

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО КАСКАДНОГО ЛАЗЕРА НА КВАНТОВЫХ ЯМАХ И ПРОВОЛОКАХ

В. Ф. Елесин, А. В. Крашенинников

Московский государственный инженерно-физический институт
115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 июня 1996 г.

Найдено численное решение системы нелинейных уравнений для функций распределений электронов в верхней и нижней рабочих подзонах и числа неравновесных оптических фононов в полупроводниковых каскадных лазерах на квантовых ямах и проволоках. Для случая квантовых ям получено также аналитическое решение этой системы уравнений в квазилинейном приближении, обобщающее решение, найденное в [5, 6] на более широкий интервал скоростей накачки. Показано, что возможно существенное понижение пороговой накачки за счет эффекта перепоглощения и накопления неравновесных оптических фононов, а также вследствие непараболичности подзон и разных эффективных масс электронов в подзонах. Найдено, что для случая квантовых проволок имеет место понижение пороговой скорости накачки, причем в большей степени, чем для квантовых ям. Обращено внимание на то, что из-за уменьшения скорости электрон-электронной энергетической релаксации в одномерном случае понижение пороговой скорости может составлять два-три порядка. Также изучено влияние вида плотности состояний на пороговый ток.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенный в пионерской работе Казаринова и Суриса [1] новый тип полупроводникового лазера (квантовый каскадный лазер) был недавно реализован экспериментально [2, 3]. Интерес к квантовым каскадным лазерам, функционирующим на электронных переходах между подзонами в зоне проводимости, связан с возможностью перестройки длины волны в этих лазерах от инфракрасного до субмиллиметрового диапазонов.

Ввиду отсутствия запрета на межподзонные переходы электронов с испусканием оптических фононов для квантовых каскадных лазеров характерны большие пороговые токи и сильнонеравновесное состояние электронной системы. Действительно, время жизни электрона в верхней подзоне (равное времени испускания оптического фотона τ_0) мало ($\tau_0 \approx 10^{-12}$ – 10^{-13} с) по сравнению с временами жизни электронов ($\tau_r \approx 10^{-10}$ с) в обычных полупроводниковых лазерах, работающих на переходах между валентной зоной и зоной проводимости. Это приводит к жестким условиям для создания инверсной населенности и, вследствие сильнонеравновесного состояния электронной системы, к необходимости кинетического подхода для описания энергетической релаксации электронов в этом типе лазеров.

В первых работах [2, 3] по квантовым каскадным лазерам для создания инверсной населенности параметры полупроводниковой гетероструктуры подбирались так, чтобы время ухода электронов из нижней подзоны τ_t было мало по сравнению с τ_0 . Это условие необходимо, если рассматривать такие лазеры, как двухуровневые системы в пре-

небрежении непараболичностью подзон [2, 4]. Однако, как было показано в [5, 6], учет непараболичности радикально меняет ситуацию. В этом случае излучательные переходы идут в достаточно узкой энергетической полосе, так что нет необходимости в выполнении жесткого условия $\tau_0 \gg \tau_t$. Как следствие этого, инверсия в полной населенности подзон также не является необходимой. Вскоре это нашло экспериментальное подтверждение [7].

Помимо важности учета непараболичности подзон, в [5, 6] было обращено внимание на возможность существенного понижения порогового тока, если увеличить τ_t ($\tau_0 \ll \tau_t$) и использовать эффекты накопления и перепоглощения оптических фононов. Действительно, вследствие этих явлений эффективное время жизни электронов в верхней подзоне увеличивается и для создания пороговых условий генерации требуется меньшая скорость накачки.

Осуществленные в [5, 6] расчеты для случая квантовых ям были основаны на точном аналитическом решении системы кинетических уравнений для функций распределения электронов в подзонах и числа фононов. Скорость накачки Q при этом предполагалась малой ($Q\tau_0 \ll 1$, линейное приближение).

Цель настоящей работы — найти решение системы кинетических уравнений для функций распределения электронов и пороговые скорости накачки (а, следовательно, пороговые токи) в широком диапазоне параметров кинетической модели квантового каскадного лазера. Нами рассмотрена как двумерная модель лазера на квантовых ямах, так и одномерная модель, соответствующая лазеру на квантовых проволоках. Последний случай представляет особый интерес в связи с возможностью существенного понижения порогового тока (что подтверждается в настоящей работе). Это связано с особенностями в плотности электронных состояний одномерной системы, а также с резким уменьшением скорости электрон-электронной релаксации. Напомним, что в одномерном случае для однозонной модели электрон-электронные столкновения не приводят к энергетической релаксации [8] (это следует из законов сохранения энергии и импульса). Важно отметить, что именно электрон-электронная релаксация ограничивает пределы понижения порогового тока в случае $\tau_0 \ll \tau_t$ [5, 6].

Статья построена следующим образом. В разд. 2 описана рассматриваемая модель и приведены основные уравнения. В разд. 3 найдено точное аналитическое решение системы кинетических уравнений для электронов и фононов в квазилинейном приближении, справедливом в широком интервале Q . Результаты численного решения исходной системы нелинейных уравнений для случая квантовых ям и детальный анализ решений приведены в разд. 4. В разд. 5 представлены результаты численного решения системы нелинейных кинетических уравнений для случая квантовых проволок.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя [5, 6], рассмотрим следующую модель (см. рис. 1). Пусть имеются две подзоны с законами дисперсии $\varepsilon_1(\mathbf{p})$, $\varepsilon_2(\mathbf{p})$, между которыми происходят прямые переходы с испусканием фотонов с энергией $\hbar\Omega$ (далее $\hbar = c = 1$, c — скорость света в вакууме). Электроны инжектируются в подзону 2 со скоростью Q и отводятся из подзоны 1 с вероятностью τ_t^{-1} . Условия, оптимальные для функционирования квантовых каскадных лазеров, достигаются соответствующим подбором параметров квантовых ям и барьеров структуры [2–4].

