

О ЧАСТИЧНОМ ПОДАВЛЕНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПРОФИЛИРОВАННЫХ ОБОЛОЧКАХ

Н. А. Иногамов

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 24 октября 1996 г.

С проблемами устойчивости и перемешивания связан важный раздел физики высоких плотностей энергии. В процессах абляционного ускорения фольг и сжатия оболочек происходит потеря симметрии и развитие неустойчивости. Наиболее деструктивной оказывается фундаментальная f^- -мода, сохраняющая значения давлений в лагранжевых частицах. Предлагается способ устранения этой опасной моды, основанный на специальном профилировании распределения масс между подоболочками. Наличие этой моды сводило на нет предыдущие предложения по ограничению степени неустойчивости и оптимизации оболочек за счет профилирования в важном случае очень больших отношений плотностей на фронте абляции. Полученное решение опирается на класс новых политроп с инверсным ходом плотности и отрицательными значениями показателя политропы N . В этом классе плотность вещества ρ не убывает, как в случае обычных политроп с $N > 0$, а наоборот — возрастает при приближении к границе с вакуумом. Это позволяет моделировать многослойные распределения ρ , типичные для систем инерционного синтеза, в которых высокоплотные подоболочки образуют внутреннее ядро, охватывающее полость низкого давления, а внешние слои изготовлены из материалов малой плотности (пластик, вспененное вещество, композиты). Подчеркивается автомодельный характер найденных распределений, в связи с чем и линейная, и турбулентная динамики оказываются масштабно-инвариантными. Спектральная задача о возмущениях в несжимаемой жидкости обладает свойством скрытой симметрии. Известна изоспектральная деформация профиля плотности $I\{\rho_0(y)\}$, оставляющая спектр неподвижным. Интересно применить преобразование I к инвариантным f^\pm -модам, поскольку они «отцеплены» от конкретного профиля $\rho_0(y)$. В работе анализируется новый тип инвариантных мод, которые получаются таким способом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Программа лазерного инерционного синтеза развивается уже более 20 лет [1–7]. За это время произошли огромные изменения в технике мощных лазерных систем. Параллельно совершенствовалась технология изготовления мишеней. Для получения высоких компрессий импульс (длительность, форма), генерируемый лазером, и структура мишени должны быть хорошо «подогнаны» друг к другу. Современные методики позволяют изготавливать мишени с любым распределением плотности $\rho(r)$ [8, 9] путем осаждения покрытий широкого спектра веществ регулируемой толщины. Предлагается использовать эти возможности для получения профилей $\rho(r)$, оптимальных по отношению к неустойчивости. В них развитие газодинамических возмущений замедлено по сравнению с максимально возможным. Рэлей-тейлоровская или обменная неустойчивость является, как известно [2–7], основным препятствием на пути достижения порога зажигания и успеха всей программы управляемого термоядерного синтеза.

Оптимальные мишени представляют собой «стопки» подболочек с плотностью ρ_i и толщинами d_i , $1 < i < I$, в которых плотность ρ убывает, а толщины возрастают по определенному закону с ростом радиуса r . Число I велико ($I \gg 1$), поэтому относительные скачки плотности малы:

$$2|\rho_{i+1} - \rho_i| / (\rho_{i+1} + \rho_i) \ll 1.$$

При этом условии распределение плотности с маленькими ступеньками может быть приближено непрерывной функцией. Эти мишени являются и тонкими, и толстыми одновременно, поскольку, с одной стороны, толщина внешней оболочки d_I и всей конструкции велика, а с другой стороны, максимальные плотности достигаются в весьма тонких внутренних подболочках. Соответственно и эффективное аспектное отношение $R_{eff}/\Delta R_{eff}$ является промежуточным между большими ~ 100 и малыми ~ 1 значениями.

Важное место в теории неустойчивости занимает изобарическая рэлей-тейлоровская мода. Это решение, поле скоростей v которого удовлетворяет условию $\operatorname{div} v = 0$. В силу этого при таком движении значения давления сохраняются в лагранжевых частицах. Это особенно очевидно в случае сжимаемой среды, поскольку условие $\operatorname{div} v = 0$ означает сохранение объема, а значит, отсутствие сжатий частиц. Собственно, оно так и называется — условие несжимаемости. Это наиболее существенное свойство решения. В связи с этим его естественно называть изобарическим. Оно тождественно удовлетворяет изобарическому граничному условию, заключающемуся в постоянстве давления на контактной поверхности. Это условие называют также свободным граничным условием. Его инкремент $\sigma = \sqrt{gk}$ максимален в классе всех возможных неустойчивых мод. Благодаря инвариантности лагранжева давления мода нечувствительна к стратификации и даже к уравнениям состояния в подболочках или частицах, которые могут быть произвольными и разными для индивидуальных частиц. Она не может быть устранена при помощи профилирования. Эти теперь общепризнанные свойства были установлены в работе [10], в которой также показано, что гравитационные изобарические волны тесно связаны с трохoidalными волнами.

В связи с этим представляется целесообразным расширить классификацию Каулинга, принятую в астрофизике [11, 12]. Согласно ей имеются p -, g^\pm - и f -моды. Это звуковые волны давления (p -моды), гравитационные устойчивые (g^+ , $\omega^2 > 0$) и неустойчивые (g^- , $\omega^2 < 0$) моды и фундаментальная f -мода. Расширенная классификация состоит из p -, g^+ -, g^- -, f^+ - и f^- -мод¹⁾ Мода f теперь называется f^+ . Изобарические свойства этой классической моды известны давно (см. работу Герстнера, цитируемую в [10]). Изобарическую рэлей-тейлоровскую моду будем называть также фундаментальной f^- -модой.

Предыдущие предложения по профилированию в несжимаемой жидкости [13, 14] заключались в сглаживании скачка плотности

$$\rho(y) = \rho_D + \theta(y)(\rho_U - \rho_D) \rightarrow \rho_{CONT}(y),$$

где $\rho_{CONT}(y)$ — монотонная, непрерывная функция, например, типа $\operatorname{arctg} y$ или $\operatorname{erf} y$,

¹⁾ В теории астрофизических колебаний просто не известна ситуация, в которой изобарическая граница подпирает газовый слой, и поэтому f^- -мода отсутствует.

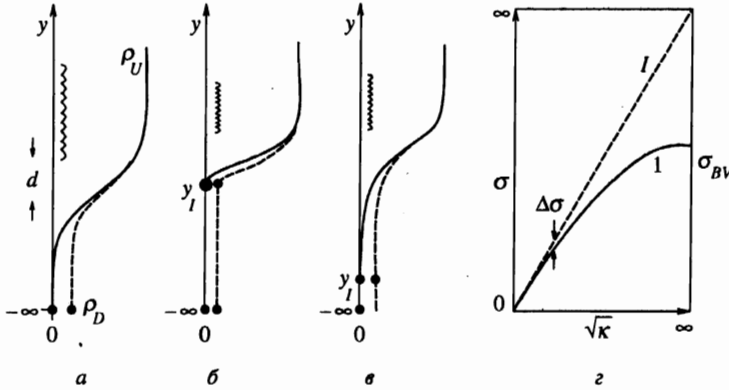


Рис. 1. Вопрос о присутствии или отсутствии f^- -моды в спектре и ее локализации относительно ценного высокоплотного участка, выделенного волнистой линией

$\rho_{CONT}(-\infty) = \rho_D, \rho_{CONT}(\infty) = \rho_U$. В сглаженном случае неограниченный инкремент

$$\sigma = \sqrt{(1 - \mu)/(1 + \mu)gk}, \quad \mu = \rho_D/\rho_U = (1 - A)/(1 + A),$$

обрезается при $k \rightarrow \infty$ инкрементом Брента-Вяйсяля

$$\sigma_{BV} = \sqrt{g \max [d \ln \rho_0 / dy]}.$$

Отметим, кстати, что в сжимаемой среде он равен

$$\sigma_{BV} = \sqrt{(g/\gamma)(-d \ln s_0 / dy)},$$

где s_0 — гидростатическое распределение энтропии, γ — показатель адиабаты. Из-за этого ограничения при турбулентном перемешивании возникает задержка перемешивания по времени $\sim 1/\sigma_{BV}$. Асимптотически на больших масштабах влияние сглаживания становится несущественным.

