ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 4, стр. 1174–1189

РЕЗОНАНСНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА, ВОЗБУЖДАЕМОГО СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ, И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДНЕГО ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА АТОМА

С. Я. Килин, В. Н. Шатохин

Институт физики им. Б. И. Степанова Академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 21 июня 1996 г.

Найдена эволюция средних атомных переменных в резонансной флуоресценции двухуровневого атома, возбуждаемого суперпозицией сдвинутых по фазе на π когерентных состояний. Предсказан новый эффект квантовой неустойчивости среднего дипольного атома, причиной которого является сильная корреляция между атомом и полем. Предлагаются возможные способы экспериментальной проверки эффекта в высокодобротных резонаторах оптического и микроволнового диапазонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возродившийся в конце 70-х годов интерес к так называемым неклассическим состояниям оптических полей (сжатым, суперпозиционным и другим, требующим для своего описания язык квантовой теории) сохраняется и по сей день [1, 2]. Во многом этот интерес обусловлен важными приложениями таких полей в сверхточных измерениях, оптической связи, квантовых компьютерах. В связи с этими приложениями возникают и новые фундаментальные вопросы, в частности, об особенностях взаимодействия полей в неклассических состояниях с атомами и молекулами.

Многое о характере таких взаимодействий позволяет узнать рассмотрение резонансной флуоресценции — одного из явлений квантовой электродинамики, в котором наиболее ярко проявляется квантовая природа оптических полей. Оно интенсивно изучалось как теоретически, так и экспериментально (обзор работ, выполненных до 1981 года, см., например, в [3]). Стандартной моделью для описания резонансной флуоресценции служит двухуровневый атом, взаимодействующий с совокупностью электромагнитных мод свободного пространства, образующих резервуар для атома. Для описания возбуждения атома обычно предполагается, что одна из мод первоначально находится в когерентном состоянии. Однако, если предположить, что возбуждение осуществляется неклассическим светом, то обнаруживается ряд новых особенностей в резонансной флуоресценции, не наблюдаемых при ее возбуждении когерентным светом. Так, в работе [4] было рассмотрено затухание двухуровневого атома в широкополосный сжатый вакуум и показано, что одна из компонент атомной поляризации затухает со скоростью, меньшей скорости спонтанного распада в обычный вакуум. В [5] рассмотрена задача о спектре резонансной флуоресценции в сжатый вакуум. При этом обнаружена сильная зависимость ширины центрального пика спектра флуоресценции от фазы возбуждающего поля. В работах [6, 7] сообщается о существовании для узкого диапазона частот Раби необычных форм спектров флуоресценции двухуровневого атома, взаимодействующего со сжатым вакуумом. Сделан вывод о том, что аномальные профили спектров флуоресценции являются отличительной чертой взаимодействия атомных систем с неклассическими полями. Статистические свойства резонансной флуоресценции, возбуждаемой неклассическим светом генератора второй гармоники и вырожденного параметрического усилителя в пределе слабых интенсивностей, рассмотрены в работе [8].

Разнообразные новые результаты, полученные в работах [4–8], основаны на традиционном подходе к рассмотрению резонансной флуоресценции. При таком подходе гамильтониан взаимодействия записывается в дипольном приближении и в приближении вращающейся волны. Достаточно полное описание атомно-полевых взаимодействий в ряде случаев получается на основе метода квантового управляющего уравнения для матрицы плотности, усредненной по состояниям поля (редуцированной атомарной матрицы плотности). Эффективность метода связана с используемым при выводе уравнения приближения широкополосного спектра резервуара, или марковского приближения [3–14]. В этом приближении справедлива квантовая теорема регрессии, которая позволяет, в частности, исследовать поведение многовременных атомных корреляционных функций. В работе [13] для рассмотрения резонансной флуоресценции был использован метод построения цепочки зацепляющихся уравнений для операторов, средние от которых равны спектральным полевым корреляционным функциям различных порядков.

Особенностью отмеченных выше работ по резонансной флуоресценции, возбуждаемой неклассическим светом, является пертурбативный подход к рассмотрению взаимодействия «неклассическое излучение — атом». Сложность решения этой задачи для произвольных интенсивностей неклассического излучения состоит в необходимости вычисления всех высших моментов атомно-полевых корреляторов. Интересно отметить, что только для особого случая — когерентного излучения — эта проблема решена для произвольных интенсивностей [9, 10, 12, 14]. Выделенность случая когерентного возбуждения связана с тем, что когерентное состояние, являясь собственным состоянием оператора уничтожения, не изменяется в результате однофотонных процессов поглощения. Как результат состояние возбуждающего поля остается когерентным. Для других состояний возбуждающего поля это не так и традиционные подходы требуют обобщения.

В настоящей работе рассмотрен случай возбуждения флуоресценции неклассическим светом, образованным квантовой суперпозицией двух сдвинутых по фазе когерентных состояний (СКС) с равными амплитудами. При больших значениях амплитуды эти неклассические состояния являются состояниями типа «шредингеровского кота» [2, 15–22], что делает их исключительно важными для экспериментальной проверки принципов квантовой механики. В настоящее время предложено немало способов генерации СКС, например, в нелинейном волновом процессе [15], посредством непрерывного фотодетектирования [16], в схеме с обратной связью в керровской среде [17], в четырехволновом взаимодействии [18], в процессе нерезонансных взаимодействий ридберговских атомов с полем в микроволновом резонаторе [19].

В работе [20] показано, что неклассические свойства суперпозиций когерентных состояний, такие как сжатие и субпуассоновская статистика фотонов, возникают вследствие квантовой интерференции между когерентными состояниями. Квантовая интерференция обусловливает не только перечисленные свойства, но и существенно изменяет характер атомно-полевых взаимодействий в резонансной флуоресценции. Ниже будет показано, что средний дипольный момент атома, взаимодействующего с СКС, становится при определенном пороговом значении амплитуды начального когерентного состояния неустойчивым. Кроме того, осцилляции Раби среднего дипольного момента для любых значений амплитуды подавляются. Для нахождения динамики атома в настоящей статье используется метод гейзенберговских уравнений, позволяющий более полно, чем использованный ранее [21] метод усреднения, представить природу возникающего эффекта как результата квантовой интерференции и коррелированной атомно-полевой динамики.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 обсуждаются некоторые свойства суперпозиций когерентных состояний. Модель взаимодействия с резервуаром в гейзенберговском представлении строится в разд. 3. Динамика атомных средних обсуждается в разд. 4. Там же показано, что обнаруженная неустойчивость среднего дипольного момента перехода обусловлена квантовой интерференцией амплитуд вероятностей начального полевого состояния и предлагается способ экспериментальной проверки эффекта.

