

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭНЕРГИЯ ВИХРЯ АБРИКОСОВА В АНИЗОТРОПНОМ ЛОНДОНОВСКОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

И. М. Дубровский

Институт металлофизики Национальной академии наук Украины
252142, Киев, Украина

Поступила в редакцию 5 февраля 1996 г.

Для прямолинейного вихря Абрикосова в анизотропном одноосном лондоновском сверхпроводнике получены аналитические выражения, приближенно описывающие магнитное поле в трех областях: асимптотической, где расстояние от линии вихря $r > \lambda\Gamma$ (λ — лондоновская длина, Γ — константа анизотропии), промежуточной $\lambda < r < \lambda\Gamma$ и области $r < \lambda$. Показано, что в части промежуточной области при достаточно большой анизотропии в некотором интервале углов между линией вихря и осью анизотропии компонента поля вдоль линии вихря изменяет знак. Вследствие этого энергия взаимодействия параллельных вихрей, плоскость которых параллельна оси анизотропии, имеет минимум и максимум. Это приводит к возможности существования множества метастабильных решеток вихрей. Получены дополнительные члены в собственной энергии вихря, которые хотя и меньше основного логарифмического члена, но имеют другую зависимость от угла между линией вихря и осью анизотропии.

1. Магнитное поле прямолинейного вихря Абрикосова в анизотропном сверхпроводнике при больших значениях параметра Гинзбурга–Ландау κ рассматривалось в работах [1–4]. Уравнение, описывающее магнитное поле $\mathbf{h}(\mathbf{R})$, можно вывести из теории Гинзбурга–Ландау (см. [3, 5]):

$$\mathbf{h} + \text{rot}(\hat{\mu} \text{rot} \mathbf{h}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \Delta(\mathbf{R})\mathbf{v}. \quad (1)$$

Далее мы ограничимся случаем одноосной анизотропии, когда эффективная масса в направлении оси больше, чем в перпендикулярной плоскости. Тогда в главных осях тензор $\hat{\mu}$ имеет компоненты

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 1, \quad \mu_{33} = \Gamma^2 > 1, \quad (2)$$

Φ_0 — квант магнитного потока, \mathbf{v} — единичный вектор в направлении линии вихря Абрикосова, $(\mathbf{h}(0)\mathbf{v}) > 0$, λ — глубина проникновения магнитного поля, параллельного оси анизотропии, \mathbf{R} — двумерный радиус-вектор в плоскости перпендикулярной \mathbf{v} , отсчитанный от точки пересечения ее с осью вихря Абрикосова в единицах λ . Полярные координаты в этой плоскости будем обозначать (R, φ) , а угол между осью анизотропии и линией вихря Абрикосова, отсчитываемый от оси \mathbf{v} в направлении \mathbf{v} , обозначим θ . Относительно функции $\Delta(\mathbf{R})$ известно, что при $R > R_0 = \eta(\varphi, \theta)\kappa^{-1}$ она пренебрежимо мала и

$$\int_S \Delta(\mathbf{R})d\mathbf{R} = 2\pi. \quad (3)$$

$\eta(\varphi, \theta)$ — функция, значения которой мало отличаются от единицы, S — вся плоскость, перпендикулярная \mathbf{v} . В [1–4] $\Delta(\mathbf{R})$ заменяют на $2\pi\delta(\mathbf{R})$, где $\delta(\mathbf{R})$ — дельта-функция на плоскости, т. е. фактически находят вместо $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ функцию Грина уравнения (1) $\mathbf{g}(\mathbf{R})$. (Точнее $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ — один из трех векторов, составляющих тензор Грина уравнения (1).) Трансформанта Фурье функции $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ была получена в [2, 6], а $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ была исследована в [3] путем численного интегрирования и асимптотического разложения обратного преобразования Фурье. В настоящей работе будут получены аналитические выражения для $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ в областях $R \ll 1$ и $1 \ll R \ll \Gamma\sqrt{1 - \sin^2\theta(1 - \Gamma^{-2})}$, а также уточнено асимптотическое выражение для $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ при $R \gg \Gamma$. При получении этих результатов неоднократно будут использованы формулы из [7, 8]. На самом деле

$$\mathbf{h}(\mathbf{R}_1) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{g}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \Delta(\mathbf{R}_2) d\mathbf{R}_2. \quad (4)$$

Далее будет показано, что при $R < 1$ усреднение (4) может быть существенно в случае анизотропного сверхпроводника. С учетом (4) будет также уточнено выражение для энергии вихря Абрикосова, полученное в [6].