Рассмотрим вопрос об инкрементах и локализации гравитационных мод. С каждым профилем $\rho(y)$ связан определенный набор собственных мод. В случае, представленном на рис. 1а,

$$\sigma^2 \rightarrow (1 - \mu)/(1 + \mu)gk \quad \text{при } kd \rightarrow 0,$$

$$\sigma \rightarrow \sigma_{BV} \quad \text{при } kd \rightarrow \infty.$$

Зависимость $\sigma(k)$ дается кривой I на рис. 1з. Штриховая кривая I на этом рисунке соответствует f^- -моду. При $\mu \rightarrow 0$ имеем $\Delta\sigma(k)/\sigma(k) \rightarrow 0$ при $kd \rightarrow 0$ и кривые I и I касаются в нуле. Важно подчеркнуть, что в этом случае и при $\mu \rightarrow 0$ значение $\sigma(\infty)$ остается конечным $\sigma(k) \rightarrow \sigma_{BV} \simeq \sqrt{g/d}$, $kd \rightarrow \infty$, где d — ширина переходной области, см. рис. 1. Это обусловлено нижним граничным условием, в соответствии с которым требуется ограниченность возмущений при $y \rightarrow -\infty$, и тем, что нуль функции

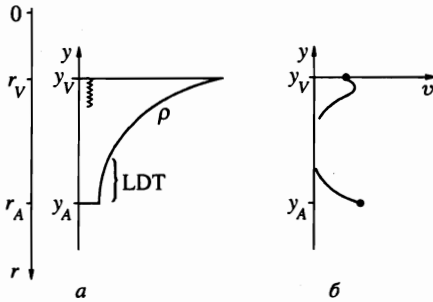


Рис. 2. а — Сглаженный профиль многослойной оболочки, ограниченный изобарическими границами y_V и y_A . б — Локализация f^- - и g_0^- -мод около границ y_A и y_V соответственно

$\rho(y)$ при $\mu = 0$ находится на бесконечности и производная убывает быстрее, чем функция, следовательно, $\rho'_y(y)/\rho(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Поэтому f^- -мода не появляется в спектре этого профиля при $\mu = 0$.

В случае, представленном на рис. 1б, $\sigma_{BV} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$ и кривая I стремится к кривой I . Перемешивание ценного слоя, выделенного волнистой линией, происходит из-за роста f^- -моды.

На этом слое происходит основное падение ускоряющего давления. Поэтому большая часть кинетической энергии, набранной в результате ускорения, аккумулируется в нем.

В промежуточном между этими двумя случае, представленном на рис. 1в, при $\mu = 0$ f^- -мода присутствует в спектре. Тем не менее, это присутствие является формальным, поскольку основной вклад в перемешивание ценного слоя связан с модой, с ограниченным инкрементом $\simeq \sqrt{g/d}$, как и в случае рис. 1а. Дело в том, что хотя инкремент f^- -моды больше, но из-за того, что точка y_I находится далеко, эта экспоненциально затухающая при удалении от точки y_I мода оказывается пространственно отделенной от интересующего нас ценного слоя и мало влияет на его перемешивание.

Таким образом, с помощью оптимального профиля предлагается сепарировать f^- -моду, см. рис. 2б, от интересующего нас ценного участка (показан волнистой линией на рис. 2а) за счет протяженного хвоста низкой плотности (участок LDT на рис. 2а). На ценном участке, прилегающем к границе r_V или $y_V = 0$, собраны подоболочки большой плотности, самые важные для процесса компрессии. Мода, ответственная за перемешивание на этом участке, локализована около границы y_V , см. рис. 2б. Таким образом, возникают два разных участка неустойчивости и перемешивания около границ r_V и r_A (или $y_V = 0$ и y_A).

Отметим, что в случае достаточно длинных волн

$$k < a^2 g / 4b^2 v_A^2 = (a^2 / 4b^2) M_A^{-2} / h, \quad h = c^2 / g,$$

граничное условие на фронте абляции приближенно может быть аппроксимировано изобарическим условием. Здесь v_A — скорость движения фронта абляции по холодному веществу, c — скорость звука в холодном веществе. Оценка следует из известной [15] формулы Такабе

$$\sigma = a\sqrt{gk} - bkv_A,$$

$a \approx 0.9$, $b \approx 3$, число Маха $M_A = v_A/c$ фронта мало по сравнению с единицей. Отметим также, что перемешивание во внутренних слоях сложной оболочки представляет самостоятельный интерес независимо от ситуации на абляционном фронте. Этот вопрос

особенно актуален в случае сложных больших мишеней и продолжительных лазерных импульсов.

Оптимальные профили автомодельны в том смысле, что все подоболочки равноправны по отношению к развитию неустойчивости. Сказанное означает, что внутри профиля устранены участки с повышенной степенью неустойчивости. В них ход плотности плавно обостряется при приближении к границе внутренней полости r_V . Такие профили являются политропными. Они находятся в классе степенных функций $\rho \propto (-y)^N$. Параметр N называется показателем политропы. У рассматриваемых политроп показатель N отрицательный. Поэтому $\rho \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$. В обычных политропах, изучавшихся в связи с гео- и астрофизическими приложениями [16–20], имеем $N > 0$ и $\rho \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$.

В автомодельных профилях размерных масштабов нет. Поэтому спектральные характеристики линейной теории масштабнo-инвариантны и даются автомодельными формулами. В частности, выражение для σ следует из анализа размерности и равно $\sigma_m = \sqrt{A_m g k}$, где A — безразмерное число, индекс m нумерует счетное множество $\{m\}$ дискретных собственных чисел. Качественно формула для σ оказывается такой же, как в простом случае скачка в несжимаемой жидкости. При неустойчивости интересна мода с максимальным инкрементом. Она соответствует «основному состоянию» с $m = 0$. Зависимость σ от N была вкратце рассмотрена в [21]. Здесь подсчитаны не только собственные числа, но и собственные функции, определено положение их максимумов, рассмотрено, к чему приведет учет конечного давления во внутренней полости и конечной плотности сжимающей многослойной оболочки на границе этой полости, изучено влияние жесткой стенки, обсуждается роль уравнений состояния, что существенно, поскольку подоболочки сделаны из разных веществ, и исследовала структура автомодельной рэлей-тейлоровской турбулентности нового типа. Она остается автомодельной в сжимаемой среде. Ранее была известна только автомодельность в несжимаемом случае. Отметим еще, что зависимость A_0 ($A_0 = \sigma_0^2/gk$) от переменного параметра N можно привлечь для оптимизации. Уменьшение N улучшает одномерную динамику оболочки и снижает величину энергии E , необходимую для инициации. С другой стороны, это же приводит к тому, что неустойчивость начинает развиваться быстрее и одномерное моделирование становится неадекватным реальному положению. Поэтому должно существовать промежуточное значение N , соответствующее пониженному порогу инициации. Что представляется немаловажным в ситуации, когда этот порог еще предстоит достичь. Тем более, что это требует изменений в мишени, а не дорогостоящего наращивания параметров лазерной системы.

2. ПРИНЦИПЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

Система газодинамических уравнений имеет вид

$$D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho D_t \mathbf{v} + \nabla p - \rho \mathbf{g} = 0, \quad D_t s = 0, \quad D_t = \partial_t + (\mathbf{v} \nabla), \quad s = s(p, \rho).$$

Линеаризуя ее стандартным образом около невозмущенного состояния, приходят [16] к уравнению

$$(p_L)''_{yy} - \frac{\rho'_{0y}}{\rho_0} (p_L)'_y - k^2 W p_L = 0, \quad W = 1 - \frac{\rho'_0}{\rho_{0y}} \frac{g}{\sigma^2} + \left(\frac{\sigma^2}{gk} - \frac{gk}{\sigma^2} \right) \frac{g}{kc_0^2}, \quad (2.1)$$

$$p_L = p - \frac{g}{i\omega} \rho_0 v,$$

для возмущений лагранжева давления p_L , справедливому в случае произвольного уравнения состояния. Здесь и далее $g = |\mathbf{g}|$, $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$ и p — возмущение эйлера давления. Если выполняется уравнение $s = p/p^\gamma$, то функцию W , входящую в (2.1), можно записать в виде

$$k^2 W = k^2 + \left(\frac{\sigma}{c_0} \right)^2 + \frac{k^2}{\gamma} \frac{g}{\sigma^2} \frac{s'_{0y}}{s_0}. \quad (2.1')$$

В политропическом случае

$$\rho_0 \propto (-y)^N, \quad p_0 \propto (-y)^{N+1}, \quad c_0 = \sqrt{\gamma g(-y)/(N+1)}, \quad (2.2)$$

$$s_0 \propto (-y)^\theta, \quad \theta = 1 - N(\gamma - 1),$$

уравнение (2.1) переходит в

$$\eta (p_L)''_{\eta\eta} - N (p_L)'_{\eta} - (\eta - 2a - N) p_L = 0, \quad a = -\frac{1}{2} \left(N - \frac{N+1}{\gamma} \Sigma^2 + \frac{\theta}{\gamma \Sigma^2} \right); \quad (2.3)$$

$$\eta = ky, \quad \Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{gk}.$$

Замена $p_L = e^\eta u$, $\eta = -z/2$ преобразует его к уравнению Куммера

$$z u_{zz} + (-N - z) u_z - a u = 0$$

(см. [22, стр. 504]), а замена $p_L = \eta^{N/2} \psi$, $\eta = z/(2a + N)$ приводит (2.3) к стационарному уравнению Шредингера

$$\psi_{zz} - (-E + U) \psi = 0$$

для частицы в кулоновском поле с полным моментом l равным $N/2$, энергией $E = -(2a + N)^{-2}$ и потенциалом $U = -1/z + l(l + 1)/z^2$.