2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУПЕРПОЗИЦИЙ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим дискретную суперпозицию когерентных состояний с одинаковой амплитудой

$$|\Psi\rangle = A^{1/2}\sum_{k=1}^{n} e^{i\phi_k}|\alpha e^{i\vartheta_k}\rangle, \tag{1}$$

где A — нормировочная константа, а фазы ϕ_k и ϑ_k могут быть произвольными. От их значений зависит конструктивный либо деструктивный характер квантовой интерференции в фазовом пространстве [2, 20]. Состояние (1) является частным случаем предложенной в [22] непрерывной суперпозиции вдоль окружности, которую предложено генерировать для молекулярных колебаний. Ограничимся случаем $n = 2$, $\phi_1 = \vartheta_1 = 0$, $\phi_2 = \phi$, $\vartheta_2 = \pi$. Получающееся состояние

$$|\chi\rangle = \left\{2\left[1 + \exp\left(-2|\alpha|^2\right)\cos\phi\right]\right\}^{-1/2}\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle e^{i\phi}\right) = N^{-1/2}\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle e^{i\phi}\right) \tag{2}$$

реализует наиболее простой пример СКС. Оно является собственным состоянием не для оператора уничтожения фотона, как в случае когерентного состояния, а для квадрата этого оператора. Несмотря на кажущуюся простоту, это состояние проявляет разнообразные неклассические свойства, возникающие вследствие квантовой интерференции между когерентными состояниями. Наибольшее число предложенных схем генерации СКС связано именно с состояниями типа (2). Как видно из (2), в определение состояний входит дополнительный фазовый множитель $e^{i\phi}$, влияющий на квантовостатистические свойства суперпозиции.

Случай $\phi = 0$ соответствует четным (+), $\phi = \pi$ — нечетным (−) когерентным состояниям:

$$\left\{2\left[1 \pm \exp\left(-2|\alpha|^2\right)\right]\right\}^{-1/2}\left(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle\right), \tag{3}$$

а $\phi = \pi/2$ — состояниям Юрке–Столера:

$$2^{-1/2}\left(|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle\right). \tag{4}$$

Как показано в ряде работ [2, 20], несмотря на отличия только в значениях фазового множителя, неклассические свойства трех перечисленных состояний существенно различны. К примеру, четные состояния могут содержать только четное число фотонов, нечетным состояниям доступны только нечетные числа фотонов, а в состоянии Юрке–Столера статистика фотонов пуассоновская. Четные когерентные состояния имеют суперпуассоновскую статистику фотонов и проявляют сжатие второго порядка, а нечетные обладают субпуассоновской статистикой, но у них отсутствует сжатие второго порядка. Что касается состояний Юрке–Столера, то для них характерно сжатие второго и четвертого порядков.

Суперпозиционные квантовые состояния проявляют и другие особенности, присущие неклассическим состояниям света. В частности, интерференция амплитуд вероятностей состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$ в их суперпозиции делает функцию квазивероятности Вигнера

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi N}\left\{e^{-2|\beta-\alpha|^2} + e^{-2|\beta+\alpha|^2} + 2e^{-2|\beta|^2}\cos\left[\phi + 4\,\mathrm{Im}(\beta\alpha^*)\right]\right\} \quad (5)$$

состояния $|\chi\rangle$ [2] отрицательной в области квантовой интерференции. Наличие квантовой интерференции для состояний $|\chi\rangle$ проявляется еще более неожиданным образом в функции распределения Глаубера–Сударшана $P(\beta)$, которая имеет вид (см. Приложение)

$$P(\beta) = N^{-1}\left\{\delta(\beta-\alpha) + \delta(\beta+\alpha) + \right.$$
$$\left. + \left(e^{-2|\alpha|^2}/|\beta|\right)\delta\left(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \pi/2\right)\left(e^{+i\phi}\delta_{AC}\left(|\beta| - i|\alpha|\right) + e^{-i\phi}\delta_{AC}\left(|\beta| + i|\alpha|\right)\right)\right\}. \quad (6)$$

Первые два слагаемых с точностью до нормировочной постоянной совпадают с P-функциями когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$, а два оставшихся представляют интерференционную часть P-функции и характеризуют чисто квантовые свойства состояния. Этих два слагаемых определяются сингулярной функцией

$$\delta_{AC}(x-z) = e^{-z\partial/\partial x}\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-(x+z)^2/\varepsilon}, \quad (7)$$

являющейся более сингулярной, чем δ-функция Дирака. Поскольку действие этой функции при выполнении интегрирования с функцией $F(x)$ действительного аргумента x

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta_{AC}(x-z)F(x) = F(z) \quad (8)$$

сводится к аналитическому продолжению функции $F(x)$ в комплексную область (z в формуле (8) — комплексная величина), предложено называть $\delta_{AC}(x-z)$ обобщенной функцией аналитического продолжения [21]. Как видно из формулы (6), при усреднении с P-функцией суперпозиционного состояния[1)] интерференционные члены будут

[1)] Во избежание недоразумений следует специально отметить, что в силу своеобразного действия функции аналитического продолжения все операции взятия комплексного сопряжения в усредняемой функции должны быть выполнены до интегрирования, а не после.

приводить к замене в усредняемом выражении модуля комплексной амплитуды $|\beta|$ на мнимую величину $i|\alpha|$. Ниже мы покажем, что именно это свойство P-функции (6), отражающее свойство квантовой интерференции, приводит к возникновению неустойчивости среднего дипольного момента атома, возбуждаемого суперпозицией когерентных состояний.

3. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С РЕЗЕРВУАРОМ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из одиночного двухуровневого атома и совокупности полевых мод, образующих бассейн. Для простоты рассуждений будем предполагать, что поле заключено в сферическом резонаторе (объем квантования — сфера с радиусом R), а атом расположен в центре сферы. Для выбранной геометрии спектр собственных частот мод поля, с которыми взаимодействует атом, почти эквидистантный [23] с межмодовым расстоянием равным $c\pi/R$.

В начальный момент времени атом невозбужден и находится в состоянии $|1\rangle$; моды поля, за исключением резонансной, находятся в вакуумном состоянии. Резонансная мода, которой соответствует индекс r, возбуждена в суперпозиционное состояние $|\chi\rangle$ (2), которое для последующего удобно обозначить как $|\alpha_+\rangle$:

$$|\alpha_+\rangle = (N_+)^{-1/2}\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle e^{i\phi}\right), \tag{9}$$

$$N_+ = 2\left(1 + \exp\left(-2|\alpha|^2\right)\cos\phi\right). \tag{10}$$

Наряду с состоянием $|\alpha_+\rangle$ нам понадобится состояние

$$|\alpha_-\rangle = (N_-)^{-1/2}\left(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle e^{i\phi}\right), \tag{11}$$

$$N_- = 2\left(1 - \exp\left(-2|\alpha|^2\right)\cos\phi\right), \tag{12}$$

у которого имеется дополнительная фаза π по сравнению с состоянием $|\alpha_+\rangle$. В момент $t = 0$ атом и поле начинают взаимодействовать друг с другом. Полный гамильтониан рассматриваемой системы в электрическом дипольном приближении и в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_{0F} + \hat{H}_{0A} + \hat{H}_{IAF}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_{0F} &= \hbar\sum_k \omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k, \\ \hat{H}_{0A} &= \hbar\omega_{21}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \\ \hat{H}_{IAF} &= \hbar\sum_k \left(\hat{p}_k^{(+)}\hat{a}_k^+ + \hat{p}_k^{(-)}\hat{a}_k\right) \end{aligned}$$