В рассматриваемой модели основной вклад в процессы рассеяния вносит взаимо-

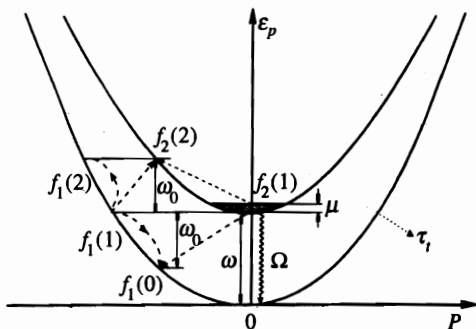


Рис. 1. Зависимость энергии подзон от квазиимпульса. Штриховые линии соответствуют переходам с испусканием оптического фотона, волнистая — фотона

действие электронов с оптическими фотонами (характерные энергии $\omega_0 \approx 0.034$ эВ [7]). При $p = 0$ разность энергий подзон $\omega = \varepsilon_2(0) - \varepsilon_1(0)$ приблизительно составляет несколько ω_0 . Величина μ ($\mu \ll \omega_0$) соответствует энергетическому интервалу инжектированных электронов.

Наша основная задача — определение пороговой скорости накачки Q_{th} . Она может быть найдена (см. например, [5, 6]) из условия равенства коэффициента усиления $\alpha(\Omega)$ обратному времени жизни τ фотона в резонаторе, которое определяется суммарными потерями:

$$\alpha(\Omega_0, J_{th}) = \frac{1}{\tau}, \quad \left. \frac{\partial \alpha(\Omega)}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = 0. \tag{1}$$

Последнее условие представляет собой уравнение на частоту генерации. Как показано в [5, 6], выражение для $\alpha(\Omega)$, описывающее переходы электронов между подзонами, имеет вид

$$\frac{\alpha(\Omega)}{\alpha_0} = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)] \gamma}{(\xi_2(\varepsilon) - \xi_1(\varepsilon))^2 + \gamma^2}, \quad \alpha_0 = \frac{e^2 |V_{12}|^2}{\Omega \kappa}, \tag{2}$$

$$\xi_2(\varepsilon) = \varepsilon + \omega - \frac{\Omega}{2}, \quad \xi_1(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{\Omega}{2}, \tag{3}$$

где $f_2(\varepsilon)$, $f_1(\varepsilon)$ — функции распределения электронов в подзонах 2 и 1 (см. рис. 1), γ — затухание недиагональной матрицы плотности (предполагаемое не зависящим от энергии), Ω — частота электромагнитного поля, V_{12} — матричный элемент перехода электронов между подзонами, κ — диэлектрическая проницаемость, e — заряд электрона.

Если пренебречь непараболичностью подзон, то разность $\xi_2 - \xi_1 = \omega - \Omega \equiv \delta$ оказывается не зависящей от энергии. В этом случае переходы электронов с испусканием (или поглощением) фотонов идут по всей подзоне и система становится во многом эквивалентной двухуровневой системе. Использование данного приближения приводит [2, 4] к требованию

$$\tau_t < \tau_0, \tag{4}$$

необходимому для выполнения условий (1), (2).

Как показано в [5, 6], учет непараболичности подзон радикально меняет ситуацию. Во-первых, жесткое условие (4) перестает быть необходимым. Во-вторых, появляется возможность значительного понижения Q_{th} . Это связано с тем, что непараболичность подзон ограничивает область генерации.

Если воспользоваться простейшей аппроксимацией спектра [9] для AsGa, то разность $\xi_2 - \xi_1$ для случая глубокой квантовой ямы становится равной [5, 6]

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \delta - \beta\varepsilon, \quad \beta = 2\omega/\varepsilon_g, \tag{5}$$

где ε_g — ширина запрещенной зоны. Позднее аналогичные результаты были получены в [10]. В работе [7] были проведены расчеты в рамках более сложной модели с учетом особенностей реальных структур, результаты которых совпадают с полученными в [5, 6] с точностью 25%.

С учетом (5) и предполагая, что

$$f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon) = \begin{cases} \Delta f, & 0 < \varepsilon < \mu, \\ 0, & \mu < \varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

получим из (1) на резонансной частоте $\Omega_0 = \omega - \mu\beta/2$

$$\frac{\alpha(\Omega_0)}{\alpha_0} = \frac{2\Delta f}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\mu\beta}{2\gamma} \approx \frac{\Delta f\pi}{\beta}$$

при $\mu\beta \gg 2\gamma$. Пороговое значение перенаселенности определяется, соответственно, выражением

$$\Delta f_{th} = \frac{\beta}{\pi\tau\alpha_0}. \tag{7}$$

Чтобы теперь определить Q_{th} , необходимо найти связь $f_i(\varepsilon)$ с Q . Это можно сделать, решив систему кинетических уравнений для $f_i(\varepsilon)$ и для числа оптических фононов N .

Соответствующие кинетические уравнения были получены в [5, 6]. В этих же работах они были сведены к системе зацепляющихся уравнений для функций $f_1(n)$, $f_2(n)$, где

$$f_1(n) \equiv f_1(\omega + (n - 1)\omega_0) = f_1(\varepsilon),$$

$$f_2(n) \equiv f_2(\omega + n\omega_0) = f_2(\varepsilon), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции $f_1(n)$, $f_2(n)$ описывают распределение электронов, локализованных в узком энергетическом интервале $\mu \ll \omega_0$, вблизи энергий $\varepsilon = \omega \pm n\omega_0$. Уравнения имеют следующий вид:

$$f_1(0) [\xi + N(1+z) + f_1(1) + z f_2(1)] = (1+N) [f_1(1) + z f_2(1)], \tag{8}$$

$$f_1(0) [\xi + 1 + N(2+z) - f_1(0) + f_1(2) + z f_2(2)] = N f_1(0) + (1+N) [f_1(2) + z f_2(2)], \tag{9}$$

$$f_2(1) [Q\tau_0 + 1 + N(2+z) - f_1(0) + f_1(2) + z f_2(2)] = N f_1(0) + (1+N) [f_1(2) + z f_2(2)] + Q\tau_0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_1(n) [\xi + (1+z)(1+2N) - f_1(n-1) - z f_2(n-1) + f_1(n+1) + z f_2(n+1)] = \\ = N [f_1(n-1) + z f_2(n-1)] + (1+N) [f_1(n+1) + z f_2(n+1)], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f_2(n) [(1+z)(1+2N) - f_1(n-1) - z f_2(n-1) + f_1(n+1) + z f_2(n+1)] = \\ = N [f_1(n-1) + z f_2(n-1)] + (1+N) [f_1(n+1) + z f_2(n+1)], \end{aligned} \tag{12}$$

где $\xi = \tau_0/\tau_t$, $z = m_2/m_1$ — отношение эффективных масс электронов в подзонах 2 и 1 соответственно. Повсюду в наших аналитических расчетах мы полагаем $z = 1$ (случай $z \neq 1$ рассмотрен в разд. 4). Уравнения (11), (12) справедливы при $n \geq 2$. К этой системе необходимо добавить уравнение для числа оптических фононов N [5]:

$$N \frac{\tau_t}{\tau_{esc}} = f_1(0) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) f_1(n), \quad (13)$$

где τ_{esc} — время ухода фононов из области с заданными размерами [5].