Будем считать, что верхняя и нижняя зоны перемешивания, см. рис. 2б пространственно разделены. Тогда для описания g -возмущений, находящихся в верхней зоне около поверхности $y_V = 0$, нам потребуются решение уравнения (2.3), затухающее при $y \rightarrow -\infty$. Оно выражается через U -функцию Куммера [22] и равно

$$p_L = e^\eta U(a, -N, -2\eta), \quad M(a, b, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{b_j} \frac{z^j}{j!}, \quad (2.4)$$

$$a_j = a(a + 1) \dots (a + j - 1), \quad a_0 = 1,$$

$$U = -\frac{\pi}{\sin N\pi} \left[\frac{M(a, -N, -2\eta)}{\Gamma(a+N+1)\Gamma(-N)} - (-2\eta)^{N+1} \frac{M(a+N+1, N+2, -2\eta)}{\Gamma(a)\Gamma(N+2)} \right]. \quad (2.4)'$$

Теперь необходимо рассмотреть условие на верхней границе. Считаем, что это изобарическая граница. Тогда ее скорости и смещения отличны от нуля, а возмущения лагранжева давления на ней обращаются в нуль. Рассмотрим сначала более простой случай, когда можно пренебречь давлением во внутренней полости. Тогда невозмущенное давление p_0 обращается в нуль на границе y_V , а значит, согласно распределениям (2.2), точка y_V находится в нуле ($y_V = 0$). Потребуем, чтобы $p_L(y_V) = 0$, $y_V = 0$. Анализируя уравнение равновесия, находим, что показатель N ограничен снизу: $N > -1$. Видим, что для того чтобы выполнялось $p_L(0) = 0$, необходимо устранить первое слагаемое в выражении для U (2.4)'. Для этого требуется попасть на один из полюсов $z_m = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ гамма-функции $\Gamma(z)$, входящей в числитель первой дроби в (2.4)'. Следовательно, имеем

$$a_m + N + 1 = -m.$$

Отсюда и из определения a в (2.3) нетрудно получить дисперсионное соотношение. Ветки, относящиеся к модам p и f^+ , опускаем, моды g^+ отсутствуют. Из g^- -мод нас интересуют мода $m = 0$ с наибольшим инкрементом

$$\Sigma_0^2 = \sqrt{\beta^2 + \theta/(N+1)} - \beta, \quad \beta = \gamma(N+2)/2(N+1).$$

В несжимаемом случае $\gamma \rightarrow \infty$ эта формула упрощается и принимает вид

$$(\Sigma_0^2)_{rigid} = -N/(N+2).$$

Сжимаемость (при одинаковых профилях ρ и p) усиливает неустойчивость $\Delta(N, \gamma) = \Sigma_0^2 - (\Sigma_0^2)_{rigid} > 0$. Функция $\Delta(N, \gamma)$ монотонно возрастает при фиксированном N при уменьшении γ , т.е. при увеличении сжимаемости. Наибольшее значение, равное $\Delta(N, 1)$, она достигает при $\gamma = 1$. Относительная роль сжимаемости меняется в зависимости от N . При убывании N зазор

$$\Delta(N, 1) = (\Sigma_0^2)_{soft} - (\Sigma_0^2)_{rigid} = \frac{N+2}{2(N+1)} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{N+1}{(N+2)^2}} - 1 \right) + \frac{N}{N+2} \quad (2.5)$$

между мягким ($\gamma = 1$, кривая 2, на рис. 3а) и жестким ($\gamma = \infty$, кривая 1, рис. 3а) случаями сокращается. При $N = -1$ он обращается в нуль.

При любом фиксированном γ инкремент σ уменьшается с ростом N . При $N = -1$ он достигает максимального значения, равного \sqrt{gk} , совпадающего с инкрементом f^- -моды. Разложение Σ_0^2 в точке максимума инкремента $N = -1$, $\Sigma^2 = 1$ равно

$$\Sigma_0^2 = 1 - 2\delta N + (2 + 4/\gamma)(\delta N)^2 + O[(\delta N)^3],$$

где $\delta N = N + 1$. Как видим, линейное по δN слагаемое не зависит от γ . Поэтому разложение $\Delta(N, 1)$ в этой точке начинается с квадратичного по δN слагаемого. Интересующая нас область $N < 0$, $\Sigma^2 > 0$ представляет собой квадрат. Он ограничен пределами сверху и слева. Сверху пределом является инкремент $\sigma^2 = \sqrt{gk}$ моды f^- , а

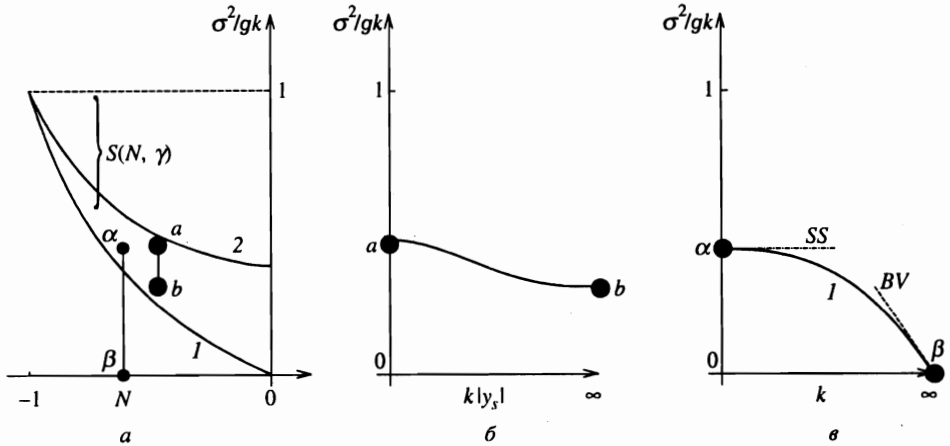


Рис. 3. а — Частичная стабилизация заключается в уменьшении инкремента на величину $S(N, \gamma)$ по сравнению с инкрементом f^- -моды. Стабилизация сохраняется при перенности показателя адиабаты (б) и при ограниченности плотности оболочки на границе с внутренней полостью (в)

слева — условие $N > -1$, следующее из требования финитности массы вблизи точки $y = 0$.

Уменьшенные инкременты находятся внутри зазора $\Delta(N, 1)$, определяемого (2.5). Как видим, политропические инкременты сдвинуты вниз на величину $S(N, \gamma)$ по сравнению с инкрементом f^- -моды, см. рис. 3а. В этом заключается стабилизирующее действие профилирования.

3. О РОЛИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ В ПОДОБОЛОЧКАХ

Работа посвящена анализу спектральных свойств инверсных по плотности политроп. Результаты применяются для моделирования развития неустойчивости в многослойных мишенях. Спрашивается, насколько адекватен такой подход реальной ситуации? Мишени состоят из большого числа подболочек, изготовленных из разных материалов. Можно ли описывать процесс развития единым («сквозным») образом в условиях, когда уравнения состояния веществ, во-первых, неидеальны и, во-вторых, неодинаковы в разных подболочках?

Приведем ответы на эти вопросы. Мишени со степенным профилем плотности ρ формируются технологически путем подбора цепочки веществ нарастающей плотности и регулировки толщины подболочек. Считается, что они находятся в эффективном гравитационном поле. Это стандартная аппроксимация, принимаемая многими авторами. Если это так, то выполняется уравнение гидростатики $p'_y = -g\rho$. А значит, если пренебречь давлением p_V в полости, то и профиль давления будет степенным. В силу уравнения гидростатики показатели степеней p и ρ отличаются на единицу. Следовательно, отношение p/ρ является линейной функцией координаты.

Основой модели является уравнение (2.1). Оно справедливо при любом уравнении состояния. Чтобы перейти от него к решениям, представленным в разд. 2, требуется выполнение инерционных и термодинамического условий. Инерционные условия

(степенной профиль ρ , линейность отношения p/ρ) выполнены. Остается рассмотреть термодинамическое условие. Оно заключается в требовании линейности c^2 по координате.