2. Разложим $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ по направлениям осей декартовой системы координат с осью 3, направленной по \mathbf{v} , осью 1, перпендикулярной оси анизотропии и осью 2, направленной так, чтобы $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Будем рассматривать компоненты как функции полярных координат (R, φ) в плоскости, перпендикулярной \mathbf{v} . Тогда $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ могут быть представлены в виде рядов Фурье

$$g_1(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n}(R) \sin 2n\varphi, \quad g_2(\mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}(R) \cos 2n\varphi, \quad (5)$$

$$g_3(\mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{3n}(R) \cos 2n\varphi.$$

Далее будет показано, что остальные амплитуды Фурье равны нулю. Рассмотрим подробнее вычисление $g_3(\mathbf{R})$. Интегральная формула для этой функции, полученная в [2, 6], может быть путем тождественных преобразований представлена в виде

$$g_3(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{(2\pi\lambda)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp[iqR \cos(\varphi - \psi)] \left[\left(\frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi} - \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{q^2 + \Gamma^{-2}(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi)^{-1}} + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi} \frac{1}{q^2 + 1} \right] q dq d\psi. \quad (6)$$

Здесь (q, ψ) — полярные координаты двумерного вектора \mathbf{q} ,

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \theta (1 - \Gamma^{-2}), \quad 0 \leq \gamma \leq \theta \leq \pi/2, \quad (7)$$

причем равенство $\gamma = \theta$ возможно только при $\theta = 0$. Воспользовавшись формулой (8.511.4) из [7]

$$\exp(iz \cos \alpha) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos n\alpha, \quad (8)$$

получим выражения для амплитуд Фурье:

$$g_{3n} = \frac{\Phi_0}{(2\pi\lambda)^2} (2 - \delta_{n,0}) \int_0^{2\pi} \cos 2n\psi \left[\left(\frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi} - \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi} \right) \times \right. \\ \left. \times G_n \left(\frac{R}{\Gamma(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi)^{1/2}} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi} G_n(R) \right] d\psi. \quad (9)$$

Здесь

$$G_n(aR) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{J_{2n}(qR)q dq}{q^2 + a^2} = (-1)^n \int_0^\infty \frac{J_{2n}(z)z dz}{z^2 + a^2 R^2}. \quad (10)$$

Вычисление этих интегралов приведено в Приложении. Окончательно

$$G_n(aR) = K_{2n}(aR) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(2n - m - 1)! 2^{2n-2m}}{m! (aR)^{2n-2m}}, \quad (11)$$

$$G_0(aR) = K_0(aR),$$

т. е. $G_n(aR)$ при $n \neq 0$ равен соответствующей функции Макдональда $K_{2n}(aR)$ за вычетом тех членов представления ее в виде ряда (см. (8.446) из [7]), которые расходятся при $R = 0$. Из формул (6)–(9) видно, что так как в подынтегральной функции множитель при $\cos n\psi(\sin n\psi)$ — функция только от $\sin^2 \psi$, сохраняются только члены ряда Фурье, пропорциональные $\cos 2n\varphi$. Поскольку

$$\sin^{2m} \psi = \sum_{k=0}^m S_k \cos [2(m - k)\psi] \quad (12)$$

(см. (1.320.1) из [7]) и $\sin^2 \psi$ входит в подынтегральное выражение только с коэффициентами $\sin^2 \theta$ или $\sin^2 \gamma$, разложение амплитуды g_{3n} в ряд по $\sin^2 \theta$ начинается со степени $2n$. Это обуславливает хорошую сходимость ряда Фурье.

