оператор энергии поля H_0 включена энергия незатухающих осцилляторов a_m в резонаторах с идеальными зеркалами, энергия поля термостата, а также энергия эффективного взаимодействия, которое связывает внутренние и внешние поля при конечном попускании зеркал. Предполагаем, что до включения взаимодействия ($t = 0$) полное световое поле выделенных осцилляторов и термостата было в основном состоянии $|\{0\}\rangle$.

Введем возмущение V , которое связывает поле в резонаторах с помещенным в резонаторы веществом. Матрица плотности системы есть

$$M(t) = v(t)|\{0\}\rangle\langle\{0\}| \otimes |\mu\rangle\langle\mu|v^+(t), \quad (\text{A.14})$$

где $|\mu\rangle\langle\mu|$ — начальная матрица плотности вещества, $v(t)$ — оператор эволюции,

$$v(t) = \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) v^{(i)}(t) = \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) T \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V^{(i)}(t')\right\}. \quad (\text{A.15})$$

Верхний индекс (i) указывает на представление взаимодействия, в котором возмущением служит V . Исключим осцилляторы поля термостата, перейдя к матрице плотности ρ ,

$$\rho = \text{Tr}_{\{term\}} M. \quad (\text{A.16})$$

Матрицу плотности явно выделенных мод переведем в антинормальное представление по когерентным состояниям. Когерентное состояние $|\{z_m\}\rangle$ введем обычным образом с помощью операторов сдвига $D_m(z_m)$, $D(\{z_m\}) = \prod D_m(z_m)$. Вместо матрицы плотности удобно рассматривать несколько более общую величину

$$\langle\{z_m\}|A\rho B|\{z_m\}\rangle = \langle\{0\}|D^+(\{z_m\})A\rho B D(\{z_m\})|\{0\}\rangle, \quad (\text{A.17})$$

где A, B — операторы, относящиеся к выделенным модам. Чтобы рассматривать среднее (A.17) как след по всем степеням свободы поля, используем равенство

$$\langle\{0\}|\dots|\{0\}\rangle = \text{Tr}_{\{a_m\}} \left\{ \exp\left(-\sum_m a_m a_m^+\right) \dots \right\}. \quad (\text{A.18})$$

Здесь операторы a_m и a_m^+ ставятся левее и правее усредняемой величины. Несложными преобразованиями величина (A.17) приводится к виду

$$\langle\{z_m\}|A\rho B|\{z_m\}\rangle = \langle\{0\}|v^{(i)+}(t) \exp\left(\frac{iH_0t}{\hbar}\right) \times \\ \times B : \exp\left\{-\sum_m (a_m^+ - z_m^*)(a_m - z_m)\right\} : A \exp\left(-\frac{iH_0t}{\hbar}\right) v^{(i)}(t)|\{0\}\rangle, \quad (\text{A.19})$$

где символ $: \dots :$ означает нормальное упорядочение. Рассмотрим антинормальное представление матрицы плотности, т.е. $A = B = 1$. Как следует из (A.13), в обкладках $\exp(iH_0t/\hbar)$ и $\exp(-iH_0t/\hbar)$ в равенстве (A.19) возникают зависящие от времени операторы полей $a_m(t)$, $a_m^+(t)$. Они удовлетворяют уравнениям Гейзенберга–Ланжевена для резонаторов, связанных оптическими сигналами в отсутствие активного вещества.

Чтобы получить кинетическое уравнение, возьмем в равенстве (A.19) производную по времени t , причем возникающие производные от амплитуд полей раскроем с помощью уравнений Гейзенберга–Ланжевена (A.8). В правой стороне, в частности, получим

$$\frac{d}{dt} : \exp\{\dots\} := \\ = -\sum_m (\dot{a}_m^+(t) : \exp\{\dots\} : (a_m(t) - z_m) + (a_m^+(t) - z_m^*) : \exp\{\dots\} : \dot{a}_m(t)). \quad (\text{A.20})$$

Здесь учтено, что величины $\dot{a}_m(t)$ содержат только положительно-частотные вклады и могут переставляться с амплитудами $a_n(t)$, и аналогично переставляются отрицательно-частотные величины.