Займемся этим условием. Выпишем соотношение между термодинамическими функциями c^2 и p/ρ . По определению имеем

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \quad \gamma = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S. \quad (3.1)$$

В случае неидеального уравнения состояния показатель γ при адиабатических процессах является функцией одной термодинамической переменной, например плотности:

$$\gamma = \gamma(\rho).$$

В разных подболочках эта функция будет разной $\gamma^j(\rho)$, где индекс j нумерует подболочки. В разбираемой задаче речь идет о гидростатическом, т.е. стационарном распределении. В равновесии плотности подболочек равны ρ_j и фиксированы. Поэтому показатели зависят только от номера

$$\gamma^j(\rho) = \gamma^j(\rho_j) = \gamma^j.$$

Входящее в формулу (3.1) отношение p/ρ линейно. Поэтому для применимости подхода требуется, чтобы γ не зависели от j . То есть требуется, чтобы в подболочках были одинаковые значения γ .

Значения показателя γ у разных веществ отличаются умеренно. Влияние этих вариаций на основной результат, полученный в работе, невелико. Основной результат заключается в частичной стабилизации неустойчивости, см. рис. 3а. Речь идет о понижении инкремента σ из-за сдвига S . Вывод о понижении σ сохраняется в случае, когда показатели γ разные в подболочках. В этом отношении инерционные условия являются более существенными, чем термодинамические.

Для того чтобы показать это, рассмотрим двухслойный случай. Пусть при $y_S < y < 0$ показатель $\gamma = \gamma_U$, а при $y < y_S$ показатель $\gamma = \gamma_D$. В этом случае инкремент σ при $k|y_S| \gg 1$ определяется показателем γ_U , а при $k|y_S| \ll 1$ — показателем γ_D . В промежуточной области $k|y_S| \sim 1$ происходит монотонная перестройка σ , см. рис. 3б. Это объясняется тем, что мелкомасштабные возмущения локализованы внутри верхнего слоя, а для длинноволновых наличие этого слоя несущественно.

Сказанное означает, что инкремент в задаче с переменным показателем $\gamma(y)$ остается внутри зазора между кривыми 2 и 1 (ср. точки a и b на рисунках 3б и 3а). Следовательно, инкремент σ остается пониженным.

4. МНОГОСЛОЙНЫЙ ПРОФИЛЬ С КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Исследуем, как изменится ответ, если учесть давление во внутренней полости и отказаться от условия бесконечной плотности вещества оболочки на границе с полостью. Пусть начало отсчета $y = 0$ по-прежнему находится там, где обращается в нуль продолжение распределения давления $p_L \propto (-y)^{N+1}$. При этом невозмущенная граница находится в точке $y = y|_{\Gamma} = -\varepsilon$. Нетрудно видеть, что величина ε определяется

давлением в полости p_ϵ :

$$\epsilon \propto p_\epsilon^{1/(N+1)}.$$

В случае «обрезанного» степенного распределения задача теряет автомодельность. Ее спектр представлен на рис. 3в. Здесь прямая SS относится к автомодельному (степенному) спектру, его $\sigma_0 = \Sigma_0(N, \gamma)\sqrt{gk}$. Асимптотика BV соответствует инкременту Брента-Вайсяля $\sigma_{BV} = \sqrt{g|s'_{0y}|/\gamma s_0}$, вычисленному на краю профиля в точке $y = -\epsilon$. Он ограничивает рост σ . Квадрат безразмерного отношения равен $\Sigma_{BV}^2 = (\theta/\gamma)/k\epsilon$, где θ определено в (2.2). Результирующая дисперсионная зависимость дается кривой I . При $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ она стремится к предельным зависимостям SS и BV соответственно. Переходная область между этими асимптотиками находится при $k \sim k_\epsilon = 1/\epsilon$.

На участке разгона оболочки давление в полости мало: $p_\epsilon \ll p_A$. Поэтому величина сдвига ϵ мала по сравнению с полной толщиной многослойной оболочки. В этих условиях имеет смысл вычислить поправку к автомодельному инкременту, обусловленную противодействием. В силу сказанного, нас будет интересовать случай, когда параметр $k\epsilon$ мал: $k\epsilon \ll 1$. Отыщем поправку первого порядка по $k\epsilon$ к инкременту $\sigma_0 = \Sigma_0\sqrt{gk}$.

Общее дисперсионное соотношение, справедливое при произвольной величине параметра $k\epsilon$, следует из условия $p_L(-k\epsilon) = 0$. Для нахождения решения $p_L(\eta)$, удовлетворяющего условию затухания на бесконечности, возьмем выражения (2.4), (2.4)' и подставим их в это краевое условие. В результате получим общее соотношение:

$$(2k\epsilon)^{N+1} \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(a+N+1)} \frac{M(a, -N, 2k\epsilon)}{M(a+N+1, N+2, 2k\epsilon)} = 0. \quad (4.1)$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ первое слагаемое в (4.1) исчезает, поскольку $N > -1$, а функции M стремятся к 1, см. их определение (2.4). В этом случае, анализу которого посвящен разд. 2, требуется, чтобы аргумент гамма-функции совпадал с ее полюсом:

$$a + N + 1 = -m, \quad a = a_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

Посмотрим, как изменится ответ при $\epsilon \neq 0$. Если $k\epsilon \ll 1$, то поправка должна быть небольшой, поэтому мы по-прежнему находимся в окрестности полюса. В этой окрестности, как известно [23, с. 867], справедлива асимптотика

$$\Gamma(z) \approx [(-1)^m/m!] / (z + m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует искомое выражение для поправки:

$$a_m = -m - N - 1 + \Delta a_m, \quad \Delta a_m = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(-m - N - 1)\Gamma(N + 2)} (2k\epsilon)^{N+1}. \quad (4.2)$$

Интересно отметить, что зависимости $a_m(k)$ для звуковых (p) и гравитационных (g^\pm) мод одинаковы. Отсюда, кстати, следует, что и их собственные функции p_L совпадают (при любом значении ϵ). Дело в том, что в соотношения (2.4), (2.4)', определяющие p_L , входят не их частоты, которые, разумеется, отличаются, а величины a . Остальные собственные функции (v, ρ и т.д.) p - и g -мод отличаются, поскольку в их определении входит частота.

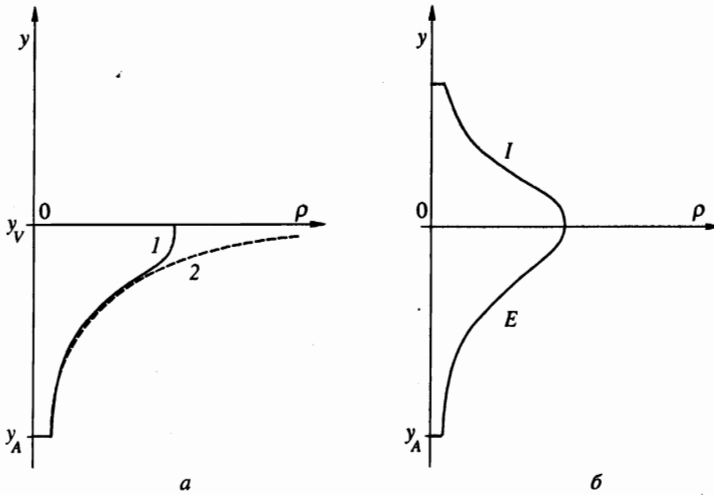


Рис. 4. *а* — Вывод о частичной стабилизации на стадии ускорения сохраняется в случае любого конечного гладкого профиля *1*. *б* — Двусторонний профиль *E-I* стабилизирует неустойчивость как на стадии ускорения, так и на стадии торможения

Проанализируем полученные соотношения. Функция $\Gamma(x)$ при действительных $x < 1$ чередует единичные положительные и отрицательные участки [23]. Отсюда следует, что при любых $N > -1$ поправки Δa_m (4.2) являются отрицательными. Подставляя (4.2) в соотношение (2.3), связывающее a и σ , приходим к биквадратному уравнению для σ . Один корень этого уравнения (взятый с минусом) дает минус частоты ($\sigma^2 = -\omega^2$) звуковых мод, а другой — гравитационных. Из анализа частотной зависимости следует, что p -моды из-за давления p_e становятся жестче, а устойчивые и неустойчивые гравитационные моды — мягче. Поэтому кривая *1* на рис. 3*в* отклоняется вниз от прямой *SS* с ростом k .

Таким образом, вывод о частичной стабилизации сохраняется и в случае профиля с конечной плотностью (ср. точки α и β на рисунках 3*в* и 3*а*). Аналогичное заключение справедливо относительно профиля *1* с любым гладким обрезанием степенной зависимости *2* при $y \rightarrow 0$, см. рис. 4*а*. Отметим, что сказанное распространяется на двусторонние стабилизирующие профили, см. рис. 4*б*, уменьшающие неустойчивость и задерживающие развитие перемешивания как на стадии нагона оболочки к центру ускоряющим импульсом, так и на стадии ее торможения противодействием топлива. На стадии ускорения неустойчивость стабилизируется внешней частью *E* профиля, а на стадии торможения — его внутренней частью *I*.