Рассмотрим асимптотику $g_{3n}(R)$ при $R \gg \Gamma$ ($n \neq 0$). С помощью тождества

$$\Gamma^2(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi) \equiv (\Gamma^2 - 1)(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi) + 1 \quad (13)$$

легко показать, что все члены асимптотического разложения подынтегрального выражения в (9), обусловленные суммой в (11), пропорциональны $\sin^2 \psi$ в степени не выше, чем $(n - 1)$, и потому при интегрировании по ψ обращаются в нуль. Главный член асимптотического разложения функции Макдональда не зависит от ее индекса. Тогда из (5), (9), (11) и известного определения коэффициентов ряда Фурье следует

$$g_{3n}(R) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left\{ \left(\frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \right) \Gamma^{1/2} (1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi)^{1/4} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{R}{\Gamma} (1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi)^{-1/2} \right] + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \exp(-R) \right\}. \quad (14)$$

Сопоставим (14) с соответствующими формулами (15)–(19) работы [3]. Вид зависимости $g_{3n}(R)$ от R в обоих случаях — экспоненциальное убывание с предэкспонентой, пропорциональной $R^{-1/2}$. Множитель, зависящий от угла φ в показателе экспоненты первого

слагаемого, также совпадает с точностью до первого порядка по $\sin^2 \gamma$. Частично совпадает и множитель перед второй экспонентой, но в настоящей работе он оказывается универсальным для всех углов φ и θ , а в [3] в некоторых секторах он существенно отличается, имеет даже другую зависимость от R . Наиболее существенно отличие в коэффициенте при первой экспоненте. В частности, в формуле (14) настоящей работы он всегда неотрицателен, что легко показать, учитывая (7). Вообще, из (14) видно, что $g_3(\mathbf{R})$ при $R \gg \Gamma$ всегда положительно, т.е. эффект инверсии, обнаруженный в [3], в асимптотической области не подтверждается. Существование инверсии в этой области в [3] основано на допущении, что второй член асимптотического разложения больше по модулю, чем первый (см. формулы (15) и (20) в [3]). Из (11) следует, что функции $G_n(aR)$ могут иметь нули, обусловленные суммой, но, как было показано, при $R \gg \Gamma$ вклад суммы из (11) в $g_{3n}(R)$ обращается в нуль и существенна только асимптотика функций Макдональда, которые всегда положительны.

Инверсия $g_3(\mathbf{R})$ была обнаружена в [3] и при численных расчетах в промежуточной области значений R . Из (9) следует, что это может произойти, если первое и второе слагаемые подынтегральной функции имеют различные знаки. Рассмотрим область

$$1 \ll R \ll \Gamma \cos \gamma. \quad (15)$$

Тогда из (11) можно приближенно представить

$$G_n \left(\frac{R}{\Gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi}} \right) \approx \frac{(-1)^n}{2n}, \quad G_n(R) \approx (-1)^n \frac{2n}{R^2},$$

$$G_0 \left(\frac{R}{\Gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi}} \right) \approx -\ln \frac{R}{2\Gamma} - C + \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi),$$

$$G_0(R) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \exp(-R), \quad (16)$$

где C — постоянная Эйлера. Подставляя (16) в (9), вычисляя интегралы по формулам (3.615.1), (4.399.3) из [7] и суммируя ряды с помощью формул (5.4.9.6), (5.4.9.13) из [8], получим

$$g_3(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ (\cos \gamma - \cos \theta) \left(-\ln \frac{R}{2\Gamma} - C \right) + \cos \theta \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \exp(-R) - \right.$$

$$- \cos \gamma \ln \left[\frac{1 + \cos \gamma}{2 \cos \gamma} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \right] +$$

$$+ \cos \theta \ln \left[\frac{1 + \cos \theta}{\cos \gamma + \cos \theta} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right] +$$

$$\left. + \frac{4 \cos \theta}{R^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \frac{(\operatorname{tg}^4(\theta/2) + 1) \cos 2\varphi - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{(1 - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4(\theta/2))^2} \right\}. \quad (17)$$