С учетом (A.8) в соотношениях (A.20) возникают множители, равные амплитудам полей в резонаторах, а также множители z_m, z_m^* , которые легко превращаются в операторы. Из (A.17) следует, что умножение на z_m равносильно замене B на Ba_m , на

z_m^* — замене A на $a_m^+ A$. Кроме этого, в части вкладов возникают множители, пропорциональные падающим полям (случайным силам) $\bar{e}^{r(in)}(t)$ и $\bar{e}^{r(in)+}(t)$. Все вклады с данными множителями равны нулю. Действительно, из уравнений (А.8) следует, что решения для амплитуд $a_m(t')$ для $t' < t$ должны иметь вид свертки по времени от случайных сил, причем взятых в моменты времени $t'' < t' < t$. Отсюда вытекает, что для $t' < t$

$$[a_m(t'), \bar{e}^{r(in)+}(0, t)] = 0. \quad (\text{A.21})$$

Поэтому положительно-частотные случайные силы можно пронести направо через амплитуды выделенных мод, входящие при временах $t' < t$ в оператор эволюции $v^{(i)}(t)$, см. (А.15). Отрицательно-частотные случайные силы аналогично проносятся налево. При действии на вакуумное начальное состояние данные множители уничтожают вклады, в которых они содержатся.

Таким образом, в результате дифференцирования по времени выделяются амплитуды выделенных мод, которые присоединяются к операторам A и B в (А.17). Легко проследить, что из описанного построения и явного вида уравнений Гейзенберга–Ланжевена (А.8) следует кинетическое уравнение в форме (4) (см. разд. 2). Оператор Лиувилля развития выделенной моды m имеет обычный вид;

$$\hat{L}_m \rho = \left\{ - \left(i\Delta_m + \frac{\kappa_m}{2} \right) a_m^+ a_m \rho + \frac{\kappa_m}{2} a_m \rho a_m^+ + \text{H.c.} \right\} - \frac{i}{\hbar} [V_m, \rho]. \quad (\text{A.22})$$

Здесь V_m — оператор энергии взаимодействия моды m с активным веществом в резонаторе. Входящий в оператор $\hat{L}_{m_0 m}$ (5) множитель $g_{m m_0}$ отличен от нуля только при условии, что в оптической схеме имеются пути от резонатора m_0 к резонатору m (см. (А.9)).

В частном случае двух резонаторов (источник и приемник сигнала) кинетическое уравнение (А.22) переходит в полученное ранее [6–8].

В основу использованного нами выше подхода положены уравнения Гейзенберга–Ланжевена (А.3), связи (А.4)–(А.6) и коммутационные соотношения входных свободных полей (А.7). Покажем, что данная постановка задачи непротиворечива в случае оптических схем, в которых световой сигнал не замыкается на себя. Выяснение этого вопроса представляет интерес не только для обоснования кинетического уравнения (см. выше), но и для понимания пределов применимости метода уравнений Гейзенберга–Ланжевена.

Образум из набора входных амплитуд $\bar{e}^{r(in)}(0, t)$, где $r = 1, \dots, R$, вектор. Преобразование полей на элементах оптической схемы, начиная с ее входов, можно понимать как линейное преобразование этого вектора. Линейные ослабляющие элементы мы заменяем частично пропускающими смесительными устройствами, которые выводят из оптической схемы часть светового потока и одновременно вводят в световой поток вакуумное поле. Это обстоятельство надо учитывать при подсчете числа входов, внутренних лучей и выходов схемы. Для элементов, воздействующих на независимые наборы лучей, порядок, в котором применяются соответствующие преобразования, не определен. Он может быть выбран произвольным образом, так как такие преобразования, очевидно, коммутируют между собой.

Преобразование полей в смесителе (А.5) унитарно. Преобразование полей на зеркале связи резонатора, заданное формулами (А.3), (А.4), удобно рассмотреть в частотном представлении. Для фурье-образов амплитуд, $t \rightarrow \Omega$, нетрудно получить

$$e_m^{(out)}(0, \Omega) = e_m^{(in)}(0, \Omega) \frac{\kappa_m/2 - i(\Delta_m - \Omega)}{\kappa_m/2 + i(\Delta_m - \Omega)}, \quad (\text{A.23})$$

что также является унитарным преобразованием. Таким образом, вектор начальных амплитуд преобразуется по мере прохождения полей произвольного числа элементов унитарным образом. Нетрудно отсюда получить, что коммутационные соотношения для компонент преобразованного вектора входных амплитуд имеют вид соотношений (А.7) для полей свободного пространства.