5. СТРУКТУРА ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Приступим к анализу собственных функций и их структуры. Из формул (2.4), (2.4)' и дисперсионного соотношения $a_0 = -N - 1$ следует, что в случае g_0^- -моды поле лагранжевых давлений равно

$$p_L = (-\eta)^{1+N} e^\eta, \quad \eta = ky.$$

Максимум функции $p_L(\eta)$ находится в точке $\eta_{PL}^{max} = -1 - N$. Вертикальная компонента скорости v вычисляется по p_L с помощью соотношения

$$v = i \frac{k}{\omega} \frac{\Sigma^2}{(\Sigma^2 + 1)(\Sigma^2 - 1)} \frac{\Sigma^2 (p_L)'_{\eta} - p_L}{\rho_0} \tag{5.1}$$

Оно следует из системы

$$v'_{\eta} + \frac{v}{\Sigma^2} = \left(1 + \frac{\sigma^2}{k^2 c_0^2} \right) \frac{k}{\sigma \rho_0} p_L, \quad \frac{v'_{\eta}}{\Sigma^2} + v = \frac{k}{\sigma \rho_0} \left[(p_L)'_{\eta} + \frac{g}{k c_0^2} p_L \right], \tag{5.1'}$$

предшествовавшей уравнению (2.1). Эта компонента равна

$$v = (1 - b^{-1} \eta) e^{\eta}, \quad -\eta_V^{max} = 1 - b, \quad b = \frac{1 + N}{\Sigma_0^{-2} - 1} > 0. \tag{5.2}$$

Скорость (5.2) нормирована на единицу на поверхности $y = 0$. В (5.2) выписано также положение максимума v . Оказывается, что он находится внутри политропы. Доказательство этого факта опущено в силу громоздкости. При $N \rightarrow -1$ давление превращается в монотонную функцию. Необходимо подчеркнуть приповерхностный характер g^- -мод. Они локализованы в слое возле границы с вакуумом. Его толщина $|\Delta y|$ порядка $|\eta_V^{max}|/k \sim 1/k$.

Посмотрим, как зависит распределение скорости от N . Разложение по N выражения, дающего положение максимума скорости $(-\eta_V^{max})$, вблизи точки $N = -1$ равно

$$-\eta_V^{max} = 1/2 + (1/2 - 1\gamma)(\delta N) + (\delta N)^2/\gamma + O[(\delta N)^3].$$

В несжимаемом случае имеем

$$(-\eta_V^{max}) = 1 + N/2.$$

Сравним положения максимумов возмущений лагранжева давления $(-\eta_{PL}^{max})$ и скорости $(-\eta_V^{max})$. Можно показать, что имеется N_{SEP} такое, что при $-1 < N < N_{SEP}$ максимум скорости находится под максимумом давления, т.е. на большем удалении от границы с вакуумом, а при $N_{SEP} < N < 0$, наоборот, на большей глубине находится максимум давления.

Рассмотрим поведение собственных функций в окрестности точки $y = 0$. Из анализа линеаризованной системы следует, что

(i) $p_L \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$;

(ii) скорость v остается конечной на границе с вакуумом;

(iii) отношение $v/c_0 \propto 1/\sqrt{-y}$ при $|y| \ll 1$;

(iv) возмущение эйлера давления $p_E = p_L + (g/i\omega)\rho_0 v \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$.

В последнем обстоятельстве заключается специфика рассматриваемых инверсных по плотности политроп, отличающая их от астрогеофизических ситуаций, в которых плотность $\rho_0 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ и соответственно $p_E \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$.

Степень нелинейности определяется функцией $a(\eta) = p_L/p_0$. Она характеризует относительную амплитуду возмущений. Вакуумные амплитуды скорости $v(0)$ и относительного давления $a(0)$ пропорциональны друг другу ($v \propto a$, $|y| \ll 1$). Если это отношение мало, $p_L \ll p_0$, то возмущения линейны. Видим, что $p_L/p_0 \propto e^\eta$ при $m = 0$. Максимум функции $a(\eta)$ достигается на вакуумной границе $y = 0$. Важным является то, что эта функция остается конечной в точке $y = 0$. Дело в том, что из этого следует, что если $a(0) \ll 1$, то возмущения оказываются линейными повсюду.

При этом сингулярности v/c_0 и p_E , см. (iii) и (iv), являются фиктивными. Их наличие не означает перехода возмущения в нелинейный режим и образования ударных волн в окрестности границы с вакуумом при сколь угодно малой амплитуде возмущения на больших удалениях от границы. Их появление связано со смещением $\delta\eta$ возмущенной границы, из-за чего физическая граница находится не в точке $y = 0$, а в точке $y = 0 + \delta\eta$.

В частности, хотя формально число Маха v/c_0 велико, вблизи границы речь идет о смещении тонкого приграничного слоя как целого²⁾. В этом слое местная скорость звука c_0 меньше, чем $v(0)$. Но накопление этой скорости происходит медленно по сравнению с тем временем, которое необходимо звуку, чтобы пробежать слой. Это означает, что разгоняющее ускорение мало: $|(\delta\eta)''_{tt}| \ll g$. Соответственно малы и ускоряющие градиенты давления, а значит, и сами давления $p_L \ll p_0$, а это и означает, что возмущение линейно.

6. КОНТАКТ С ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим еще одну интересную модификацию. Посмотрим, к чему приведет замена верхнего граничного условия. Рассмотрим условие, в определенном смысле обратное свободному. Расположим сверху жесткую стенку. Пусть она находится в точке $y = -\varepsilon$.

Решение $p_L(\eta)$ уравнения (2.1), согласованное с нижним граничным условием, дается соотношениями (2.4), (2.4)'. Для нахождения спектра необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие, которое ставится на стенке. А именно, требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$v(-k\varepsilon) = 0.$$

Это условие вместе с соотношением (5.1) дают дисперсионное уравнение

$$[(p_L)'_{\eta} \Sigma^2 - p_L] |_{-k\varepsilon} = 0.$$

Подставляя сюда (2.4), (2.4)' и дифференцируя, получаем

$$-\frac{1 - \Sigma^{-2}}{2} \frac{M(a, -N, 2k\varepsilon)}{\Gamma(a + N + 1)\Gamma(-N)} + (2k\varepsilon)^{N+1} \frac{1 - \Sigma^{-2}}{2} \frac{M(a + N + 1, N + 2, 2k\varepsilon)}{\Gamma(a)\Gamma(N + 2)} -$$

²⁾ Здесь уместен такой пример. Скорость звука в атмосфере Земли мала по сравнению со скоростью ее движения по орбите. Соответственно, число Маха, вычисленное по орбитальной скорости, очень велико (≈ 100). Это не мешает атмосфере находиться в дозвуковом равновесии.

$$\begin{aligned}
 &-\frac{a}{N} \frac{M(a+1, -N+1, 2k\epsilon)}{\Gamma(a+N+1)\Gamma(-N)} - (N+1)(2k\epsilon)^N \frac{M(a+N+1, N+2, 2k\epsilon)}{\Gamma(a)\Gamma(N+2)} - \\
 &-(2k\epsilon)^{N+1} \frac{a+N+1}{N+2} \frac{M(a+N+2, N+3, 2k\epsilon)}{\Gamma(a)\Gamma(N+2)} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Рассмотрим сначала длинноволновую асимптотику $k\epsilon \ll 1$. Если $N > 0$, то в нулевом приближении по малому параметру $k\epsilon$ ответ совпадает с выписанным выше. А именно, спектр дается уравнением

$$a_m + N + 1 = -m.$$

Правда, поправка первого порядка по $k\epsilon$ теперь другая. Она равна

$$\Delta a_m = \frac{(-1)^m}{m!} \left(-\frac{1 - \Sigma_m^{-2}}{2} + \frac{N+1+m}{N} \right)^{-1} \frac{(N+1)\Gamma(-N)}{\Gamma(-N-1-m)\Gamma(N+2)} (2k\epsilon)^N.$$

Как видим, степень, с которой входит параметр $k\epsilon$ в ответ, уменьшилась (ср. с (4.2)).

Если же $-1 < N < 0$, то ответ меняется уже в нулевом порядке по сравнению со случаем изобарической границы, описанным в разд. 2. В этом случае требуется устранить большое четвертое слагаемое в уравнении (6.1). Для этого нужно находиться в точке полюса функции $\Gamma(a)$. Отсюда следует, что $a_m = -m$, $m = 0, 1, \dots$. Чтобы определить Σ из этого уравнения, воспользуемся формулой (2.3) для a . Решая уравнение, находим

$$\Sigma_m^2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \theta/(N+1)},$$

где

$$\beta = (\gamma/2)(2m - N)/(N + 1).$$

Нас интересуют наибольшие инкременты. Поэтому необходимо рассмотреть первые значения m .

