

ЖУРНАЛ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА  
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД  
МОСКВА

ТОМ 111, ВЫПУСК 2  
ФЕВРАЛЬ, 1997  
«НАУКА»

МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

© 1997

*В. П. Власов, С. К. Жданов\*, Б. А. Трубников*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

*\* Московский государственный инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 июня 1995 г.,  
после переработки 23 сентября 1996 г.

Показано, что два излома, наблюдаемые в энергетическом спектре космических лучей, с хорошим приближением можно описать с помощью формул, получаемых в рамках гипотезы о возможности генерации и ускорения частиц космических лучей в плазменных пинчах.

1. ПРОБЛЕМА ИЗЛОМОВ В СПЕКТРЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

В данной статье обсуждается проблема происхождения галактических космических лучей и их спектра, различные участки которого показаны на рис. 1–3.

Наиболее распространенной является гипотеза об ускорении частиц космических лучей на фронтах ударных волн, порождаемых взрывами сверхновых звезд (см. [1] и указанную там литературу). Отметим, что взрыв сверхновой однократно порождает одну расходящуюся ударную волну, но, например, Крабовидная туманность (остаток взрыва) непрерывно испускает синхротронное излучение ультрарелятивистских электронов. Поэтому в ряде теоретических работ рассматривается гипотеза об ускорении частиц космических лучей на плазменных волнах, постоянно порождаемых вращением центрального пульсара туманности вместе с его огромным магнитным полем. Здесь, таким

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии,  
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1997 г.

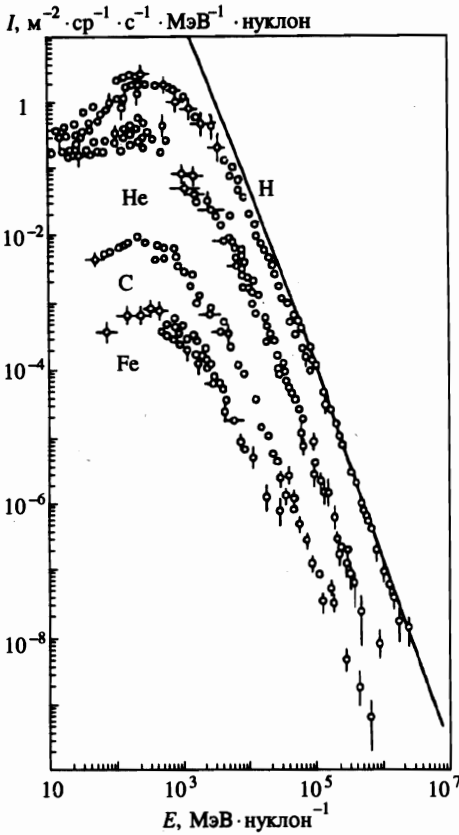


Рис. 1. Дифференциальные спектры космических лучей [1]. Прямая — наша аппроксимация по формуле (2)

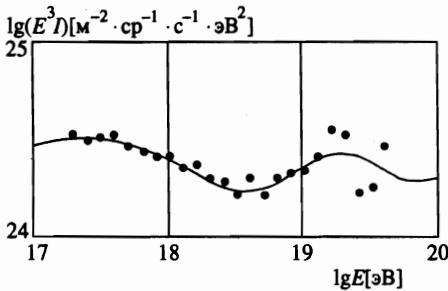


Рис. 2. Экспериментальный спектр космических лучей [1, 2]. Кривая — наша аппроксимация по формуле (7)

образом, предполагается, что главным источником космических лучей является не сам взрыв сверхновой, а ее длительная активность после взрыва.

В данной работе мы рассмотрим другую гипотезу (см. [4–6] и указанную там литературу), а именно, возможность ускорения частиц в обрывающихся космических плазменных пинчах.

Мы предполагаем, что в турбулентной космической плазме, возможно и вблизи сверхновых, могут время от времени возникать замкнутые торообразные петли магнит-

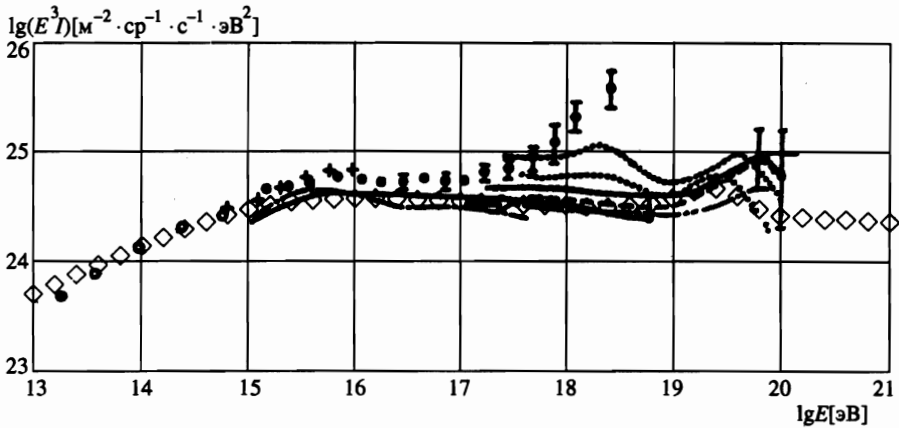


Рис. 3. Дифференциальный спектр космических лучей из [3]. Ромбики — наша аппроксимация по формуле (18)