— соответственно операторы Гамильтона свободного поля, свободного атома и их взаимодействия, $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$ — бозе-операторы уничтожения и рождения фотонов в моде k; $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ — спиновые операторы Паули, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$\{\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-\} = 1, \quad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z,$$

где $\hat{\sigma}_z$ — оператор атомной инверсии, $\hat{p}_k^{(+)} = g_k\hat{\sigma}_-$, $\hat{p}_k^{(-)} = g_k^*\hat{\sigma}_+$ — константы взаимодействия. Оператор плотности системы «атом + поле» в начальный момент времени $t = 0$ в соответствии с выбранными условиями можно записать как

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_A(0)\hat{\rho}_F(0) \equiv |\psi_+\rangle\langle\psi_+|, \quad |\psi_+\rangle = |1\rangle_A|\alpha_+\rangle \prod_{k\neq r} |0\rangle_k \equiv |1\rangle|\alpha_+\rangle|\{0\}\rangle. \tag{14}$$

Уравнения Гейзенберга для операторов системы имеют вид

$$\dot{\hat{a}}_k = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{a}_k, \hat{H}\right] = -i\omega_k\hat{a}_k - ig_k\hat{\sigma}_-, \tag{15.1}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_- = -i\omega_{21}\hat{\sigma}_- + i\sum_k g_k^*\hat{a}_k\hat{\sigma}_z, \tag{15.2}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_z = 2i\sum_k \left(\hat{p}_k^{(+)}\hat{a}_k^+ - \hat{p}_k^{(-)}\hat{a}_k\right). \tag{15.3}$$

Подставляя решение уравнения (15.1)

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k(0)e^{-i\omega_k t} - ig_k\int_0^t d\tau\, \exp\left(-i\omega_k(t-\tau)\right)\hat{\sigma}_-(\tau) \tag{16}$$

в уравнения (15.2) и (15.3), получаем следующую систему уравнений с исключенными гейзенберговскими полевыми операторами $\hat{a}_k(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}}_- &= -i\omega_{21}\hat{\sigma}_- + i\sum g_k^*\hat{a}_k(0)\exp(-i\omega_k t)\hat{\sigma}_z + \\ &+ \int_0^t d\tau \sum_k |g_k|^2 \exp\left(-i\omega_k(t-\tau)\right)\hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_z(t),\end{aligned} \tag{17.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}}_z &= 2i\sum_k \left(\hat{p}_k^{(+)}a_k^+(0)\exp(i\omega_k t) - \hat{p}_k^{(-)}\hat{a}_k(0)\exp(-i\omega_k t)\right) - \\ &- 2\int_0^t d\tau \sum_k |g_k|^2 \exp\left(-i\omega_k(t-\tau)\right)\left\{\hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(t) + \hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_+(t)\right\}.\end{aligned} \tag{17.2}$$

Стандартным подходом к решению полученной системы уравнений является предельный переход к свободному пространству $R \to \infty$. В одномерном случае такой переход состоит в замене (см., например, [14])

$$\sum_k |g_k|^2 \ldots \approx \int_0^\infty d\omega\, |g(\omega)|^2 \rho(\omega)\ldots, \tag{18}$$

где $\rho(\omega)$ — плотность мод, равная $R/2\pi c$ в случае эквидистантного спектра сферического резонатора. После взятия интегралов в марковском приближении, соответствующем замене корреляционной функции возмущений атома

$$K(t-\tau) = \sum_k |g_k|^2 \exp\left(it(\omega_{21} - \omega_k)(t-\tau)\right)$$

на δ-функцию $\Gamma\delta(t-\tau)$, система уравнений (17) принимает вид

$$\dot{\hat{\sigma}}_- = -\Gamma\hat{\sigma}_- + i\sum_k g_k^*\hat{\sigma}_z\hat{a}_k(0)\exp\left(i(\omega_{21}-\omega_k)t\right), \tag{19.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}}_z &= 2i\sum_k\left[\hat{p}_k^{(+)}(t)\hat{a}_k^+(0)\exp\left(-i(\omega_{21}-\omega_k)t\right)\right] - \\ &\quad - 2i\sum_k\left[\hat{p}_k^{(-)}(t)\hat{a}_k(0)\exp\left(i(\omega_{21}-\omega_k)t\right)\right] - 2\Gamma,\end{aligned} \tag{19.2}$$

где $\Gamma = \pi|g(\omega_{21})|^2\rho(\omega_{21})$ — скорость спонтанного затухания атома, совпадающая с коэффициентом Эйнштейна $A/2$. Используя коммутационные соотношения [12]

$$[\hat{a}_k(0),\hat{q}(t)] = ig_k\left[\int_0^t d\tau\ \exp(i\omega_k\tau)\hat{\sigma}_-(\tau),\hat{q}(t)\right], \tag{20}$$

получающиеся из уравнения (16), и условия коммутативности одновременных операторов поля $\hat{a}(t)$ и атома $\hat{q}(t)$, можно провести нормальное упорядочение по полевым операторам в уравнениях (22) и получить следующую окончательную систему уравнений для атомарных операторов:

$$\dot{\hat{\sigma}}_- = -\Gamma\hat{\sigma}_- + i\hat{\sigma}_z\hat{L}_-(t), \tag{21.1}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_z = -2\Gamma(1+\hat{\sigma}_z) + 2i\left[\hat{L}_+(t)\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+\hat{L}_-(t)\right], \tag{21.2}$$

где

$$\hat{L}_-(t) = \left[\hat{L}_+(t)\right]^+ = \sum_k g_k^*\hat{a}_k(0)\exp\left(i(\omega_{21}-\omega_k)t\right)$$

— операторы свободного поля, выполняющие роль операторов мультипликативного шума в гейзенберговских уравнениях (21).