При $m = 0$ выражение под корнем образует полный квадрат. Отсюда следует, что неустойчивости в этом случае при любых значениях N ($-1 < N < 0$) и γ соответствует ответ $\Sigma^2 \equiv 1$. Это следует понимать как указание изучить случай $\Sigma^2 = 1$. Дело в том, что в этом случае система (5.1)' вырождается и соотношение (5.1) теряет смысл (оно содержит деление 0/0). Опишем вкратце проведенный анализ. Подставим $\Sigma^2 = 1$ в уравнение (2.1). Находим решение этого уравнения:

$$p_L = e^\eta.$$

Нам необходимо связать p_L и v . Подставим $\Sigma^2 = 1$ и $p_L = e^\eta$ в систему (5.1)'. Видим, что уравнения, входящие в систему, становятся одинаковыми. Они равны

$$v'_\eta + v = \left(1 + \frac{\sigma^2}{k^2 c_0^2} \right) \frac{p_L}{\rho_0}. \tag{6.2}$$

Несущественный множитель убран за счет перенормировки p_L . Поле p_L известно. Исследуем v . Сделаем замену $v = we^{-\eta}$ в уравнении (6.2). Получаем

$$w'_\eta = \left(1 + \frac{\sigma^2}{k^2 c_0^2} \right) \frac{e^{2\eta}}{\rho_0}. \tag{6.3}$$

Общее решение уравнения (6.2) равно

$$v(\eta) = (w_p + C)e^{-\eta},$$

где w_p — некоторое частное решение уравнения (6.3), а C — произвольная постоянная. Правая часть $R(\eta)$ уравнения (6.3) положительна ($\sigma^2/k^2c_0^2 = (N+1)/(-\eta)\gamma > 0$). Поэтому $w_p(\eta)$ — монотонно растущая функция η . При $(-\eta) \gg 1$ функция R мала. Поэтому на далеких расстояниях рост этот медленный. При $(-\eta) \rightarrow 0$ имеем

$$R \propto 1/(-\eta)^{1-(-N)}.$$

Поскольку $0 < (-N) < 1$, сингулярность эта интегрируемая. Это означает, что интеграл

$$w_p(0) - w_p(-\infty) = \int_{-\infty}^0 R d\eta \quad (6.4)$$

конечен. Чтобы удовлетворить условие на жесткой верхней границе, необходимо положить $C = -w_p(0)$. При таком выборе C функция $v(\eta)$ обращается в нуль на границе. Она равна

$$v(\eta) = [w_p(\eta) - w_p(0)] e^{-\eta}.$$

В силу (6.4) эта функция экспоненциально расходится на нижней границе. Следовательно, она не удовлетворяет одному из двух граничных условий и должна быть отброшена.

Таким образом, показано, что значение $m = 0$ следует пропустить. Рассмотрим значение $m = 1$. Соответствующая функция $\Sigma_R(N, \gamma)$ меньше 1 и существенно меньше функции $\Sigma_F(N, \gamma)$, которая получалась при наличии изобарической границы сверху при $m = 0$ (здесь поставлены индексы R и F , чтобы разделить жесткий и свободный случаи). Так и должно быть, поскольку жесткая граница действует стабилизирующе.

Сказанное выше относилось к асимптотике $k\varepsilon \ll 1$. На средних волнах $k \sim 1/\varepsilon$ инкремент $\Sigma_R(k)$ перестраивается на асимптотику Брента-Вайсъяля. Это означает, что коротковолновые асимптотики BV на рис. 3в инкрементов $\Sigma_R(k)$ и $\Sigma_F(k)$ одинаковы.

7. ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ИНВАРИАНТНАЯ ТОЧКА НА АКУСТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Особое поведение моды с $m = 0$ в случае с жесткой границей, см. разд. 6, побуждает более внимательно проанализировать моды, инвариантные к структуре гидростатического профиля и подчиняющиеся предельным законам дисперсии $\omega^2 = \pm gk$. Рассмотрим f^\pm -моды. Спектральная задача о возмущениях в несжимаемой жидкости обладает свойством скрытой симметрии. Известна изоспектральная деформация

$$\rho_0(y) \rightarrow I \{ \rho_0(y) \} = \tilde{\rho}_0(y),$$

оставляющая спектр неподвижным. В отличие от собственных чисел, собственные функции преобразуются при этом нетривиально. Интересно применить преобразование I к инвариантным f^\pm -модам, поскольку они не «зацеплены» за конкретный профиль. Оказывается, что таким способом получается новый тип инвариантных мод. Решение с $m = 0$, полученное в разд. 6, принадлежит этому типу.

7.1. Изоспектральная инверсия плотности

Инверсия плотности

$$\rho(\eta) \rightarrow \tilde{\rho}(\eta) = \frac{1}{\rho(-\eta)} \quad (7.1)$$

не меняет спектра собственных чисел. Это свойство было обнаружено в работе [13] при численных расчетах характеристических уравнений ступенчатых профилей плотности с несколькими ступеньками. Затем в работе [24] оно было проверено на частном примере трехслойной переходной зоны между двумя однородными полупространствами. Строгое общее доказательство существования симметрии (7.1) дано в работе [25]. Оно основано на алгебраических преобразованиях произвольных трехдиагональных матриц. Они описывают спектральную задачу в случае произвольных ступенчатых распределений с любым числом ступенек. Произвольный непрерывный профиль с любой заданной точностью может быть аппроксимирован с помощью ступенчатого распределения. Другое доказательство (7.1) в непрерывном случае приведено в [26, с. 297]. В [26] получено также соотношение, связывающее исходную скорость v с преобразованной скоростью $I\{v\}$. Новое короткое доказательство симметрии (7.1), вскрывающее свойство дуальности, существующее между собственными функциями лагранжева давления и скорости, дано в [21]. Использованию симметрии (7.1) посвящены также недавние работы [27, с. 526] и [28, гл. IV].

Преобразование (7.1) нетривиально. Оно качественно изменяет профиль, превращая одну функцию $\rho(\eta)$ в другую. В [21] доказано, что при инверсии (7.1) собственные функции преобразуются по правилу

$$\tilde{v}(\eta) = p_L(-\eta), \quad \tilde{p}_L(\eta) = v(-\eta). \quad (7.2)$$

Как видим, происходит перестановка функций v и p_L и изменение знака аргумента.

В случае f^\pm -мод возмущения давления отсутствуют: $p_L(\eta) \equiv 0$. Будем называть эти инвариантные к профилю моды f_G^\pm -модами. Скорости находятся из любого из уравнений системы (5.1)' при $p_L(\eta) \equiv 0$. Они равны $v^\pm = e^{\pm\eta}$. Преобразуем их по правилу (7.2). Получаем, что

$$(p_L)^\pm(\eta) = e^{\mp\eta}, \quad \omega^2 = \pm gk. \quad (7.3)$$

Здесь и далее верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам в законе дисперсии в том виде, в котором он выписан в (7.3). Будем называть решения (7.3) f_P^\pm -модами. Эти же решения находятся из уравнения (2.1) после подстановки в него дисперсионных законов (7.3). Если действовать с помощью уравнения (2.1), то легко видеть, что моды f_P^\pm являются инвариантными. Это означает, что распределения p_L (7.3) не зависят от равновесных профилей плотности и давления.

7.2. Профиль скорости и граничные условия

Определим $v^\pm(\eta)$ функции f_P^\pm -мод. По правилу (7.2) их определить нельзя. Необходимо действовать с помощью уравнения (6.2). В общем случае оно равно

$$(v^\pm)'_\eta \mp v^\pm = \left(1 \mp \frac{g}{kc^2}\right) \frac{e^{\mp\eta}}{\rho}. \quad (7.4)$$

Отсюда и находятся эти функции.

Отметим, что общее решение уравнения (7.4) зависит от двух постоянных C_P и C_G . Одна постоянная связана с функцией p_L , поскольку $(p_L)^\pm = C_P e^{\mp \eta}$, а другая — с дифференциальным уравнением первого порядка (7.4). Общее решение однородного уравнения, соответствующего (7.4)

$$(v^\pm)'_\eta \mp v^\pm = 0,$$

равно $C_G e^{\pm \eta}$. Это означает, что общее решение уравнения (7.4) представляет собой смесь из f_P^\pm - и f_G^\pm -мод, взятых с весами C_P и C_G соответственно.

Итак, в общем виде моды f_P^\pm описаны. Теперь интересно проверить, совместны ли они с физическими граничными условиями. Изобарические условия приходится отбросить, поскольку функции $p_L^\pm = e^{\mp \eta}$ не имеют нулей. Поэтому рассмотрим слой, ограниченный двумя стенками. В этом случае нам потребуются решения уравнений (7.4) с двумя нулями.