Выражение (17) в секторах, где $\cos 2\varphi$ близок к -1 , может быть и отрицательным. Например, при значениях параметров, принятых в [3] при численных расчетах $\Gamma = 8$, $\theta = \pi/6$ в точке $R = 5.2$, $\varphi = \pi/2$, которая соответствует отрицательному минимуму

$g_3(\mathbf{R})$ из формулы (17), $g_3 = -3.3 \cdot 10^{-3} \Phi_0 / 2\pi \lambda^2$. (В обозначениях, принятых в настоящей работе, при $\Gamma = 8$ значение λ в два раза меньше, чем λ из [3].) Отличие от указанного в [3] на рис. 1 θ значения составляет около 10%. Однако, в отличие от результатов работы [3], в настоящей работе области, где $g_3 < 0$, ограничены.

В рассмотренных областях значений R поле $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ мало отличается от $\mathbf{g}(\mathbf{R})$. Действительно, характерное расстояние, на котором $g_{3n}(R)$ существенно изменяется, порядка $1/\lambda$ (в размерных единицах длины). Тогда члены рядов Фурье (5) существенно изменяются на расстояниях $\min(1, R/n)$. Если это расстояние значительно больше κ^{-1} , то интегрирование в (4) не изменит соответствующего слагаемого. Таким образом, на заданном расстоянии R интегрирование изменяет только члены рядов Фурье с $n \geq R\kappa$, а, как показано, эти члены имеют порядок малости $\sin^{2n} \theta$.

При $R < 1$ имеем

$$G_n \left(\frac{R}{\Gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi}} \right) \approx G_n(R) \approx \frac{(-1)^n}{2n},$$

$$G_0 \left(\frac{R}{\Gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi}} \right) \approx -\ln \frac{R}{2\Gamma} + \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi) - C,$$

$$G_0(R) = -\ln \frac{R}{2} - C, \quad (18)$$

и отсюда

$$g_3(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda^2} \left[(\cos \gamma - \cos \theta) \ln \Gamma + \cos \gamma \left(-\ln \frac{R}{2} - C \right) - \cos \gamma \ln \frac{1 + \cos \gamma}{2 \cos \gamma} + \right. \\ \left. + \cos \theta \ln \frac{1 + \cos \theta}{\cos \gamma + \cos \theta} - \frac{1}{2} \cos \gamma \ln \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \right) \right]. \quad (19)$$

Это выражение не только расходится, но и существенно зависит от φ при $R \rightarrow 0$. Эта особенность, естественная для функции Грина, исчезает в $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ при вычислении по формуле (4). Положим в (19)

$$R = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|, \quad \cos 2\varphi = \cos \left[2 \operatorname{arctg} \left(\frac{R_1 \sin \varphi_1 - R_2 \sin \varphi_2}{R_1 \cos \varphi_1 - R_2 \cos \varphi_2} \right) \right]. \quad (20)$$

Учтем, что $\Delta(\mathbf{R}_2)R_2$ имеет острый максимум при $R_2 = R_0$ с шириной порядка κ^{-1} . Тогда интегрирование по R_2 в (4) можно провести в общем виде, вынося медленно изменяющиеся множители при $\Delta(\mathbf{R}_2)R_2$ из-под знака интеграла при $R_2 = R_0$, пренебрегая с той же точностью зависимостью R_0 от φ и используя (3). В результате после интегрирования по φ_2 получим, что аксиально симметричное слагаемое в $h_3(\mathbf{R}_1) = h_3(R_1) + \tilde{h}_3(R_1, \varphi_1)$ при $R_1 \geq \bar{\eta}\kappa^{-1}$ совпадает с аналогичным членом в (19), а при $R_1 < \bar{\eta}\kappa^{-1}$ остается постоянным ($\bar{\eta}$ — коэффициент, мало отличающийся от единицы). Слагаемое в $h_3(\mathbf{R}_1)$, зависящее от φ_1 , имеет вид

$$\tilde{h}_3(R_1, \varphi_1) = \frac{\Phi_0}{2(2\pi\lambda)^2} \cos \gamma \int_0^{2\pi} \ln \left\{ 1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \cos \left[2 \operatorname{arctg} \left(\frac{R_1 \sin \varphi_1 - \bar{\eta}\kappa^{-1} \sin \varphi_2}{R_1 \cos \varphi_1 - \bar{\eta}\kappa^{-1} \cos \varphi_2} \right) \right] \right\} d\varphi_2. \quad (21)$$

При $R_1 = \bar{\eta}\kappa^{-1}$

$$\cos \left[2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} \right) \right] = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (22)$$

Тогда, согласно (2.6.36.9) из [8], $h_3(\bar{\eta}\kappa^{-1}, \varphi_1) \equiv 0$. Аналогично можно показать, что $h_3(0, \varphi_1) \equiv 0$.