С учетом того, что функции $f_2(n)$ локализованы в узком энергетическом интервале, разность $f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)$ из (6) на пороге генерации становится равной $f_2(1)$. Действительно, если опустить случай «резонанса», когда $\omega = k\omega_0$, где k — целое число, то электроны при испускании оптических фононов не попадают на дно подзоны 1, т.е. в области генерации $f_1(\varepsilon)$ (см. рис. 1).

3. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КВАНТОВЫХ ЯМ

В [5, 6] было найдено точное аналитическое решение системы уравнений (8)–(13) в линейном приближении по f и $Q\tau_0$. При этом предполагалось, что область применимости линейного приближения ($f \ll 1$, $Q\tau_0 \ll 1$) фактически простирается до $Q \sim 1/\tau_0$, так как нелинейные члены в (8)–(12), которыми пренебрегали в этом случае, сравнивались со слагаемыми порядка $1 + 3N$, где $N \sim 1$.

Однако численные расчеты и более детальный анализ показали, что в знаменателях выражений для f_i (соответствующие формулы приведены ниже) происходит компенсация ряда членов, и для справедливости линейного приближения величина $Q\tau_0$ должна быть меньше не слагаемого $1 + 3N \approx 4$, а величины порядка ξ (при $\xi \ll 1$).

В то же время, «опасные» знаменатели возникают только из-за наличия в левой части уравнения (10) слагаемого, пропорционального $Q\tau_0 f_2(1)$. Если этот член сохранить (будем называть это приближение квазилинейным), то получающаяся из (8)–(13) система линейных уравнений также имеет точное аналитическое решение, прекрасно совпадающее (см. разд. 4) с численным решением исходной нелинейной системы (8)–(13).

Решение системы (8)–(13) в квазилинейном приближении имеет вид

$$f_1(n) = A_1 \exp(\alpha n), \quad f_2(n) = A_2 \exp(\alpha n), \quad n \geq 2, \quad (14)$$

$$\bar{A}_1 = A_1 \exp(\alpha) = Q\tau_0 \frac{(\xi + c)b}{(\xi + 2b)\bar{\Delta}}, \quad \bar{A}_2 = A_2 \exp(\alpha) = Q\tau_0 \frac{(\xi + b)(\xi + c)}{(\xi + 2b)\bar{\Delta}}, \quad (15)$$

$$\bar{\Delta} = (\xi + c)(c + Q\tau_0) - (1 + N)(\xi + 2c + Q\tau_0) - (1 + N)(\xi + 2c + Q\tau_0) [\exp(\alpha) + N/(\xi + 2N)], \quad (16)$$

$$f_1(0) = Q\tau_0 \frac{(1 + N)(\xi + c)}{(\xi + 2N)\bar{\Delta}}, \quad (17)$$

$$f_1(1) = Q\tau_0 \frac{y}{\Delta}, \quad y = (1 + N) \exp(\alpha) + \frac{N(1 + N)}{\xi + 2N}, \quad (18)$$

$$f_2(1) = Q\tau_0 \frac{\xi + c - y}{\Delta}, \quad (19)$$

$$\exp(\alpha) = \frac{b(\xi + b)}{2(1 + N)(\xi + 2b)} - \sqrt{\left\{ \frac{b(\xi + b)}{2(1 + N)(\xi + 2b)} \right\}^2 - \frac{N}{1 + N}}, \quad (20)$$

$$b = 2(1 + 2N), \quad c = 1 + 3N.$$

Выражения (7), (14)–(20) позволяют найти пороговую скорость накачки Q_{th} в общем виде.

Решение (14)–(20), полученное в квазилинейном приближении, отличается от линейного [5, 6] только знаменателем Δ , в котором присутствует $Q\tau_0$. Следует отметить, что в выражения, приведенные в [5], вкрались некоторые неточности (в частности, в (57) из [5] должно быть $n \geq 2$), не приведшие, впрочем, к изменению окончательных результатов и выводов [5]. Результаты расчетов как в линейном, так и в квазилинейном приближении фактически совпадают в предельном случае $\xi \ll 1$, однако имеются малые численные поправки при $\xi \gg 1$. Отметим, что решение (14)–(20) с высокой степенью точности согласуется с результатами численных расчетов (см. разд. 4).

Представляет интерес исследовать предельные ситуации $\xi \ll 1$ и $\xi \gg 1$. В первом случае, разлагая по $\xi \ll 1$ ($\xi \ll N$), после громоздких вычислений получаем из (14)–(20)

$$f_1(0) \approx Q\tau_0 \frac{1 + N}{\xi(1 + N)^2 + Q\tau_0 N}, \quad (21)$$

$$f_2(1) \approx f_1(1) \approx Q\tau_0 \frac{1 + N}{\xi(1 + N)^2 + Q\tau_0 N}. \quad (22)$$

Видим, что в знаменателях выражений (21), (22) $Q\tau_0$ необходимо сравнивать не с $1 + 3N$, а с величиной, пропорциональной ξ . Если

$$Q\tau_0 < Q_c\tau_0 = \xi(1 + N)^2/N \sim 4\xi, \quad (23)$$

то мы получаем (72), (73) из [5]. При $Q > Q_c$ (или $\xi < \xi_c = Q\tau_0 N/(1 + N)^2$) происходит насыщение роста $f_2(1)$ в (22), т. е. $f_2(1) \rightarrow 1$.