Это обстоятельство, в свою очередь, обеспечивает нужные коммутационные соотношения для амплитуд выделенных мод. Амплитуду a_m нетрудно выразить с помощью (А.3) через свертку по времени от входного поля $e_m^{(in)}(0, t)$. Как мы только что выяснили, входные поля любых элементов схемы (а не только начальных по ходу лучей) подчиняются коммутационным соотношениям для полей свободного пространства. Отсюда нетрудно найти

$$[a_m(t), a_m^+(t')] = \exp \{-i\Delta_m(t-t') - (\kappa_m/2)|t-t'|\}. \quad (\text{А.24})$$

При $t = t'$ возникает обычное коммутационное соотношение для осциллятора.

Заметим, что для этих рассуждений важно, что в оптической схеме нет замкнутых на себя световых лучей. Можно предположить, что в случае полностью или частично замкнутой схемы описание на основе связанных уравнений Гейзенберга-Ланжевена и свободных коммутационных соотношений для промежуточных световых полей не будет справедливым.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Возбуждение активной среды лазера излучением вспомогательного субпуассоновского лазера

В работе [5] обсуждена следующая физическая модель. Внутри высокодобротного резонатора с резонансной средой помещен другой высокодобротный резонатор с другой резонансной средой. Во внутреннем резонаторе обеспечивается идеальная субпуассоновская генерация, которая возбуждает в надпороговое состояние резонансную среду большого резонатора, вследствие чего возникает вторичная лазерная генерация. В работе детально обсуждены условия, при которых вторичная генерация становится идеально субпуассоновской с параметром Манделя $\xi = -1/2$, т. е. становится подобной по своим статистическим свойствам первичной, какой она была до возникновения вторичной. Используя формулы, полученные в [5], мы сможем найти явное выражение для спектра фототока при регистрации излучения вторичной лазерной генерации в форме

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 - \frac{\kappa}{\kappa + \kappa_1} \frac{(\kappa_1 + \kappa)^2}{\omega^2 + (\kappa_1 + \kappa)^2} \frac{\kappa_2^2}{\omega^2 + \kappa_2^2} \right]. \quad (\text{Б.1})$$

Здесь κ_1 , κ_2 — спектральные ширины первичного (внутреннего) и вторичного (внешнего) лазерного резонатора, κ — линейный коэффициент поглощения первичной лазерной генерации средой вторичного лазера (он определяет скорость заселения верхнего активного уровня среды вторичного лазера).

Воспользуемся для нашего анализа формулой, которая была получена в работе [5] для параметра Манделя вторичной лазерной генерации:

$$\xi_2 = -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa}. \quad (\text{Б.2})$$

Для нас наиболее интересен случай, когда резонаторные потери первичной лазерной генерации связаны в основном с поглощением в среде вторичного лазера:

$$\kappa \gg \kappa_1. \quad (\text{Б.3})$$

Тогда квантовая особенность в виде провала в спектре фототока (Б.1) будет наиболее выразительна (глубина провала $\delta = 1$). И, как и для пассивного резонатора (см. разд. 5), этот факт никак не зависит от соотношения между резонаторными ширинами κ_1 и κ_2 первичного и вторичного лазеров.

В то же самое время параметр Манделя зависит от этого соотношения. Действительно, если $\kappa \gg \kappa_a, \kappa_b$, то $\xi = -1/2$. Если же $\kappa_2 \gg \kappa \gg \kappa_1$, то $|\xi| \ll 1$.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (93-1914-EXT).

Литература

1. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. A **34**, 4547 (1986). L. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **36**, 740 (1987). J. Krause, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **34**, 2032 (1986).
2. Ю. М. Голубев, И. В. Соколов, ЖЭТФ **87**, 408 (1984).
3. Ю. М. Голубев, ЖЭТФ **107**, 401 (1995).
4. F. Naake, M. Kolobov, C. Fabre, E. Giacobino, and S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **71**, 995 (1993).
5. Ю. М. Голубев, ЖЭТФ **103**, 832 (1993).
6. М. И. Колобов, И. В. Соколов, Опт. и спектр. **62**, 112 (1987).
7. H. J. Carmichael, Phys. Rev. Lett. **70**, 2273 (1993).
8. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **70**, 2269 (1993).
9. М. И. Колобов, И. В. Соколов, Опт. и спектр. **67**, 122 (1989).
10. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
11. C. W. Gardiner, *Quantum noise*, Springer, Berlin (1992).