Таким образом, формулы (14), (17), (19) и (21) описывают составляющую магнитного поля, параллельную линии вихря Абрикосова в различных областях значений R . Инверсия знака магнитного поля появляется при этом только в промежуточной области значений.

Аналогично можно получить выражения для других составляющих функции Грина. В асимптотической области $R \gg \Gamma$

$$g_1(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{4} (\Gamma^2 - 1) \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left\{ \left[\frac{\Gamma^{1/2}(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi)^{1/4}}{(\Gamma^2 - 1)(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)} - \frac{1}{\Gamma^{3/2}(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi)^{3/4}} \right] \exp \left[-\frac{R}{\Gamma(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right] - \frac{1}{(\Gamma^2 - 1)(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)} \exp(-R) \right\}, \quad (23)$$

$$g_2(\mathbf{R}) = -\frac{2 \cos^2 \varphi}{\sin 2\varphi} g_1(\mathbf{R}). \quad (24)$$

В промежуточной области (15)

$$g_1(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{ctg} \theta \left\{ \frac{4}{R^2} \frac{\cos^{-4}(\theta/2) \cos \theta \sin 2\varphi}{[1 - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4(\theta/2)]^2} + \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\gamma/2) \sin 2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \cos 2\varphi} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\theta/2) \sin 2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2(\theta/2) \cos 2\varphi} \right] \right\}, \quad (25)$$

$$g_2(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \exp(-R) + \left[\frac{\Gamma^2 - 1}{\Gamma^2 \cos^2(\gamma/2)} - \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} \right] \left(\ln \frac{2\Gamma}{R} - C \right) - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \cos^4(\theta/2)} \frac{[1 + \operatorname{tg}^4(\theta/2)] \cos 2\varphi - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{[1 - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4(\theta/2)]^2} + \frac{2 \cos \gamma}{\sin^2 \theta} \ln \left[\frac{1 + \cos \gamma}{2 \cos \gamma} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4 \frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \right] - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \ln \left[\frac{1 + \cos \theta}{\cos \gamma + \cos \theta} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (26)$$

Может показаться, что эти выражения неверны, поскольку они не обращаются в нуль при $\Gamma \rightarrow 1$. В этом случае, однако, исчезает промежуточная область, определяемая неравенствами (15).

При $R \ll 1$

$$g_1(\mathbf{R}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\gamma/2) \sin 2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \cos 2\varphi} \right]. \quad (27)$$

Зависимость $g_1(\mathbf{R})$ от R появляется при учете высших приближений по R . Функция $g_2(\mathbf{R})$ так же, как и $g_3(\mathbf{R})$, имеет при $R = 0$ логарифмическую особенность:

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{R}) = & \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{(\Gamma^2 - 1) \sin 2\theta}{2} \left\{ \frac{\ln(2/R) - C}{2\Gamma^2 \cos^2(\gamma/2)} + \right. \\ & + \frac{\ln \Gamma}{2} \left[\frac{1}{\Gamma^2 \cos^2(\gamma/2)} - \frac{1}{(\Gamma^2 - 1) \cos^2(\theta/2)} \right] + \\ & + \frac{1}{(\Gamma^2 - 1) \sin^2 \theta} \left[\cos \gamma \ln \frac{1 + \cos \gamma}{2 \cos \gamma} - \cos \theta \ln \frac{1 + \cos \theta}{\cos \gamma + \cos \theta} \right] + \\ & \left. + \frac{\cos \gamma}{2(\Gamma^2 - 1) \sin^2 \theta} \ln [1 - 2 \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4(\gamma/2)] \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

Это означает, что даже в центре вихря $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ не параллельны \mathbf{v} .