В квазилинейном приближении нетрудно получить уравнение для N :

$$\frac{N}{1 + N} = Q\tau_{esc} \frac{\xi(1 - N^2)}{\xi(1 + N)^2 + Q\tau_0 N}. \quad (24)$$

При $Q < Q_c$ оно переходит в (74) из [5]. Найденное из этого кубического уравнения N подставляем в (22) и находим $f_2(1)$ как функцию $Q\tau_0$ (см. рис. 3а). Предельные значения N при $Q\tau_{esc} \gg 1$ оказываются порядка единицы (подробнее см. разд. 4).

Теперь, воспользовавшись (7), (22), найдем пороговое значение скорости накачки:

$$Q_{th}(\xi \ll 1) \approx \frac{(1 + N)^2}{N\tau_t} \frac{q}{1 - q}, \quad (25)$$

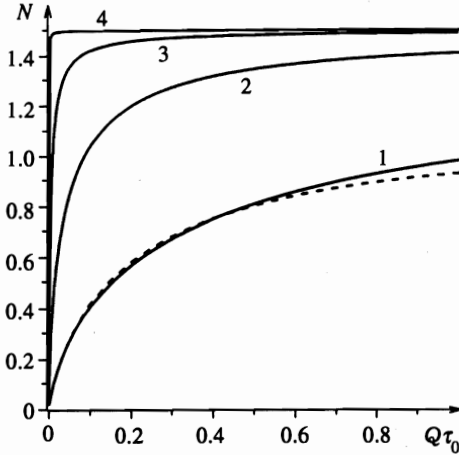


Рис. 2. Зависимость числа фононов N от скорости накачки $Q\tau_0$, полученная путем численного решения уравнения (28). Кривые рассчитаны при $\tau_{esc}/\tau_0 = 10$ (1), 10^2 (2), 10^3 (3), 10^5 (4). Штриховая линия соответствует численному решению нелинейной системы уравнений (8)–(13) при $\tau_t/\tau_0 = 0.1$ ($\xi = 10$), $\tau_{esc}/\tau_0 = 10$

$$q = \beta/\pi\tau\alpha_0.$$

Видно, что вследствие эффекта перепоглощения оптических фононов Q_{th} определяется не τ_0 , а эффективным временем жизни электрона в верхней подзоне $\tau_t N/(1+N)^2$.

Рассмотрим другой предельный случай $\xi \gg 1$. Разлагая по малому параметру $1/\xi$ и предполагая, что $\xi \gg N$, получаем следующие выражения:

$$f_1(0) \approx \frac{Q\tau_0(1+N)}{\xi(a+Q\tau_0)}, \tag{26}$$

$$f_2(1) \approx \frac{Q\tau_0}{a+Q\tau_0}, \tag{27}$$

где $a = N + \sqrt{1 + 3N + 3N^2}$.

Уравнение для N в этом случае имеет вид

$$\frac{N}{Q\tau_{esc}} = \frac{(1+N)(2+N-\sqrt{1+3N+3N^2})}{(\sqrt{1+3N+3N^2}-N)(\sqrt{1+3N+3N^2}+N+Q\tau_0)}. \tag{28}$$

В случае $Q\tau_{esc} \gg 1$ из (28) находим предельное значение числа фононов N_0 :

$$N_0 = 1.5.$$

Таким образом, при $N = N_0$ величина $a = 5$, и, следовательно, линейное приближение справедливо вплоть до $Q\tau_0 \leq 5$.

При произвольных значениях $Q\tau_{esc}$ число фононов как функция $Q\tau_0$ может быть найдено путем численного решения (28). Результаты численных расчетов представлены на рис. 2. Как следует из рисунка, $N_0 = 1.5$ в соответствии с аналитически полученным результатом. На рис. 2 пунктирной линией также показана зависимость $N(Q\tau_0)$, полученная путем численного решения системы нелинейных уравнений методом итераций (см. разд. 4). Видно, что зависимости фактически совпадают, что указывает на применимость квазилинейного приближения для определения N .

Воспользовавшись выражениями (7), (27), находим пороговую скорость накачки в пределе $\xi \gg 1$:

$$Q_{th}(\xi \gg 1) \approx \frac{5}{\tau_0} \frac{q}{1-q}. \quad (29)$$

Сравнивая (25) и (29), находим отношение

$$\frac{Q_{th}(\xi \ll 1)}{Q_{th}(\xi \gg 1)} \approx \frac{(1+N)^2}{5N} \xi,$$

где в правой части $\xi \ll 1$. Полагая $N \approx 1$, имеем оценку

$$\frac{Q_{th}(\xi \ll 1)}{Q_{th}(\xi \gg 1)} \sim \xi, \quad (30)$$

практически совпадающую с (76) из [5]. Видно, что пороговая скорость накачки может быть уменьшена пропорционально $\xi = \tau_0/\tau_t$ (например, путем увеличения τ_t с ростом толщины барьера). Подчеркнем, что этот результат справедлив при выполнении соотношения $Q\tau_{esc} \gg 1$, но понижение Q_{th} имеет место при любых $Q\tau_{esc} \geq 1$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ КВАНТОВЫХ ЯМ

Нами было найдено численное решение системы нелинейных уравнений (8)–(13) в широком диапазоне параметров τ_{esc} , τ_0 , τ_t , Q . Использовался метод итераций. На каждом шаге итерационного процесса система (8)–(13) рассматривалась как система линейных алгебраических уравнений, при этом функции $f_i(n)$, стоящие в скобках в левой части уравнений (8)–(13), считались константами, значения которых брались с предыдущей итерации. Все временные характеристики выражались в единицах τ_0 .

Поскольку $f_2(1)$ определяет, фактически, пороговое значение перенаселенности, наиболее наглядным и информативным представляется поведение именно этой функции. На рис. 3–8 приведены типичные зависимости $f_2(1)$, а также N , от τ_t/τ_0 , $Q\tau_0$.