Полученная система операторных уравнений точно не решается, но усредненные уравнения в ряде случаев можно проинтегрировать. Очевидно, что эта возможность определяется начальным состоянием полевого резервуара. В настоящей статье мы рассматриваем только одну из этих возможностей — суперпозицию двух когерентных состояний (2) или (9) в качестве начального состояния для возбужденной моды. Но прежде чем перейти к решению уравнений (21), обсудим предел применимости используемого марковского приближения. Как отмечалось во Введении, это приближение приводит к эквивалентным результатам в двух физически различных ситуациях: задаче с источником классического поля и задаче, когда квантованная полевая мода приготовлена в начальный момент в когерентное состояние с конечной амплитудой, равной амплитуде классического поля. Поскольку наличие источника приводит к расходимостям со временем средних чисел фотонов в модах резервуара [14], возникает противоречие между конечными результатами (бесконечная энергия) и начальными условиями. Для снятия этого противоречия предполагают, что когерентная мода очень сильно заселена, так что в квантовой системе, взаимодействующей с резервуаром, стационарное состояние успевает установиться раньше, чем истощится когерентная мода. В этом смысле марковское приближение применимо для любых времен. Если, однако, подойти к проблеме более строго, то в качестве временного предела применимости марковского приближения следует брать время, за которое полная вычисленная энергия $E(t)$ в модах резервуара достигает первоначальной $E_0 = \hbar\omega_0|\alpha|^2$. Можно показать, что это условие равносильно неравенству

$$t \leq 2\pi\rho(\omega_0), \tag{22}$$

где $\rho(\omega_0)$ — плотность мод на частоте ω_0. Для мод, взаимодействующих с атомом, расположенным в центре сферического резонатора, плотность равна $1/\Delta$, и правая часть (22) представляет время «оживления» (см., например, [24]) $T_R = 2R/c$ резонатора (совпадающее с временем обхода резонатора).

4. НЕУСТОЙЧИВОСТИ АТОМАРНЫХ СРЕДНИХ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КВАНТОВОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ

Система квантовых стохастических уравнений (21) рассматривалась ранее для случая когерентного состояния исходно возбужденной моды (см., например, [12]). Усредненные уравнения в этом случае образуют замкнутую систему для трех атомарных средних $\langle\hat\sigma_-\rangle$, $\langle\hat\sigma_+\rangle$, $\langle\hat\sigma_z\rangle$. В случае начального суперпозиционного состояния (9), в силу того что состояние $|\alpha_+\rangle$ не является собственным для оператора уничтожения, такого замыкания только на три атомарных средних при усреднении уравнений (21) по начальному состоянию не происходит. Действительно, составим уравнение для среднего матричного элемента

$$\langle\hat\sigma_-(t)\rangle = \mathrm{Sp}_{A+F}\left(\hat\sigma_-(t)\hat\rho_A(0)\hat\rho_F(0)\right) = \langle\psi_+|\hat\sigma_-(t)|\psi_+\rangle,$$

для чего усредним левую и правую части операторного уравнения (21.1) по начальному оператору плотности. Из-за наличия неоднородного члена $i\hat\sigma_z\hat L_-(t)$ имеем

$$\langle\psi_+|i\hat\sigma_z(t)\sum_k g_k^*\hat a_k(0)\exp\left(i(\omega_{21}-\omega_k)t\right)|\psi_+\rangle = ig_r^*\langle\alpha_+|\langle 1|\langle\{0\}|\hat\sigma_z(t)|\{0\}\rangle|1\rangle\hat a_r(0)|\alpha_+\rangle =$$
$$= i\alpha_+ g^*\langle\alpha_+|\langle 1|\langle\{0\}|\hat\sigma_z(t)|\{0\}\rangle|1\rangle|\alpha_-\rangle = i\alpha_+ g^*\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle,$$

где состояния

$$|\psi_+\rangle = |1\rangle|\alpha_+\rangle|\{0\}\rangle \quad \text{и} \quad |\psi_-\rangle = |1\rangle|\alpha_-\rangle|\{0\}\rangle \tag{23}$$

преобразуются друг в друга при действии оператора уничтожения резонансного поля $\hat a$ согласно соотношениям

$$\hat a|\alpha_+\rangle = \alpha_+|\alpha_-\rangle, \quad \hat a|\alpha_-\rangle = \alpha_-|\alpha_+\rangle, \tag{24}$$

в которых $\alpha_+ = \alpha\sqrt{N_-/N_+}$, $\alpha_- = \alpha\sqrt{N_+/N_-}$, а состояния $|\alpha_\pm\rangle$ и нормировочные константы $N_\pm$ определяются формулами (9)–(12). Таким образом, возникают новые переменные, связанные с появлением нового фотонного состояния $|\alpha_-\rangle$. Составляя для них уравнения, получим две независимые системы уравнений по шесть уравнений в каждой:

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_-|\psi_+\rangle = -\Gamma\langle\psi_+|\hat\sigma_-|\psi_+\rangle + i\alpha_+ g^*\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle, \tag{25.1}$$

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_z|\psi_-\rangle = -2\Gamma\left(\langle\psi_+|\psi_-\rangle+\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle\right) + $$
$$+2i\left(\alpha_+^* g\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle - \alpha_- g^*\langle\psi_+|\hat\sigma_+|\psi_+\rangle\right), \tag{25.2}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_-|\psi_-\rangle = -\Gamma\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle + i\alpha_- g^*\langle\psi_-|\hat\sigma_z|\psi_+\rangle, \tag{25.3}$$

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_+|\psi_+\rangle = \left(\langle\psi_+|\hat\sigma_-|\psi_+\rangle\right)^*, \tag{25.4}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_z|\psi_+\rangle = \left(\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle\right)^*, \tag{25.5}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_+|\psi_-\rangle = \left(\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle\right)^*, \tag{25.6}$$

и

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_z|\psi_+\rangle = -2\Gamma\left(1+\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_+\rangle\right) + 2i\left(\alpha_+^* g\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_+\rangle - \alpha_+ g^*\langle\psi_+|\hat\sigma_+|\psi_-\rangle\right), \tag{26.1}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_-|\psi_+\rangle = -\Gamma\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_+\rangle + i\alpha_+ g^*\langle\psi_-|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle, \tag{26.2}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_z|\psi_-\rangle = -2\Gamma\left(1+\langle\psi_-|\hat\sigma_z|\psi_-\rangle\right) + 2i\left(\alpha_-^* g\langle\psi_+|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle - \alpha_- g^*\langle\psi_-|\hat\sigma_+|\psi_+\rangle\right), \tag{26.3}$$

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_-|\psi_-\rangle = -\Gamma\langle\psi_+|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle + i\alpha_- g^*\langle\psi_+|\hat\sigma_z|\psi_+\rangle, \tag{26.4}$$

$$\langle\psi_+|\dot{\hat\sigma}_+|\psi_-\rangle = \left(\langle\psi_-|\hat\sigma_-|\psi_+\rangle\right)^*, \tag{26.5}$$

$$\langle\psi_-|\dot{\hat\sigma}_+|\psi_+\rangle = \left(\langle\psi_+|\hat\sigma_-|\psi_-\rangle\right)^*. \tag{26.6}$$

Структура полученных систем уравнений такова, что среднее значение оператора дипольного момента $\langle\hat\sigma_-(t)\rangle \equiv \langle\psi_+|\hat\sigma_-(t)|\psi_+\rangle$ связано не со средней разностью населенностей $\langle\hat\sigma_z(t)\rangle \equiv \langle\psi_+|\hat\sigma_z(t)|\psi_+\rangle$, а с интерференционным матричным элементом $\langle\psi_+|\hat\sigma_z(t)|\psi_-\rangle$, который равен корреляции между атомным оператором инверсии $\hat\sigma_z(t)$ в момент времени t и полевым оператором $\hat a(0)$ в начальный момент времени:

$$\alpha_+\langle\psi_+|\hat\sigma_z(t)|\psi_-\rangle \equiv \langle\hat\sigma_z(t)\hat a(0)\rangle \equiv \langle\psi_+|\hat\sigma_z(t)\hat a(0)|\psi_+\rangle,$$