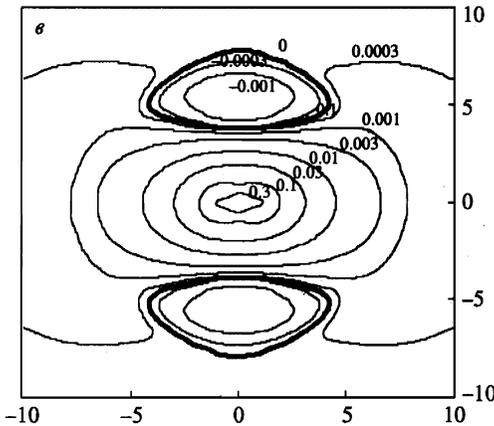
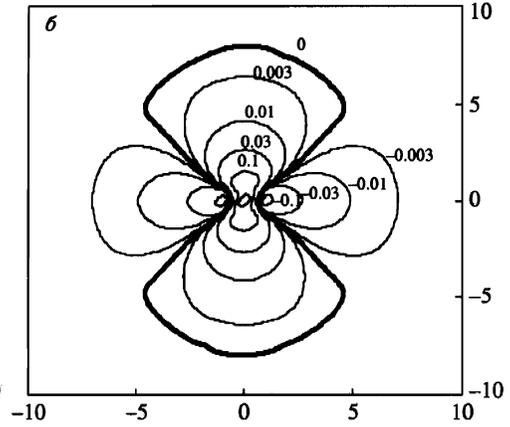
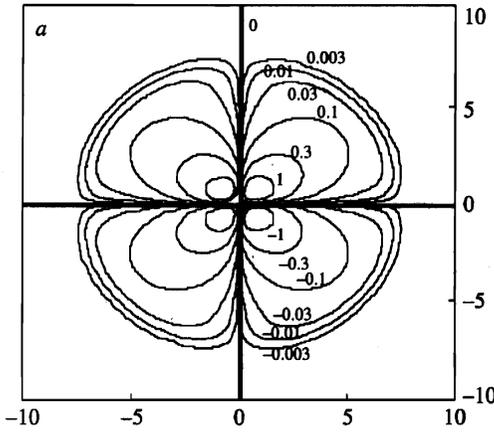
На рисунке изображены линии уровня трех компонент функции $\mathbf{g}_s(\mathbf{R})$, образованной путем сшивания полученных выше асимптотических выражений для $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ при значениях параметров $\Gamma = 8$, $\theta = \pi/6$. Сшивание проводилось путем включения одного выражения и выключения другого с помощью коэффициентов, изменяющихся от нуля до единицы в переходных областях $0.5 \leq R \leq 1$ и $6 \leq R \leq 8$. Поэтому рисунок качественно, а в областях применимости асимптотических формул и количественно, представляет вид функции $\mathbf{g}(\mathbf{R})$. Его можно сопоставить с соответствующим рисунком работы [3], полученным путем численного интегрирования обратного преобразования Фурье при тех же значениях параметров. Единица длины при этом в настоящей работе в два раза меньше. Вид функции $g_1(\mathbf{R})$ (рис. а) в обеих работах одинаков. Функция $g_2(\mathbf{R})$ на рис. б также качественно соответствует g_2 из [3] в той области, которая там представлена. Положение отрицательного минимума на оси абсцисс не может быть при принятых значениях параметров точно получено из асимптотических формул. Однако эта область недостаточно представляет вид функции $g_2(\mathbf{R})$. Из (23) и (24), а также из соответствующей асимптотической формулы в [3], следует, что $g_2(\mathbf{R}) \leq 0$ при $R \gg \Gamma$, причем равенство нулю достигается на оси ординат, так как $g_2(\mathbf{R})$ пропорциональна $\cos^2 \varphi$. Поэтому линия нулевого уровня должна замыкаться на оси ординат, как показано на рис. б настоящей работы, и далее продолжаться вдоль этой оси. На рис. в показано, что область отрицательных значений $g_3(\mathbf{R})$ ограничена, в отличие от соответствующего рисунка из [3].