Рис. 3а демонстрирует совпадение с точностью до нескольких процентов зависимости $f_2(1)$ от $Q\tau_0$, рассчитанной по формуле (22) для предельного случая $\xi \ll 1$ (штрихпунктирная кривая с тремя точками), с численным решением (8)–(13) в квазилинейном приближении (пунктирная кривая) и численным решением системы нелинейных уравнений (8)–(13) (сплошная кривая). Как следует из рис. 3а, решение в квазилинейном приближении фактически идентично численному в широком интервале $Q\tau_0$, а решение в линейном приближении имеет приемлемую точность до $Q\tau_0 \sim \xi$.

На рис. 3б показаны аналогичные зависимости при $\xi = 10$. Для предельного случая $\xi \gg 1$ для расчета зависимости $f_2(1)$ от $Q\tau_0$ использовалось выражение (27). Видно, что в пределе $\xi \gg 1$ аналитическое решение (27) хорошо согласуется с численными решениями нелинейной системы уравнений, а также с решениями в линейном и квазилинейных приближениях. Заметим, что для всех предельных случаев квазилинейное аналитическое решение (22), (27) справедливо в широкой области $Q\tau_0$.

На рис. 4а приведена зависимость $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 при $Q\tau_0 = 0.1$, демонстрирующая рост $f_2(1)$ при увеличении τ_t/τ_0 в соответствии с аналитически полученными результатами (22), (27) (см. также [5, 6]). Так, в случае $Q\tau_0 \ll 1$, $Q\tau_{esc} \gg 1$ (рис. 4б) $f_2(1) \sim 0.027$

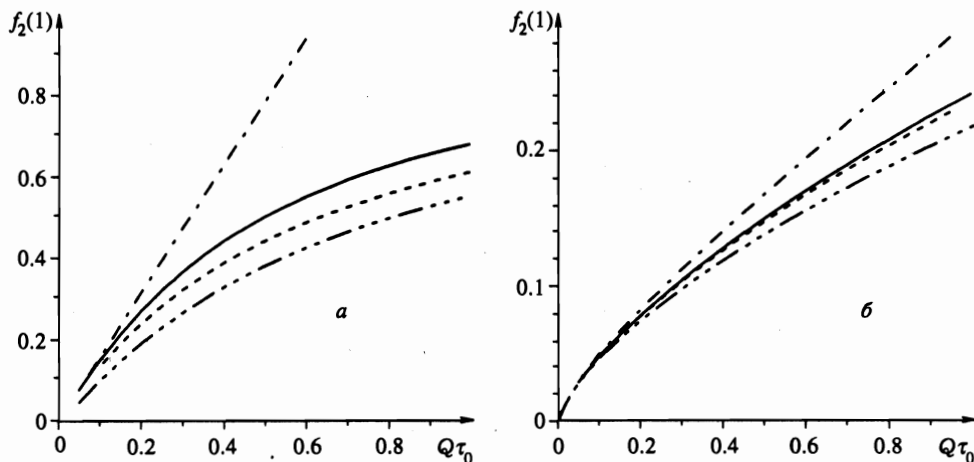


Рис. 3. Зависимость $f_2(1)$ от скорости накачки $Q\tau_0$. Сплошная кривая — численное решение нелинейной системы уравнений (8)–(13), штриховая кривая — решение (8)–(13) в квазилинейном приближении, штрих-пунктирная кривая — решение (8)–(13) в линейном приближении. Штрих-пунктирная кривая с тремя точками — зависимость, рассчитанная по формуле (22) для случая $\xi = 10$ и по формуле (27) для случая $\xi = 0.2$. $\tau_{esc}/\tau_0 = 10$. *a* — $\tau_t/\tau_0 = 5$ ($\xi = 0.2$), *b* — $\tau_t/\tau_0 = 0.1$ ($\xi = 10$)

при $\tau_t/\tau_0 = 0.1$ ($\xi = 10$) и $f_2(1) \sim 0.25$ при $\tau_t/\tau_0 = 10$ ($\xi = 0.1$). Это подтверждает основное предсказание о возможности понижения пороговой скорости накачки при увеличении τ_t . Отметим также, что при сравнительно больших q/τ_0 рост $f_2(1)$ не столь значителен, см. (22), (27).

До настоящего момента мы считали массы электронов в подзонах одинаковыми. Если принять, что они имеют разные значения ($m_2 > m_1$), то, как видно из рис. 4 (сплошная кривая с точками соответствует численному решению системы (8)–(13) при $m_2/m_1 = 1.5$), это приводит к увеличению $f_2(1)$ по сравнению с этой величиной, рассчитанной в предположении одинаковых масс (сплошная кривая) при прочих равных условиях.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ КВАНТОВЫХ ПРОВОЛОК

Как было отмечено во Введении, вследствие уменьшения электрон-электронной релаксации и наличия особенностей в плотности электронных состояний одномерной системы представляет интерес рассмотреть кинетическую модель одномерного квантового каскадного лазера. Система кинетических уравнений в этом случае также может быть сведена к системе зацепляющихся уравнений, которая имеет вид

$$f_1(0) \left[\xi + N \left(\frac{1}{\sqrt{w}} + \frac{x}{\sqrt{2\mu}} \right) + \frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} + x \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\mu}} \right] = (1 + N) \left[\frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} + \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\mu}} \right], \quad (31)$$

$$f_1(1) \left[\xi + \frac{1+N}{\sqrt{w-1}} + N \left(x + \frac{1}{\sqrt{w+1}} \right) - \frac{f_1(0)}{\sqrt{w-1}} + \frac{f_1(2)}{\sqrt{w+1}} + x f_2(2) \right] =$$