а также с корреляцией числа фотонов в начальный момент времени и оператором дипольного момента в момент времени t:

$$\langle\hat a^+(0)\hat\sigma_-(0)\hat a(0)\rangle = |\alpha_+|^2\langle\psi_-|\hat\sigma_-(t)|\psi_-\rangle.$$

Аналогично, среднее значение оператора инверсии связано с интерференционным матричным элементом $\langle\psi_+|\hat\sigma_-(t)|\psi_-\rangle$, определяющим атомно-полевую корреляцию $\langle\hat\sigma_-(t)\hat a(0)\rangle$, и с корреляцией числа фотонов в начальный момент времени с атомарной инверсией в момент t:

$$\langle\hat a^+(0)\hat\sigma_z(t)\hat a(0)\rangle = |\alpha_+|^2\langle\psi_-|\hat\sigma_z(t)|\psi_-\rangle.$$

Очевидно, что такая структура уравнений, а именно, образование замкнутой системы для атомарных $\langle\hat A(t)\rangle$ и атомно-полевых $\langle\hat B(t)\hat a(0)\rangle$, $\langle\hat a^+(0)\hat B(t)\hat a(0)\rangle$ средних есть результат того, что исходное состояние поля является собственным состоянием квадрата оператора уничтожения. В общем случае произвольного начального состояния выделенной моды поля усредненные уравнения (21) образуют бесконечную цепочку уравнений для атомно-полевых нормально-упорядоченных корреляционных функций $\langle(\hat a^+(0))^m B(t)(\hat a(0))^n\rangle$. Отметим, что эта цепочка сводится к замкнутой системе конечного числа уравнений для двух классов состояний. К первому классу состояний относятся СКС, дискретно распределенные на окружности

$$\hat a^n|\xi\rangle = \alpha^n|\xi\rangle, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и, как вырожденный случай СКС, обычные когерентные состояния. Ко второму классу состояний относятся конечные суперпозиции фоковских состояний $|\zeta\rangle = \sum_{m=0}^{n} c_m|m\rangle$.

Системы уравнений (25) и (26) просто решаются в квадратурах с использованием преобразования Лапласа. При выбранных начальных условиях

$$\begin{gathered}\langle\psi_+|\hat{\sigma}_-(0)|\psi_+\rangle = \langle\psi_+|\hat{\sigma}_-(0)|\psi_-\rangle = \langle\psi_-|\hat{\sigma}_-(0)|\psi_+\rangle = \langle\psi_-|\hat{\sigma}_-(0)|\psi_-\rangle = 0, \\ \langle\psi_+|\hat{\sigma}_z(0)|\psi_+\rangle = -1, \quad \langle\psi_+|\hat{\sigma}_z(0)|\psi_-\rangle = -\langle\psi_+|\psi_-\rangle,\end{gathered} \tag{27}$$

лапласовские образы решений имеют вид

$$\langle\psi_\pm|\tilde{\sigma}_z(p)|\psi_\pm\rangle = -\frac{1}{2p}\left[1 + \frac{Q_+(p)}{2Q_-(p)}\left(1 - \frac{N_\mp}{N_\pm}\right) + \frac{Q_-(p)}{2Q_+(p)}\left(1 + \frac{N_\mp}{N_\pm}\right)\right], \tag{28}$$

$$\langle\psi_\pm|\tilde{\sigma}_-(p)|\psi_\pm\rangle = \pm\alpha g^* \frac{1 + 2\Gamma/p}{N_\pm Q_-(p)} \exp\left(-2|\alpha|^2\right)\sin\phi, \tag{29}$$

где

$$Q_\pm(p) = (p + \Gamma)(p + 2\Gamma) \pm 4|\alpha g|^2 \tag{30}$$

— полиномы, определяющие характеристические показатели во временной зависимости атомарных средних. Как следует из (29), временная зависимость среднего дипольного момента

$$\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle \equiv \langle\psi_+|\hat{\sigma}_-(t)|\psi_+\rangle = \alpha g^*(N_+)^{-1}\exp\left(-2|\alpha|^2\right)\sin\phi(s_1 e^{p_1 t} + s_2 e^{p_2 t} + s_0) \tag{31}$$

определяется корнями полинома $Q_-(p)$

$$p_{1,2} = -3\Gamma/2 \pm \sqrt{4|\alpha g|^2 + \Gamma^2/4}, \tag{32}$$

отличающимися от корней полинома $Q_+(p)$, которые описывают осцилляции Раби для когерентного начального состояния, заменой знака модуля частоты Раби на противоположный $|\alpha g|^2 \to -|\alpha g|^2$. Коэффициенты s_i в уравнении (31) даются соотношениями

$$s_{1,2} = (1 + 2\Gamma/p_{1,2})/(p_{1,2}^2 - p_1 p_2), \quad s_0 = \Gamma/(\Gamma^2 - 2|\alpha g|^2). \tag{33}$$

Полученное решение для зависимости от времени среднего дипольного момента $\langle\hat{\sigma}_-(t)\rangle$ принципиально отличается от случая первоначально когерентно возбужденной моды. Поскольку корни p_1, p_2 — действительные величины, при выбранных начальных условиях ни при каких значениях амплитуды поля не будут наблюдаться осцилляции дипольного момента. Более того, при $|\alpha g|^2 > \Gamma^2/2$ корень p_1 положителен и, следовательно, средний дипольный момент становится неустойчивым.

Максимально эффект проявляется при $\phi = \pi/2$, а при $\phi = 0$ или $\phi = \pi$, т. е. для четных или нечетных когерентных состояний, средний дипольный момент не возбуждается совсем. Объясняется это тем, что при $\phi = \pi n$ СКС ортогональны и средняя амплитуда поля $\langle\hat{a}(0)\rangle$ в начальный момент времени равна нулю. В силу этого и выбранных начальных условий все начальные значения средних, входящих в систему уравнений (25), а также неоднородные члены в этой системе обращаются в нуль. Следовательно, при $\phi = \pi n$ решение системы (25) нулевое. При $\phi \neq \pi n$ появляется ненулевая средняя амплитуда начального состояния поля, а также ненулевые неоднородные члены $\langle\psi_+|\psi_-\rangle$

в (25), причиной возникновения которых является квантовая интерференция когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$, образующих исходное суперпозиционное состояние поля. При $\phi = \pi n$ вклады интерференционных членов в среднюю амплитуду поля взаимно гасят друг друга (деструктивная интерференция), а при $\phi = \pi/2$ — взаимно усиливают (конструктивная интерференция). В процессе взаимодействия с атомом исходная полевая квантовая интерференция своеобразным образом проявляется во временной зависимости среднего дипольного момента атома.