Случай, когда правая часть R уравнения (7.4) не меняет знака, исследован в разд. 6. К нему же относится случай несжимаемой жидкости. В разд. 6 показано, что решения уравнения (7.4), взятого с нижним знаком, монотонны и могут иметь не более одного нуля. Следовательно, остается рассмотреть случай верхнего знака. Сделаем замену, аналогичную той, которая была произведена в разд. 6. Получаем

$$w'_y = k \left(1 - \frac{g}{kc^2}\right) \frac{e^{-2ky}}{\rho} = kR(y), \quad v^+(y) = e^{ky} w(y). \quad (7.5)$$

Пусть имеется произвольная монотонная растущая или убывающая функция $c(y)$, определенная на отрезке $y_D < y < y_U$, где y_D и y_U — соответственно нижняя и верхняя жесткие границы. Необходимо рассмотреть такие значения k , чтобы нуль функции $R(y)$ (см. (7.5)) находился внутри отрезка. Пусть $R(y_z) = 0$. Пусть для определенности функция $c(y)$ убывает с ростом y . Тогда при $y < y_z$ имеем $R(y) > 0$. Будем интегрировать уравнение (7.5) из точки $y = y_D$. Положим $w(y_D) = 0$. Тогда и для скорости имеем $v(y_D) = 0$. Решение $w(y)$ уравнения (7.5) растет при $y_D < y < y_z$, достигает максимума при $y = y_z$ и затем начинает убывать.

Вариации k ведут к вариациям y_z . При уменьшении k точка y_z смещается в сторону нижней границы y_D . Если точка y_z находится достаточно близко к границе y_D , то функция $w(y)$ после прохождения максимума убывает и достигает нуля в точке y_{zz} внутри отрезка $y_z < y_{zz} < y_U$. Понятно, что если теперь увеличивать k , то точка y_{zz} смещается вверх в сторону верхней границы y_U . Имеется такое значение k_P , при котором выполняется $y_{zz} = y_U$. Этому волновому числу соответствует частота $\omega_P = \sqrt{gk_P}$. При этих k и ω функция скорости $v(y)$ удовлетворяет и верхнему, и нижнему граничным условиям и является собственной модой. Ей соответствует точка $I(k_P, \omega_P)$ на плоскости $k\omega$.

7.3. Инверсионный переход между акустической и гравитационной ветвями

В разд. 7.2 рассмотрен слой, ограниченный жесткими стенками. Связанный с ним спектр приведен на рис. 5а. Имеются p - и g -моды. У акустических мод p_m ($m = 0, 1, \dots$) индекс m указывает число нулей функции $v(y)$ внутри слоя. При $k \rightarrow 0$ их частоты стремятся к постоянным значениям $\simeq c/d$, а при $k \rightarrow \infty$ выходят на асимптотику

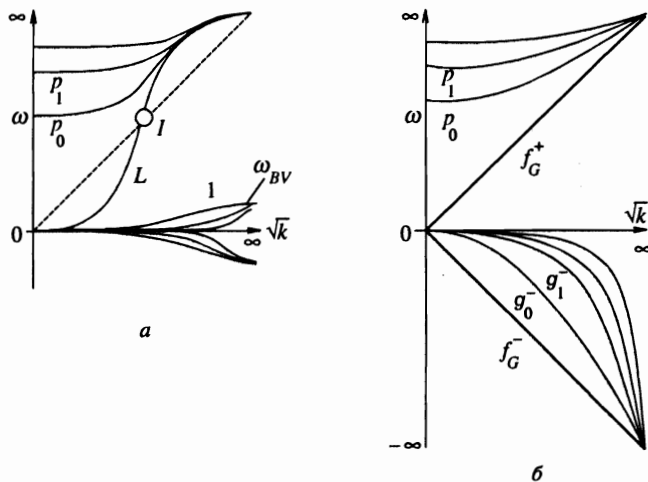


Рис. 5. *a* — Случай газового слоя между двух жестких границ. Семейства акустических (L, p_0, p_1, \dots) и гравитационных (g^\pm) мод. Штриховая зависимость дает закон дисперсии $\omega = \sqrt{gk}$. Точкой I выделена инвариантная акустическая мода f_P^+ . *б* — Случай слоя между двух изобарических границ (давление $p_V = 0$ на верхней границе)

$\omega = ck$ (здесь $d = y_U - y_D$ — расстояние между границами, c — характерная скорость звука).

Имеется еще одна акустическая мода с другой асимптотикой в нуле. Она помечена буквой L на рис. 5а. Ее называют модой Ламба. Ее происхождение легче всего понять, рассмотрев предел $g \rightarrow 0$. В этом случае очевидно, что в газовом слое имеется мода, которая распространяется строго горизонтально. Рассмотрим прямоугольный ящик с твердыми стенками. Акустические моды классифицируются парой чисел (m_y, m_x) , где m_y — указывает число полуволн, укладываемых в ящик по y -направлению, а m_x — по x -направлению. Имеются моды $(0, 1), (1, 0), (1, 1), \dots$. Модам p_0, p_1, \dots соответствуют $m_y = 1, 2, \dots$, а L -моды соответствует $m_y = 0$.

В однородном слое при $g = 0$ вертикальная компонента скорости v тождественно равна нулю, $v(y) \equiv 0$, в случае L -моды. Отметим, кстати, что в неоднородном случае вид функции $v(y)$ существенно определяется неоднородностью. Она может не иметь нулей внутри слоя в случае монотонного профиля или иметь один или несколько нулей в зависимости от характера немонотонности. Мода L исчезает, если хотя бы одна из границ является изобарической, см., например, рис. 5б. Для нас важно то, что при $g \neq 0$ качественная структура акустических L - и p_m -мод сохраняется.

При $g \neq 0$ появляются гравитационные моды g_m^\pm , где $m = 0, 1, \dots$ указывает число нулей функции $v(y)$. В пределе $k \rightarrow 0$ они выходят на асимптотику мелкой воды

$$\omega_m = \xi_m \sqrt{\frac{d \ln s}{dy}} d ck = \alpha \xi_m \sqrt{\frac{d \ln s}{dy}} d \sqrt{gh} k,$$

где $h = c^2/g$, числа ξ_m, α зависят от конкретного профиля, $\xi_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Точка I , относящаяся к инвариантной моде f_P^+ , находится на пересечении дисперсионной кривой L -моды и кривой $\omega = \sqrt{gk}$. Ее координаты равны k_P, ω_P , см. разд. 7.2.

Для сравнения на рис. 5б представлен полный спектр изучаемой в работе политропы, ограниченной двумя изобарическими границами. Имеются p_m^- , f_G^+ , g_m^- и f_G^- -моды. Индекс m указывает число нулей функции $p_L(y)$. Асимптотики при $k \rightarrow 0$ остаются в качественном отношении такими же, как в случае с двумя жесткими границами. Асимптотики при $k \rightarrow \infty$ равны $\sigma_m = \sqrt{gk} \Sigma_m$ в случае g -мод и $\omega_m = \sqrt{gk} \Omega_m$ в случае p -мод. Моды f_G^+ и g_m^- связаны с верхней границей y_V , а мода f_G^- — с нижней y_A . Таким образом, они разделены пространственно.

Как сказано выше, инвариантным фундаментальным f_P^\pm - и f_G^\pm -модам соответствуют разные собственные функции. У первых экспоненциальны давления p_L , тогда как у вторых — скорости v . Моды f_G^\pm являются гравитационными. Это следует из того, что в несжимаемом пределе $c \rightarrow \infty$ их частоты остаются конечными, тогда как частоты акустических мод уходят на бесконечность. Кроме того, они имеют гравитационные асимптотики. Например, в случае слоя, ограниченного снизу жесткой, а сверху изобарической границами, мода с асимптотикой фундаментальной моды $\omega \rightarrow \sqrt{gk}$ при $k \rightarrow \infty$ попадает при $k \rightarrow 0$ в семейство гравитационных мод. При $k \rightarrow 0$ они выходят на асимптотику мелкой воды. Эта мода является самой жесткой в этом семействе. Напротив, моду f_P^+ следует отнести к акустическому семейству. Действительно, она находится на акустической L -моды и пропадает при $c \rightarrow \infty$ вместе со всеми остальными акустическими модами. Таким образом, полная гравитационно-акустическая классификация имеет вид

$$p, f_P^+, f_G^\pm, g^\pm.$$

8. ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

Выше изложены точные результаты, относящиеся к спектральной линейной теории. Она применима, пока амплитуды возмущений малы:

$$t \ll \frac{1}{\sigma(k)} \ln \frac{1}{ka_0},$$

где a_0 — начальная амплитуда. Рассмотрим движение на нелинейной

$$t \sim \frac{1}{\sigma(k)} \ln \frac{1}{ka_0}$$

и сильно нелинейной (турбулентной)

$$t \gg \frac{1}{\sigma(k)} \ln \frac{1}{ka_0}$$

стадиях. Оказывается, из спектральной теории следуют вполне определенные выводы относительно турбулентности. Наиболее важными в этом отношении являются следующие обстоятельства.