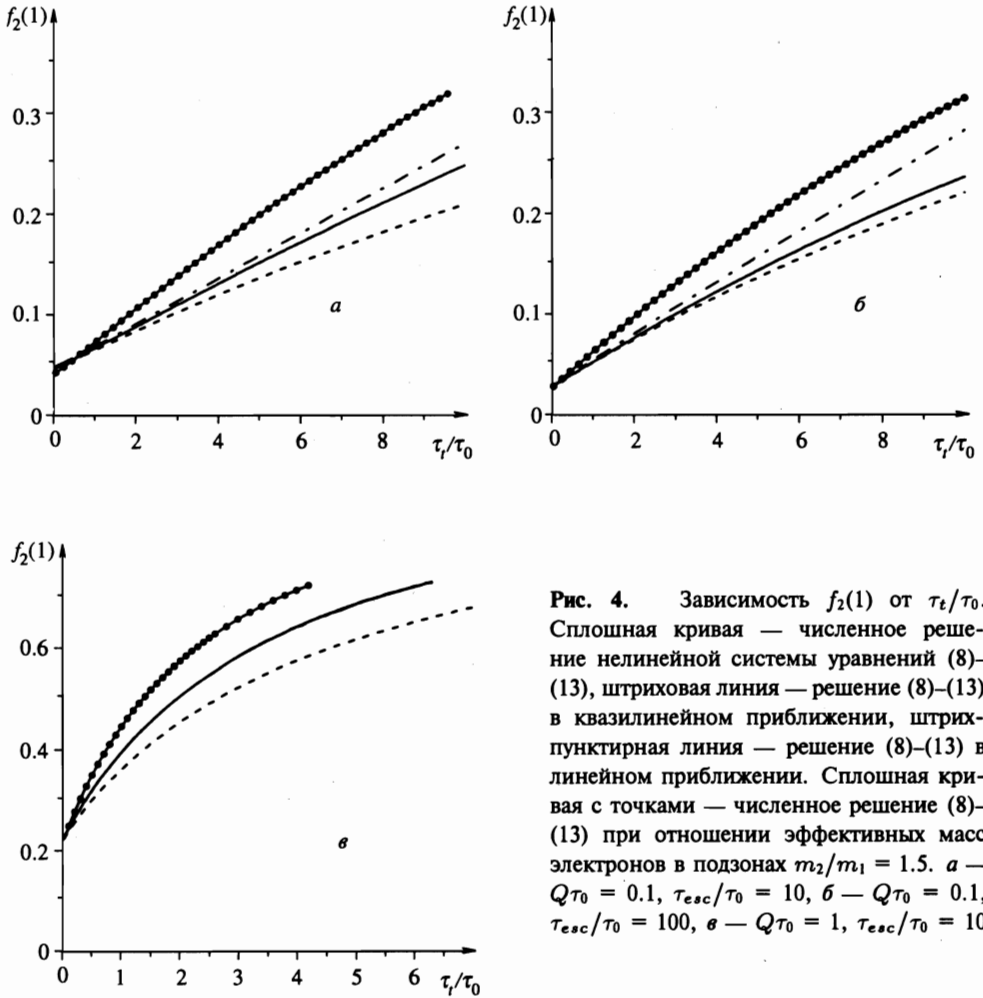


Рис. 4. Зависимость $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 . Сплошная кривая — численное решение нелинейной системы уравнений (8)–(13), штриховая линия — решение (8)–(13) в квазилинейном приближении, штрихпунктирная линия — решение (8)–(13) в линейном приближении. Сплошная кривая с точками — численное решение (8)–(13) при отношении эффективных масс электронов в подзонах $m_2/m_1 = 1.5$. *а* — $Q\tau_0 = 0.1$, $\tau_{esc}/\tau_0 = 10$, *б* — $Q\tau_0 = 0.1$, $\tau_{esc}/\tau_0 = 100$, *в* — $Q\tau_0 = 1$, $\tau_{esc}/\tau_0 = 10$

$$= f_1(0) \frac{N}{\sqrt{w-1}} + (1+N) \left[\frac{f_1(2)}{\sqrt{w+1}} + x f_2(2) \right], \tag{32}$$

$$f_2(1) \left[Q\tau_0 + \frac{1+N}{\sqrt{w-1}} + N \left(x + \frac{1}{\sqrt{w+1}} \right) - \frac{f_1(0)}{\sqrt{w-1}} + \frac{f_1(2)}{\sqrt{w+1}} + x f_2(2) \right] =$$

$$= f_1(0) \frac{N}{\sqrt{w-1}} + (1+N) \left[\frac{f_1(2)}{\sqrt{w+1}} + x f_2(2) \right] + Q\tau_0, \tag{33}$$

$$f_1(2) \left[\xi + \frac{1}{\sqrt{w}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + N \left(\frac{1}{\sqrt{w+2}} + \frac{1}{\sqrt{w}} + \frac{x}{\sqrt{2\mu}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} - x \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\mu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_1(3)}{\sqrt{w+2}} + x \frac{f_2(3)}{\sqrt{2}} \right] = N \left[\frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} + x \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\mu}} \right] + (1+N) \left[\frac{f_1(3)}{\sqrt{w+2}} + x \frac{f_2(3)}{\sqrt{2}} \right], \tag{34}$$

$$f_2(2) \left[(1+N) \left(\frac{x}{\sqrt{2\mu}} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right) + N \left(\frac{1}{\sqrt{w+2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} - x \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\mu}} + \right.$$

$$+ \frac{f_1(3)}{\sqrt{w+2}} + x \frac{f_2(3)}{\sqrt{2}} \Big] = N \left[\frac{f_1(1)}{\sqrt{w}} + x \frac{f_2(1)}{\sqrt{2\bar{\mu}}} \right] + (1+N) \left[\frac{f_1(3)}{\sqrt{w+2}} + x \frac{f_2(3)}{\sqrt{2}} \right], \quad (35)$$

$$f_1(n) \left[\xi + \frac{1}{\sqrt{w+n-2}} + \frac{x}{\sqrt{n}} + N \left(\frac{1}{\sqrt{w+n}} + \frac{1}{\sqrt{w+n-2}} + \frac{x}{\sqrt{n-2}} + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{f_1(n-1)}{\sqrt{w+n-2}} - x \frac{f_2(n-1)}{\sqrt{n-2}} + \frac{f_1(n+1)}{\sqrt{w+n}} + x \frac{f_2(n+1)}{\sqrt{n}} \right] = \\ = N \left[\frac{f_1(n-1)}{\sqrt{w+n-2}} + x \frac{f_2(n-1)}{\sqrt{n-2}} \right] + (1+N) \left[\frac{f_1(n+1)}{\sqrt{w+n}} + x \frac{f_2(n+1)}{\sqrt{n}} \right], \quad (36)$$

$$f_2(n) \left[(1+N) \left(\frac{x}{\sqrt{n-2}} + \frac{1}{\sqrt{w+n-2}} \right) + N \left(\frac{1}{\sqrt{w+n}} + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{f_1(n-1)}{\sqrt{w+n-2}} - x \frac{f_2(n-1)}{\sqrt{n-2}} + \frac{f_1(n+1)}{\sqrt{w+n}} + x \frac{f_2(n+1)}{\sqrt{n}} \right] = \\ = N \left[\frac{f_1(n-1)}{\sqrt{w+n-2}} + x \frac{f_2(n-1)}{\sqrt{n-2}} \right] + (1+N) \left[\frac{f_1(n+1)}{\sqrt{w+n}} + x \frac{f_2(n+1)}{\sqrt{n}} \right], \quad (37)$$

где $\xi = \tau_0/\tau_t$, $x = \sqrt{m_1/m_2}$, $w = \omega/\omega_0$, $\bar{\mu} = \mu/\omega_0$. В уравнениях (36), (37) $n \geq 3$.