Появление интерференционных членов характерно для усреднения по состояниям, не имеющим классического аналога. Классичность когерентного состояния состоит, в частности, в том, что оно не изменяется при уничтожении конечного числа фотонов в нем, так как $\hat{a}^k|\alpha\rangle = \alpha^k|\alpha\rangle$. СКС проявляет как сугубо квантовые свойства, так и свойства, сближающие его с когерентным состоянием. В самом деле, уничтожение одного фотона переводит СКС в новое состояние, средняя амплитуда поля в котором с точностью до малой поправки противоположна по знаку средней напряженности в исходном состоянии, т. е. в процессе взаимодействия с атомом фаза поля спонтанно меняется на π. С другой стороны, когерентное состояние $|\alpha\rangle$ и состояние $|\alpha_\pm\rangle$ удовлетворяют уравнению $\hat{a}^2|\xi\rangle = \alpha^2|\xi\rangle$. Эти две черты СКС в совокупности и определяют характер динамики атомных средних.

Все сказанное выше об особенностях СКС ярко иллюстрируется видом функции квазивероятности Глаубера состояния $|\alpha_+\rangle$ (6). В сравнении с другими функциями квазивероятности знание P-функции начального состояния поля $P(\beta, 0)$ представляет особый интерес для исследования динамики взаимодействия атома с квантованным полем: с учетом нормально-упорядоченного характера гейзенберговских уравнений (21) их решение при произвольном начальном состоянии полевой моды получается усреднением с P-функцией начального состояния поля $P(\beta, 0)$ решения, полученного при начальном когерентном состоянии $|\beta\rangle$ [21]:

$$\langle\hat{\sigma}_\mu(t)\rangle = \int d^2\beta P(\beta, 0)\langle\beta|\hat{\bar{\sigma}}_\mu(t)|\beta\rangle, \quad \mu = \pm, z, \tag{34}$$

где

$$\hat{\bar{\sigma}}_\mu(t) = \mathrm{Sp}_A\left(\rho_A(0)\langle\{0\}|\hat{\sigma}_\mu(t)|\{0\}\rangle\right).$$

Используя известные атомарные средние $\langle\beta|\hat{\bar{\sigma}}_\mu(t)|\beta\rangle$ при начальном когерентном полевом состоянии (см., например, [12]), представляется возможным найти эволюцию атомарных средних при любых начальных значениях поля. Для атома, первоначально находящегося в основном состоянии,

$$\langle\beta|\hat{\bar{\sigma}}_-(t)|\beta\rangle = \beta g^*\left(\tilde{s}_1 e^{\tilde{p}_1 t} + \tilde{s}_2 e^{\tilde{p}_2 t} + \tilde{s}_0\right), \tag{35}$$

где

$$\tilde{p}_{1,2} = -3\Gamma/2 \pm i\sqrt{4|\beta g|^2 - \Gamma^2/4}, \quad \tilde{s}_{1,2} = \left(1 + 2\Gamma/\tilde{p}_{1,2}\right) / \left(\tilde{p}_{1,2}^2 - \tilde{p}_1\tilde{p}_2\right), \quad \tilde{s}_0 = \Gamma / \left(\Gamma^2 + 2|\beta g|^2\right).$$

При усреднении (35) с P-функцией (6) в точности получается выражение (31). При этом ясно видно, что динамическая неустойчивость дипольного момента появляется за счет интерференционной части P-функции (6), действие которой на аналитическую функцию комплексной переменной $\beta = |\beta|e^{i\varphi_\beta}$, как уже отмечалось, сводится к замене

$$|\beta| \to \pm i|\alpha|, \quad \varphi_\beta \to \varphi_\alpha + \pi/2,$$

т. е. вещественный модуль амплитуды поля становится чисто мнимым, а фаза возрастает на 90°.

Проведенное выше рассмотрение, демонстрирующее связь неустойчивости дипольного момента атома с квантовой интерференцией в исходном состоянии поля, может быть дополнено интерпретацией, апеллирующей к квантовой динамике полевого и атомного состояний. Рассмотрим эволюцию редуцированного оператора плотности $\hat{\pi}(t)$ системы «атом + резонансная мода», усредненного по вакуумным состояниям остальных мод резервуара. В качестве начального состояния резонансной моды выберем когерентное состояние $|\beta\rangle$. Для большей наглядности пренебрежем спонтанным распадом атома ($\Gamma = 0$). Легко показать, что в этом случае $\hat{\pi}(t)$ имеет вид диадного произведения чистых состояний:

$$\hat{\pi}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|, \tag{36}$$

где

$$|\Psi(t)\rangle = \left[\cos\left(|\beta g^*|t\right)|1\rangle + i\sin\left(|\beta g^*|t\right)|2\rangle\right]|\beta\rangle \equiv |\theta(\beta,t)\rangle|\beta\rangle. \tag{37}$$

Очевидно, что оператор плотности (36) факторизуется в виде произведения операторов плотности атома и поля, причем состояние поля остается когерентным с течением времени. Иными словами, состояния атома и поля независимы. Допустим теперь, что начальным состоянием резонансной моды является суперпозиция когерентных состояний (9). Обозначим искомый оператор плотности через $\hat{\pi}^*(t)$. Его можно получить интегрированием выражения (36) с функцией Глаубера–Сударшана (6) (ср. с (34)). После интегрирования получим

$$\begin{aligned}\hat{\pi}^*(t) = A\big(&|\alpha\rangle|\theta(\alpha,t)\rangle\langle\theta(\alpha,t)|\langle\alpha| + |-\alpha\rangle|\theta(\alpha,t)\rangle\langle\theta(\alpha,t)|\langle-\alpha| + \\ &+ |-\alpha\rangle|\tilde{\theta}_+(\alpha,t)\rangle\langle\tilde{\theta}_-(\alpha,t)|\langle\alpha|e^{i\phi} + |\alpha\rangle|\tilde{\theta}_-(\alpha,t)\rangle\langle\tilde{\theta}_+(\alpha,t)|\langle-\alpha|e^{-i\phi}\big),\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$|\tilde{\theta}_\pm(\alpha,t)\rangle = \operatorname{ch}\left(|\alpha g^*|t\right)|1\rangle \pm \operatorname{sh}\left(|\alpha g^*|t\right)|2\rangle.$$

В данном случае, так же, как и для когерентного состояния, полевое состояние не изменяется со временем, так как

$$\operatorname{Sp}_A\left(\hat{\pi}^*(t)\right) = |\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|.$$

Однако оператор плотности уже нельзя факторизовать — состояния атома и поля становятся коррелированными. В самом деле, на основании (38) легко показать, что атому в основном состоянии соответствует полевое состояние

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_F(t)\big|_{|1\rangle\langle 1|} = A\big(&\cos^2\left(|\alpha g^*|t\right)\left(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|\right) + \\ &+ \operatorname{ch}^2\left(|\alpha g^*|t\right)\left(|-\alpha\rangle\langle\alpha|e^{i\phi} + |\alpha\rangle\langle-\alpha|e^{-i\phi}\right),\end{aligned} \tag{39}$$