3. Главный вклад в энергию одиночного вихря дает энергия магнитного поля и кинетическая энергия сверхпроводящих токов [3]

$$E = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_S [|\mathbf{h}|^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{h} \hat{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{h})] d\mathbf{R}. \quad (29)$$

Здесь E — плотность энергии на единицу длины вихря Абрикосова. Интегрируя второе слагаемое по частям и подставив (1) и (4), получим

$$E = \frac{\Phi_0}{32\pi^3} \iint_S \Delta(\mathbf{R}_1) g_3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \Delta(\mathbf{R}_2) d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2. \quad (30)$$



Линии уровня компонент функции $g_s(\mathbf{R})$, нормированной на $\Phi_0/\pi\lambda^2$, на плоскости, перпендикулярной оси вихря Абрикосова. $a - g_{s1}(\mathbf{R})$, $b - g_{s2}(\mathbf{R})$, $\sigma - g_{s3}(\mathbf{R})$. Жирная линия разделяет области положительных и отрицательных значений

Обрезание в \mathbf{q} -пространстве, примененное для вычисления энергии в [6], соответствует замене одной из функций $\Delta(\mathbf{R})$ на $2\pi\delta(\mathbf{R})$, а другой на

$$\Delta(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\kappa \int_0^{2\pi} \exp[iqR \cos(\varphi - \psi)] q dq d\psi = \frac{\kappa J_1(\kappa R)}{R}. \quad (31)$$

Вместо этого учтем, что, как уже указывалось выше, $R\Delta(R)$ имеет острый максимум при $R = R_0 \approx \bar{\eta}\kappa^{-1}$. Тогда в (30) можно в $g_3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ положить $R_1 = R_2 = \bar{\eta}\kappa^{-1}$ и, используя (3), (19) и (20), получим

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Phi_0}{32\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_3(\bar{\eta}\kappa^{-1}, \varphi_1; \bar{\eta}\kappa^{-1}, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \\ &= \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left[\cos\gamma \left(\ln \frac{2\kappa}{\bar{\eta}} - C\right) + (\cos\gamma - \cos\theta) \ln \Gamma - \right. \end{aligned}$$

$$- \cos \gamma \ln \frac{1 + \cos \gamma}{2 \cos \gamma} + \cos \theta \ln \frac{1 + \cos \theta}{\cos \gamma + \cos \theta} \Big]. \quad (32)$$

Здесь первое слагаемое совпадает с общепринятой формулой, полученной в [6]. Использованный прием интегрирования позволяет оценить относительную точность вычисления. Для первого слагаемого она равна $(\ln \kappa)^{-1}$, т.е. оно определяется с логарифмической точностью, как и указано в [6]. Остальные слагаемые определяются с относительной точностью κ^{-1} . Они, вообще говоря, меньше первого, однако имеют другую зависимость от угла между вихрем Абрикосова и осью анизотропии: при $\theta = 0$ они равны нулю, с ростом θ их вклад монотонно растет. При $\Gamma = 8$, $\kappa = 50$ и $\theta = \pi/2$ поправка составляет 14% от величины первого слагаемого.

Энергия взаимодействия на единицу длины двух параллельных вихрей Абрикосова, находящихся на расстоянии L , достаточно большом, чтобы можно было считать $h_3(\mathbf{L}) \approx g_3(\mathbf{L})$, равна