К (31)–(37) необходимо добавить уравнение для числа фононов [5], аналогичное (13). В одномерном случае это уравнение может существенно отличаться от соответствующих уравнений в двумерном (см. (13)) и трехмерном случае. Действительно, нетрудно показать, исходя из законов сохранения энергии и импульса, что испущенный электроном оптический фонон может передать обратно свою энергию только тому же электрону. Поэтому, вообще говоря, уравнение (13) может претерпеть значительные изменения. Однако в реальной ситуации, когда имеется несколько типов оптических фононов, эти изменения оказываются не столь существенными, как это показано, например, в [11]. Принимая во внимание отмеченное обстоятельство, а также для упрощения расчетов будем использовать уравнение, аналогичное (13), однако учитывающее зависимость плотности электронных состояний от энергии в одномерном случае:

$$N \frac{\tau_t}{\tau_{esc}} \frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{f_1(0)}{\sqrt{w-1}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)f_1(n)}{\sqrt{w+n-1}}. \quad (38)$$

Вследствие энергетической зависимости плотности состояний система уравнений (31)–(38) имеет гораздо более сложный вид, чем для случая квантовых ям (уравнения (8)–(13)), и нам не удалось найти ее аналитическое решение. Система (31)–(38), как и (8)–(13), была решена численно методом итераций в широком диапазоне параметров t_{esc} , τ_0 , τ_t , Q , μ . Повсюду в расчетах мы полагали равными эффективные массы электронов в подзонах.

На рис. 5 представлены типичные зависимости $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 при различных значениях $Q\tau_0$ (см. подпись к рис. 5). Здесь для сравнения приведены также аналогичные кривые для двумерной системы. Сплошные линии соответствуют зависимостям, рассчитанным численно для случая квантовых проволок, штриховые — для квантовых ям. Видно, что в одномерной системе, как и в двумерной, имеет место увеличение $f_2(1)$ с ростом τ_t/τ_0 , причем с большей скоростью. Таким образом, можно сделать вывод о понижении пороговой скорости накачки в квантовых проволоках при увеличении τ_t , причем в большей степени, чем в квантовых ямах.

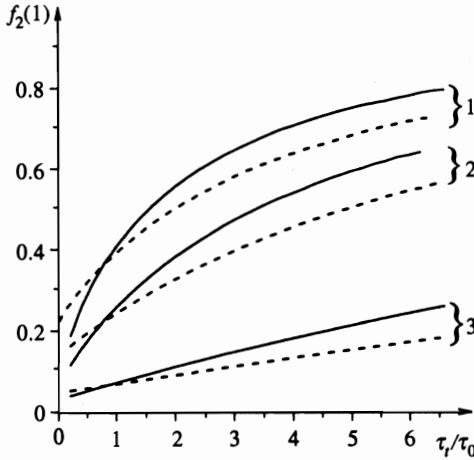


Рис. 5. Зависимость $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 для случая квантовых проволок (сплошные линии) и квантовых ям (штриховые линии). Кривые рассчитаны при $Q\tau_0 = 1$ (1), 0.5 (2), 0.1 (3)

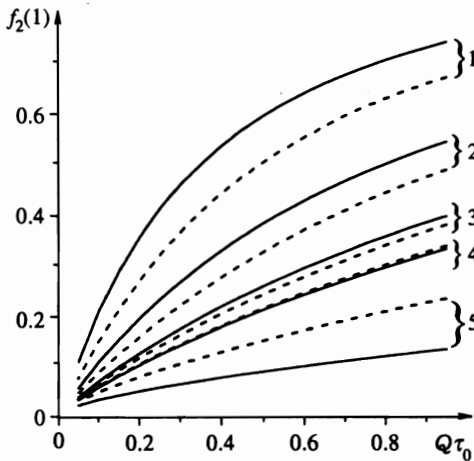


Рис. 6. Зависимость $f_2(1)$ от $Q\tau_0$ для случая квантовых проволок (сплошные кривые) и квантовых ям (штриховые линии). Кривые рассчитаны при $\tau_t/\tau_0 = 5$ (1), 2 (2), 1 (3), 0.7 (4), 0.1 (5)

Мы также детально исследовали величину $f_2(1)$ как функцию $Q\tau_0$. Соответствующие кривые приведены на рис. 6. Наибольший выигрыш в $f_2(1)$ достигается при небольших скоростях накачки. Интересно отметить, что при $\tau_t/\tau_0 \ll 1$ выигрыш для квантовых проволок меньше, чем для квантовых ям.

Роль плотности состояний видна из рис. 7, на котором показана зависимость $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 при различных значениях энергетического интервала μ инжектированных электронов. Сужение энергетического интервала приводит к дальнейшему увеличению $f_2(1)$ с ростом τ_t/τ_0 вследствие наличия особенности в плотности состояний, отраженной в уравнениях (31)–(35) членами, пропорциональными $1/\sqrt{\mu}$.