а возбужденному атому — состояние

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_F(t)\big|_{|2\rangle\langle 2|} = A\big(&\sin^2\left(|\alpha g^*|t\right)\left(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|\right) - \\ &- \operatorname{sh}^2\left(|\alpha g^*|t\right)\left(|-\alpha\rangle\langle\alpha|e^{i\phi} + |\alpha\rangle\langle-\alpha|e^{-i\phi}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

Таким образом, это приближенное рассмотрение наглядно демонстрирует, что при взаимодействии атома с суперпозиционным полем независимые в начальный момент состояния атома и поля становятся «перепутанными». Аналогичная «перепутанность», или entanglement, имеет место и при взаимодействии двухуровневого атома с полем в резонаторе (модель Джейнса–Каммингса). Изучение временной эволюции функции Вигнера в основном и возбужденном атомных состояниях показало существование сильной корреляции между полем и атомом для такой квантовой системы. Фазы характерной интерференционной структуры у функций Вигнера основного и возбужденного состояний противоположны, т. е. поле в процессе эволюции отслеживает состояние атома, причем полю в состоянии $|\alpha_+\rangle$ соответствует атом в основном состоянии, а полю в состоянии $|\alpha_-\rangle$ — возбужденный атом. Возникающая квантовая положительная обратная связь и приводит к неустойчивости среднего дипольного момента.

Эффект экспоненциального роста среднего дипольного момента должен наблюдаться экспериментально во временной зависимости когерентной компоненты рассеянного света, которая, как известно (см., например, [9]), пропорциональна квадрату модуля матричного элемента среднего дипольного момента. Однако наличие фактора $\exp(-2|\alpha|^2)$, который «уничтожает» интерференционную часть, а также ограниченность временных рамок применимости модели делают возможность наблюдения эффекта в резонансной флуоресценции проблематичной. Так, на основе формулы (35) легко оценить время t, за которое матричный элемент среднего дипольного момента начнет принимать измеримые значения. Это время оказывается лежащим в интервале $T_R < t < 2T_R$ за пределами применимости полученных в работе результатов. Экспоненциально малый фактор можно было бы попытаться скомпенсировать, используя ансамбль атомов. Однако для этого требуется детально рассмотреть проблему коллективного рассеяния с учетом индуцируемых полем межатомных корреляций и геометрического фактора. Один из путей обойти трудности с наблюдением эффекта в свободном пространстве лежит в использовании пока еще не созданного непрерывного источника суперпозиционного света[2)], аналогичного лазерному источнику. Второй путь основывается на том, что на начальной стадии внутрирезонаторных взаимодействий, когда обратное влияние испущенного поля, равно как и затухание поля в резонаторе, достаточно малы, динамика атома подобна динамике резонансной флуоресценции в свободном пространстве. Поэтому предсказанный эффект квантовой неустойчивости можно наблюдать и для одиночного атома, взаимодействующего с резонаторной модой, приготовленной в СКС, например методом, предложенным в [19]. Имеющиеся экспериментальные возможности позволяют провести проверку эффекта как в микроволновой [25, 26] так и в оптической [27] областях. В резонаторах микроволновой области достигнуты следующие значения параметров [25, 26], константа связи атом–поле $g = 2\pi \times 17$ кГц, скорость затухания резонатора $k = 2\pi \times 6.7$ кГц, скорость спонтанного распада $\Gamma = 2\pi \times 5$ кГц. При этих значениях параметров для амплитуды СКС $\alpha = 3$ и времени взаимодействия $gt_{INT} = 2\pi \times 0.3$ дипольный момент должен экспоненциально возрастать до величины $0.26 \cdot 10^{-6}$ вместо полного периода осцилляций Раби в случае когерентного начального состояния поля с той же амплитудой. В оптическом резонаторе [27], где значения соответствующих параметров равны $g = 2\pi \times 7.2$ МГц, $k = 2\pi \times 0.7$ МГц, $\Gamma = 2\pi \times 2.5$ МГц, $\alpha = 3$, $gt_{INT} = 2\pi \times 0.3$, дипольный момент экспоненциально возрастает до величины

[2)] Существующие схемы генерации позволяют получать в лучшем случае пульсирующие источники (см., например, [17]) макроскопических квантовых суперпозиций когерентных состояний.

$1.2 \cdot 10^{-4}$ вместо полного периода осцилляций Раби.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена задача о взаимодействии одиночного двухуровневого атома с резервуаром, имеющим эквидистантный спектр, резонансная мода которого в начальный момент возбуждена в суперпозиционное когерентное состояние, а остальные моды находятся в вакуумном состоянии. Определена эволюция средних атомных переменных методом уравнений Гейзенберга и методом усреднения решения, найденного для когерентного начального состояния, с рассчитанной в работе функцией квазивероятности Глаубера суперпозиционного начального состояния. Динамика атома при возбуждении суперпозицией двух когерентных полей существенно отличается от случая возбуждения когерентным полем. Отличия обусловлены квантовой интерференцией амплитуд вероятности нахождения поля в состояниях $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$, причем эволюция среднего дипольного момента целиком определяется этой величиной (математически это выражается в наличии у P-функционала Глаубера соответствующих интерференционных слагаемых, которые и определяют эволюцию дипольного момента). Характер квантовой интерференции зависит от сдвига фаз ϕ между когерентными состояниями. При сдвигах фаз $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ средний дипольный момент не возбуждается, поскольку вклады интерференционных членов взаимно гасят друг друга, а при $\phi = \pi/2$ средний дипольный момент максимален вследствие взаимного усиления интерференционных вкладов. Главный результат интерференции состоит в том, что при значениях частоты Раби $|\alpha g| > \Gamma/\sqrt{2}$ средний дипольный момент становится неустойчивым. Физической причиной квантовой неустойчивости является сильная корреляция между атомом и полем в процессе взаимодействия, приводящая к возникновению положительной обратной связи в квантовой системе.