А. В случае политропы, граничащей с вакуумом ($p_V = 0$), инкремент σ неограниченно возрастает при $k \rightarrow \infty$, см. разд. 2 и рис. 5б, мода g_0^- . Это указывает на преимущество мелкомасштабных возмущений по сравнению с более длинноволновыми возмущениями на ранних стадиях развития процесса турбулентного перемешивания.

В. Возмущения локализованы в приповерхностном слое толщиной $\sim 1/k$ около границы с вакуумом, см. разд. 5, посвященный анализу полей собственных функций. Это означает, что, во-первых, перемешивание «стартует» от этой границы и, во-вторых, что перемешанный слой прилегает к ней.

С. Периодическое возмущение в своем развитии проходит две стадии. Первой является стадия экспоненциального роста, а второй — стадия насыщения. Оценим характерную скорость на второй стадии по формуле

$$v \sim \sigma(k)/k. \quad (8.1)$$

Развитие периодического возмущения приводит к «размазыванию» степенной особенности. Усредненный по горизонтальным координатам профиль плотности, возникающий в результате «размазывания», аналогичен профилю 1 на рис. 4а. Толщина «размазанного» слоя h_P растет со временем (здесь индекс P означает «периодический»). Максимальная скорость расширения

$$\frac{dh_P}{dt} \sim \Sigma_0 \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (8.2)$$

достигается в момент перехода с первой стадии на вторую. В дальнейшем скорость (8.1) уменьшается. Это вызвано тем, что параметр kh_P становится больше единицы и инкремент, входящий в оценку (8.1), начинает уменьшаться, поскольку он вычисляется уже не по формуле $\sigma = \Sigma_0 \sqrt{gk}$, а по формуле $\sigma = \sigma_{BV} \sim \sqrt{g/h_P}$. Речь здесь идет о переходе от асимптотики SS к асимптотике BV , см. рис. 3в и разд. 4.

Д. Сравним развитие периодических возмущений малого и большого масштабов. Согласно сказанному выше (А) на начальной стадии доминирует малый масштаб. Однако скорость расширения (8.2), связанная с крупным масштабом, больше. Поэтому на поздней стадии доминирует уже большой масштаб.

Е. С однородными (степенными) распределениями связаны автомодельные инкременты (разд. 2) и автомодельные собственные функции (разд. 5). Автомодельность или однородность здесь означают равноправность всех пространственных и временных масштабов. Из этого же следует равноправность всех пар «малый — большой масштаб» (обозначим их буквами λ_S и λ_L соответственно), отличающихся в фиксированное число раз ($\lambda_L/\lambda_S = Q$).

Из сказанного в (D) относительно смены доминанты с течением времени и в (E) относительно автомодельности следует, что в процессе развития турбулентности имеет место своеобразная эстафета текущих доминирующих горизонтальных масштабов $\langle \lambda \rangle$. Ее можно назвать каскадом укрупнений текущего масштаба. Это инверсный каскад, поскольку в таком процессе характерное волновое число $\langle k \rangle$ уменьшается. Соответствующие ему фурье-образы газодинамических функций, например ρ , автомодельны. Пусть $\rho(x, y, t)$ и $\rho(k, y, t)$ — распределение плотности и его фурье-образ. Автомодельность фурье-образа означает, что он может быть записан в виде функции двух переменных $\rho(q, \eta)$, где $q = kgt^2$, $\eta = y/gt^2$. Зависимость от q при фиксированном η имеет максимум, соответствующий доминирующему масштабу. Обозначим значение $q = q_{MAX}$, при котором достигается максимум, $2\pi/\alpha_H$.

Тогда доминирующий горизонтальный масштаб $\langle \lambda \rangle = 2\pi/k_{MAX}$, $q_{MAX} = k_{MAX}gt^2$, равен $\langle \lambda \rangle = \alpha_H gt^2$.

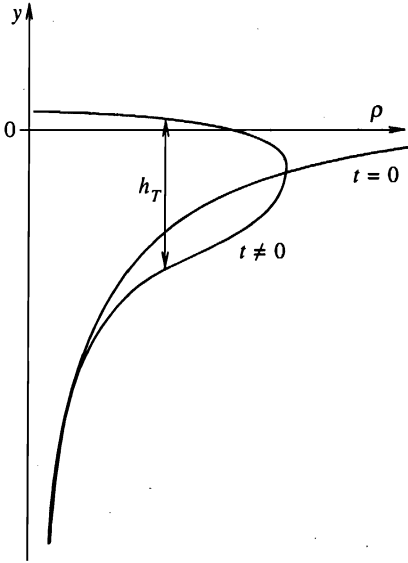


Рис. 6. Развитие политропической сжимаемой турбулентности, $h_T = \alpha_V g t^2$ — ширина перемешанного слоя

Аналогично из размерных соображений (ускорение g — единственный размерный параметр) следует, что толщина турбулентного перемешанного слоя автомодельна:

$$h_T = \alpha_V(N, \gamma) g t^2. \quad (8.3)$$

Развитие турбулентности показано на рис. 6. В процессе перемешивания происходит турбулентное «размазывание» степенной особенности. Это связано с опусканием низкоэнтропийных и подъемом высокоэнтропийных лагранжевых частиц. Подчеркнем, что толщина h_T растет по автомодельному закону (8.3) в сжимаемом случае. Коэффициент турбулентного перемешивания α_V зависит от степени N и показателя γ , характеризующего сжимаемость вещества. Он уменьшается при фиксированном γ при увеличении степени N .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-06381-а) и INTAS (грант № 94-1105).

Литература

1. J. H. Nuckolls, L. Wood, X. Thiessen, and G. B. Zimmerman, *Nature* **239**, 139 (1972).
2. K. A. Brueckner and S. Jorna, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 325 (1974).
3. А. М. Прохоров, С. И. Анисимов, П. П. Пашинин, *УФН* **119**, 401 (1976).
4. С. И. Анисимов, А. М. Прохоров, В. Е. Фортгов, *УФН* **142**, 395 (1984).
5. J. D. Lindl, R. L. McCrory, and M. Campbell, *Phys. Today* **45**, 32 (1992).
6. С. Ю. Гуськов, Н. В. Змитренко, В. Б. Розанов, *ЖЭТФ* **108**, 548 (1995).
7. S. W. Haan, S. M. Pollaine, J. D. Lindl et al., *Phys. Plasmas* **2**, 2480 (1995).
8. R. McEachern, C. Moore, G. E. Overturf et al., *Inertial Confinement Fusion, ICF Quarterly Rep., LLNL*, **4**, 25 (1993).

9. S. A. Letts, G. W. Collins, E. M. Fearon et al., *Inertial Confinement Fusion, ICF Quarterly Rep.*, LLNL **4**, 54 (1994).
10. Н. А. Иногамов, ДАН СССР **278**, 57 (1984).
11. W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, and H. Shibahashi, *Nonradial oscillations of stars*, University of Tokio Press, Tokio (1979).
12. J. P. Cox, *Theory of stellar pulsation*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1980).
13. К. О. Mikaelian, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1365 (1982).
14. Р. И. Ардашова, С. И. Балабин, Н. П. Волошин, Ю. А. Кучеренко и др., *Вопросы атомн. науки и техники, сер. Теор. и прикл. физ.*, вып. 1, 20 (1988).
15. H. Takabe, K. Mima, L. Montierth, and R. L. Morse, *Phys. Fluids* **28**, 3676 (1985).
16. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover publications, N. Y. (1945), Ch. X.
17. C. L. Pekeris, *Phys. Rev.* **73**, 145 (1948).
18. A. Skumanich, *Astrophys. J.* **121**, 408 (1955).
19. J. Christensen-Dalsgaard, *Monthly Notes Royal Astronomical Soc.* **190**, 765 (1980).
20. J. Christensen-Dalsgaard, D. O. Cough, and J. Toomre, *Science* **229**, 923 (1985).
21. Н. А. Иногамов, *ЖЭТФ* **110**, 559 (1996).
22. L. J. Slater, in *Handbook of Mathematical Functions*, NBS Appl. Math. Ser., № 55, ed by M. Abramowitz, I. A. Stegun, Washington, DC: GPO (1964).
23. *Математическая энциклопедия*, под ред. И. М. Виноградова и др., Сов. энциклопедия, Москва (1977), т. 1.
24. К. О. Mikaelian, *Phys. Rev. A* **26**, 2140 (1982).
25. Н. А. Иногамов, в кн. *Проблемы динамики и устойчивости плазмы*, Московский физико-технический институт (МФТИ), Москва (1990), с. 100.
26. H. J. Kull, *Physics Reports* **206**, 197 (1991).
27. С. Cherfils and К. О. Mikaelian, *Phys. Fluids* **8**, 522 (1996).
28. К. О. Mikaelian, *Phys. Rev. E* **53**, 3551 (1996).