Различия в $f_2(1)$ для двумерной и одномерной систем, связаны, по-видимому, с разным числом фононов в квантовых проволоках и ямах при одних и тех же значениях параметров модели. Это иллюстрирует рис. 8, на котором представлена зависимость N от $Q\tau_0$ при различных значениях τ_t (см. подпись к рис. 8). Как следует из рис. 8,

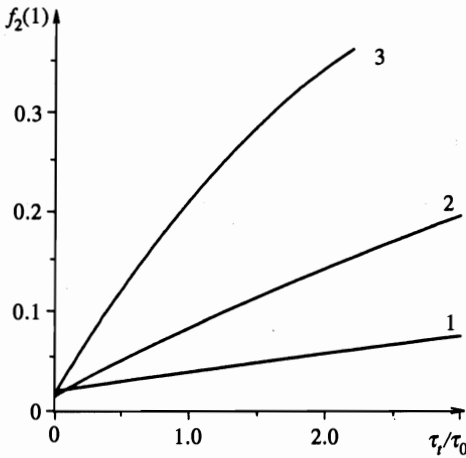


Рис. 7. Зависимость $f_2(1)$ от τ_t/τ_0 для случая квантовых проволок. $\mu/\omega_0 = 0.2$ (1), 0.02 (2), 0.002 (3), $Q\tau_0 = 0.05$

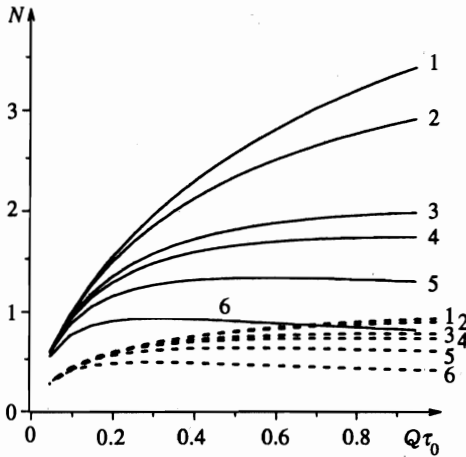


Рис. 8. Зависимость числа фононов N от $Q\tau_0$ для случая квантовых проволок (сплошные кривые) и квантовых ям (штриховые линии). Кривые рассчитаны при $\tau_t/\tau_0 = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.7 (3), 1 (4), 2 (5), 5 (6)

как в квантовых проволоках, так и в квантовых ямах при $\tau_t < 1$ происходит быстрое насыщение N с увеличением скорости накачки ($N \sim 1$ уже при $Q\tau_0 \ll 1$). Это является следствием того, что при больших τ_t энергия в системе запасается не только фононами, но и электронами нижней подзоны.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, численное решение системы нелинейных уравнений для функций распределения электронов $f_1(n)$, $f_2(n)$ и числа неравновесных фононов N подтвердило основные выводы [5, 6] о возможности понижения пороговой скорости накачки (порогового тока) и о кинетике квантового каскадного лазера на квантовых ямах. Оно позволило найти $f_1(n)$, $f_2(n)$, N , в широком интервале параметров модели и скоростей накачки Q ,

а также установить пределы применимости линейного приближения, использованного в [5, 6]. Оказалось, что линейное приближение справедливо при $Q < Q_c$ (см. (23)) $Q_c \sim \xi$, т. е. в сравнительно узкой области при $\xi \ll 1$, и в более широкой области при $\xi \gg 1$.

В то же время показано, что аналитическое решение в квазилинейном приближении, найденное в настоящей работе, с хорошей точностью применимо в широком интервале Q . С помощью этого решения можно определить пороговую скорость накачки Q_{th} как в общем, так и для конкретных предельных случаев и показать, что при условии накопления фононов ($Q\tau_{esc} \gg 1$) возможно существенное понижение Q_{th} , ограничиваемое лишь временами электрон-электронной и электрон-фононной релаксации. Отметим, что существуют определенные проблемы оценки τ_{esc} . Вероятность $1/\tau_{es}$ исчезновения фонона обусловлена уходом фононов из активной области (время которого, видимо, достаточно велико ($\sim 10^{-8}$ – 10^{-9} с) [5, 6]), а также распадом оптических фононов на акустические. Последний процесс более быстрый. Соответствующее время трудно оценить, но, по-видимому, оно существенно превышает τ_0 .

Закономерности в кинетике электронов, установленные для двумерного квантового каскадного лазера, сохраняются и в таком лазере на квантовых проволоках. Точные численные решения соответствующей системы кинетических уравнений демонстрируют возможность понижения порогового тока с увеличением τ_t еще в большей степени, чем в квантовом каскадном лазере на квантовых ямах.

Кроме того, в лазере на квантовых проволоках из-за резкого уменьшения скорости внутризонной электрон-электронной релаксации (см. [8]) возможно увеличение τ_t до больших величин (10^{-10} с), что обеспечивает выигрыш в пороговом токе до 2–3 порядков.

Дополнительное понижение порогового тока возникает из-за особенностей в плотности состояний одномерной системы и разных эффективных масс электронов в подзонах. Таким образом, можно ожидать, что квантовые каскадные лазеры на квантовых проволоках, работающие на переходах между подзонами в зоне проводимости, будут иметь пороговые токи, сравнимые с токами в обычных полупроводниковых лазерах на квантовых ямах, функционирующих на переходах зона-зона.

Мы признательны Ю. В. Копаеву за обсуждения. Работа выполнена в рамках программы «Физика твердотельных наноструктур» Министерства науки и технической политики РФ (грант № 1-092/4), а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17363-а) и INTAS (грант № 93-1704-ext).

Литература

1. А. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ФТП 5, 797 (1971); ФТП 6, 148 (1972); ФТП 7, 488 (1973).
2. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., Science 264, 553 (1994); Appl. Phys. Lett. 65, 2901 (1994).
3. J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori et al., Appl. Phys. Lett. 66, 538 (1995); J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori et al., Appl. Phys. Lett. 67, 3057 (1995).
4. C. Sirtori, J. Faist, F. Capasso et al., Appl. Phys. Lett. 68, 1745 (1996).
5. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ 108, 2186 (1995).
6. V. F. Elesin and Yu. V. Kopayev, Sol. St. Comm. 96, 897 (1995).

7. J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 411, (1996)
8. А. С. Александров, В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **58**, 1062 (1970).
9. E. O. Kane, *J. Phys. Chem. Sol.* **1**, 249 (1957).
10. B. Gelmont, V. Gorfinkel, and S. Luryi, *Appl. Phys. Lett.* **68**, 2171 (1996).
11. R. Mickevicius, R. Gaska, V. Mitin et al., *Semicond. Sci. Technol.* **9**, 886 (1994).