$$E_{int} = \frac{\Phi_0}{4\pi} g_3(\mathbf{L}). \quad (33)$$

Если плоскость, в которой лежат вихри Абрикосова, проходит через ось анизотропии, то при значениях параметров, допускающих инверсию знака $g_3(\mathbf{L})$, в промежуточной области (15) в зависимости $E_{int}(L)$ появляется отрицательный минимум при $L = L_{min}$ и положительный максимум при $L = L_{max}$ ($L_{min} < L_{max} \sim \Gamma$). В этом случае при плотностях вихрей Абрикосова $N < L_{max}^{-2}$ могут существовать две идеальные вихревые решетки: метастабильная — решетка Абрикосова, где все вихри находятся на расстояниях, больших L_{max} и отталкиваются, и стабильная решетка, описанная в [3], состоящая из отталкивающихся плоскостей, параллельных оси анизотропии, в которых вихри Абрикосова расположены на расстоянии L_{min} . Кроме того, могут существовать как метастабильные множества неидеальных решеток, в которых цепочки различной длины из вихрей Абрикосова, расположенных на расстоянии L_{min} , окружены со всех сторон вихрями Абрикосова, отстоящими на расстояние, большее чем L_{max} . Эти метастабильные решетки могут быть одной из причин гистерезисных явлений, наблюдавшихся и обсуждавшихся в [9] и цитируемых там работах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя первого рода (см. (8.471.1) из [7]), можно получить

$$J_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k J_k(x) A_{nk}, \quad (\text{П.1})$$

где A_{nk} — целочисленные положительные коэффициенты. Интеграл

$$\begin{aligned} 2^k \int_0^\infty x^{-k+1} J_k(x) \frac{dx}{x^2 + b^2} = \\ = \frac{2}{(k-1)!b^2} - 2^{k+1} \int_0^\infty x^{-(k-1)+1} J_{k-1}(x) \frac{dx}{(x^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь интегрирование по частям производится по формуле (5.52.2) из [7]. Повторяя его k раз и используя далее формулу (6.565.4) из [7], получим

$$2^k \int_0^{\infty} x^{-k+1} J_k(x) \frac{dx}{x^2 + b^2} = \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1} (m-1)!}{(k-m)! b^{2m}} + (-1)^k \frac{2^k}{b^k} K_k(b). \quad (\text{П.3})$$

Подставим (П.1) в (10) и проинтегрируем по формуле (П.3). Получим

$$G_n(aR) = \sum_{k=0}^n A_{nk} \left[(-1)^k \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1} (m-1)!}{(k-m)! (aR)^{2m}} + \frac{2^k}{(aR)^k} K_k(aR) \right]. \quad (\text{П.4})$$

Вынося $(2/aR)^k$ за скобки, заменяя индекс суммирования $m = k - l$ и представляя $K_k(aR)$ в виде ряда по формуле (8.446) из [7], получим разложение $G_n(aR)$ по степеням аргумента:

$$G_n(aR) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{aR}{2} \right)^{2m} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(m+k)!} \times \\ \times A_{nk} \left[\ln \frac{aR}{2} + C - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{m+k} \frac{1}{l} \right) \right]. \quad (\text{П.5})$$

Нулевой член этого разложения $G_n(0) = (-1)^n / 2n$ можно получить непосредственно из (10) по формуле (6.561.14) из [7]. Для функций Макдональда $K_{2n}(x)$ можно из рекуррентных соотношений вывести формулу, аналогичную (П.1), с теми же коэффициентами A_{nk} , но без множителей $(-1)^{k+n}$. Используя эту формулу, из (П.4) получим

$$G_n(aR) = K_{2n}(aR) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k A_{nk} (-1)^{k+l} \frac{2^{2l-1} (l-1)!}{(k-l)! (aR)^{2l}}. \quad (\text{П.6})$$

Представляя $K_{2n}(aR)$ в виде ряда по формуле (8.446) из [7] и сопоставляя с (П.5), приходим к выводу, что коэффициенты при отрицательных степенях aR должны обращаться в нуль, откуда следует (11).

Литература

1. V. G. Kogan, Phys. Rev. B **24**, 1572 (1981).
2. А. М. Гришин, ФНТ **9**, 277 (1983).
3. А. М. Гришин, А. Ю. Мартынович, С. В. Ямпольский, ЖЭТФ **97**, 1930 (1990).
4. V. G. Kogan and J. R. Clem, Phys. Rev. B **24**, 2497 (1981).
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **23**, 236 (1952).
6. А. В. Балацкий, Л. И. Бурлачков, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **90**, 1478 (1986).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
8. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1984).
9. Л. Г. Мамсурова, К. С. Пигальский, В. П. Сакун, Л. Г. Щербакова, ФТТ **37**, 2954 (1995).