Для экспериментального наблюдения эффекта предложено использовать микроволновый или оптический резонатор, в котором с помощью известных методов создается состояние поля в виде суперпозиции когерентных полей. Средний дипольный момент атома, помещенного в такой резонатор, должен экспоненциально возрастать за время взаимодействия вместо полного периода осцилляций Раби в случае начального когерентного состояния.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Беларуси (гранты № Ф18-203 и МП96-38) и Международной соросовской программы образования в области точных наук. В. Н. Ш. признателен А. П. Низовцеву, Т. М. Маевской и Д. С. Могилевцеву за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция Глаубера $P(\beta)$ произвольного полевого состояния определяется как двумерное преобразование Фурье нормально упорядоченной характеристической функции $\chi_N(\lambda) = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\exp(\lambda\hat{a}^+)\exp(-\lambda^*\hat{a}))$ [1]:

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\lambda\chi_N(\lambda)\exp(\lambda^*\beta - \lambda\beta^*). \tag{П.1}$$

Если полевая мода находится в чистом состоянии $|\chi\rangle$, определяемом формулой (2), то характеристическая функция состоит из четырех слагаемых, два из которых с точностью до нормировочной постоянной совпадают с характеристическими функциями когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$, а два других соответствуют интерференционным членам:

$$\chi_N^{coh}(\lambda) = N^{-1}\left[\exp(\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha) + \exp(-\lambda\alpha^* + \lambda^*\alpha)\right], \tag{П.2}$$

$$\chi_N^{int}(\lambda) = N^{-1}\left[\exp(-\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha - 2|\alpha|^2 - i\phi) + \exp(\lambda\alpha^* + \lambda^*\alpha - 2|\alpha|^2 + i\phi)\right]. \tag{П.3}$$

Полная функция квазивероятности равна

$$P(\beta) = P_{coh}(\beta) + P_{int}(\beta). \tag{П.4}$$

Фурье-преобразование $\chi_N^{coh}(\lambda)$ дает когерентную часть квазивероятности, состоящую из суммы двух дельта-функций, имеющих сингулярности в точках $\beta = \alpha$ и $\beta = -\alpha$:

$$P_{coh}(\beta) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\lambda \chi_N^{coh}(\lambda)\exp(\lambda^*\beta - \lambda\beta^*) = N_+^{-1}\left(\delta(\beta-\alpha) + \delta(\beta+\alpha)\right). \tag{П.5}$$

Для того чтобы вычислить интерференционную часть P-функции, воспользуемся интегральным представлением функций Бесселя целого порядка [28]

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt\, \exp\left(i(kt - z\sin t)\right), \tag{П.6}$$

а также выражением для производящей функции модифицированных функций Бесселя

$$\exp(z\cos t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(z)\exp(ikt). \tag{П.7}$$

Учитывая (П.6) и (П.7), получим для фурье-образа $P_{int}(\beta)$ функции $\chi_N^{int}(\lambda)$ выражение

$$P_{int}(\beta) = 2(N_+\pi)^{-1}e^{-2|\alpha|^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(ik(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)\right)\int\limits_0^{\infty}|\lambda|d|\lambda|\left(I_k\left(2|\lambda||\alpha|\right)J_k\left(2|\lambda||\beta|\right)\times\right.$$
$$\left.\times\exp(i\phi) + I_k\left(-2|\lambda||\alpha|\right)J_k\left(2|\lambda||\beta|\right)\exp(-i\phi)\right). \tag{П.8}$$

Воспользовавшись тождеством, связывающим функции Бесселя вещественного и мнимого аргументов и получаемым из разложений этих функций в степенные ряды:

$$\exp\left(\pm iy\frac{\partial}{\partial x}\right)J_k(x)\bigg|_{x=0} = (\pm i)^k I_k(y), \tag{П.9}$$

а также представлением δ-функции, вытекающим из формулы Фурье–Бесселя [1]:

$$\delta(x-y) = \int\limits_0^{\infty} sxJ_k(sx)J_k(sy)ds, \tag{П.10}$$

получим следующую формулу для $P_{int}(\beta)$:

$$P_{int}(\beta) = (N\pi)^{-1} \exp\left(-2|\alpha|^2\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k \exp\left(ik(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)\right) \left[\exp\left(i\phi - i|\alpha|\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\delta\left(|\beta| - x\right)}{|\beta|} + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-i\phi + i|\alpha|\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\delta\left(|\beta| - x\right)}{|\beta|}\right]\Bigg|_{x=0} = N^{-1} \exp\left(-2|\alpha|^2\right) \delta(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \pi/2) \times$$

$$\times \left[\exp\left(i\phi - i|\alpha|\frac{\partial}{\partial x}\right) + \exp\left(-i\phi + i|\alpha|\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \frac{\delta\left(|\beta| - x\right)}{|\beta|}\Bigg|_{x=0} =$$

$$= N^{-1} \left(\frac{\exp\left(-2|\alpha|^2\right)}{|\beta|}\right) \delta\left(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\exp(i\phi)\delta_{AC}\left(|\beta| - i|\alpha|\right) + \right.$$

$$\left. + \exp(-i\phi)\delta_{AC}\left(|\beta| + i|\alpha|\right)\right). \qquad (\text{П}.11)$$

Литература

1. С. Я. Килин, *Квантовая оптика. Поля и их детектирование*, Навука і тэхніка, Минск (1990).
2. V. Bužek and P. L. Knight, in *Progress in optics*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam (1995), Vol. XXXIV.
3. B. R. Mollow, in *Progress in optics*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam (1981), Vol. XIX.
4. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
5. H. J. Carmichael, A. S. Lane, and D. F. Walls, J. Mod. Opt. **34**, 2539 (1987).
6. S. Smart and S. Swain, Phys. Rev. A **48**, R50 (1993).
7. S. Swain, Phys. Rev. Lett. **73**, 1493 (1994).
8. I. E. Lyublinskaya and R. Vyas, Phys. Rev. A **48**, 3966 (1993).
9. B. R. Mollow, Phys. Rev. **188**, 1969 (1969).
10. H. J. Carmichael and D. F. Walls, J. Phys. B **9**, 1199 (1976).
11. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986), гл. 10.
12. С. Я. Килин, Препринт № 152 Института физики АНБ, Минск (1978).
13. П. А. Апанасевич, С. Я. Килин, ЖПС **24**, 738 (1976); Phys. Lett. A **62**, 83 (1977).
14. G. S. Agarwal, *Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches*, Springer, Berlin (1974).
15. B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).
16. T. Ogawa, M. Ueda, and N. Imoto, Phys. Rev. A **43**, 6458 (1991).
17. J. J. Slosser and G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett. **75**, 418 (1995).
18. S. Ya. Kilin and D. S. Mogilevtsev, Phys. Lett. A **198**, 85 (1995).
19. M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernadot, A. Maali, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **72**, 3339 (1994).
20. V. Buzek, A. Vidiella Barranco, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **45**, 6570 (1992).
21. S. Ya. Kilin and V. N. Shatokhin, Phys. Rev. Lett. **76**, 1051 (1996).
22. J. Jansky and A. V. Vinogradov, Phys. Rev. Lett. **64**, 2771 (1990).
23. Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, ОГИЗ, Москва–Ленинград (1948).
24. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **22**, 226 (1981).
25. G. Raithel, C. Wagner, H. Walther, L. M. Narducci, and M. O. Scully, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Suppl. 2, ed. by P. Berman, Academic Press, N. Y. (1994), p. 57.
26. S. Haroche and J. M. Raimond, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Suppl. 2, ed. by P. Berman, Academic Press, N. Y. (1994), p. 122.
27. J. Kimble, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Suppl. 2, ed. by P. Berman, Academic Press, N. Y. (1994), p. 203.
28. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979), гл. 9.