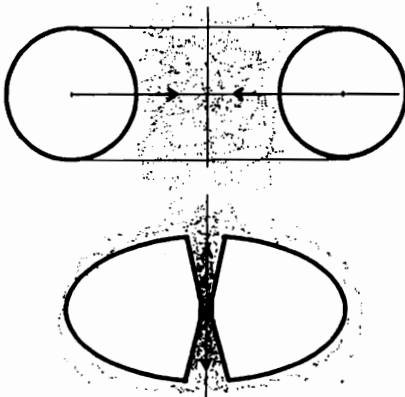


Рис. 4. Стягивание магнитного тора с образованием центрального пинча при наличии внешнего давления

ного поля, типа изображенных на рис. 4. Постепенное стягивание магнитного тора к оси должно приводить к образованию центрального пинча с током, при обрыве которого и могут ускоряться частицы плазмы.

В последние годы появились более детальные сведения об энергетическом спектре галактических космических лучей. В спектре наблюдаются два излома: один при энергиях порядка  $(3-5) \cdot 10^{15}$  эВ и второй — при  $3 \cdot 10^{18}$  эВ. Однако определение спектра космических лучей при энергиях  $E > 10^{16}$  эВ возможно только путем регистрации вторичных частиц широких атмосферных ливней, порождаемых в атмосфере Земли одиночными первичными частицами. При этом переход от вторичных к первичным не является тривиальным, и наличие первого излома в спектре первичных частиц подвергается сомнению в работах [7, 8]. Возможно, его следует приписать интервалу более высоких энергий ( $10^{16}-10^{17}$  эВ), и в работе [7] для интервала энергий  $10^{13}-10^{18}$  эВ Никольским предложена чисто аппроксимационная формула «без излома»:

$$dN/dE = \text{const} \cdot E^{-\nu}, \quad \nu = 2.55 + 0.02 \ln(2E) \quad (1)$$

(здесь энергия протонов измеряется в ТэВ). Ниже мы покажем, что формулы, основанные на физических представлениях о механизмах ускорения частиц в пинчах при определенном подборе параметров позволяют аппроксимировать весь спектр космических лучей со всеми его тонкими деталями.

## 2. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРА КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Как впервые показано в [4], при гидродинамическом выдавливании плазмы из перетяжки (как из пипетки) пинча с релятивистской плазмой возникает спектр ускоренных частиц (условимся называть их пипеточными)

$$I_0(E) = \text{const} \cdot E^{-\nu}, \quad \nu = 1 + \sqrt{3}, \quad (2)$$

с показателем  $\nu = 2.732$ , весьма близким к реально «наблюдаемому» для частиц космических лучей (см. рис. 1) с энергиями  $10^{10} \leq E \leq 3 \cdot 10^{15}$  эВ.

Однако помимо пипеточного в пинче имеется и второй, индукционный, механизм — ускорение ионов периферийной плазмы в индукционном электрическом поле (см. [5, 6]), приводящее в ультрарелятивистском случае к спектру вида

$$I_1(E) = C_1 E^{-1} e^{(-E/E_i)}, \quad E_i = eJ_1/c, \quad (3)$$

где  $J_1$  — обрывающийся ток пинча. Если сложить оба спектра для многих пинчей, приписываемых рассматриваемой моделью нашей Галактике, то получается формула для суммарного дифференциального спектра:

$$\frac{dN}{dE} = \sum I_0 + \sum I_1 = \frac{c_{pip}}{E^\nu} + \frac{S(E)}{E}, \quad S(E) = \sum_{i=1}^? C_i \exp\left(-\frac{E}{E_i}\right), \quad (4)$$

где  $c_{pip}$  и  $E_i = eJ_i/c$  — постоянные. У нас нет сведений о статистике обрывающихся токов  $J_i$  в Галактике, однако ясно, что путем подбора величин  $\nu$ ,  $c_{pip}$  и нужного числа параметров  $C_i$ ,  $E_i$  можно построить аппроксимационную формулу, отражающую все нюансы поведения спектра. Одиночный член суммы в формуле (4) может описать какой-либо узкий горб в спектре, а широкий плавный излом можно приписать наличию группы многих непрерывно распределенных токов, которые полезно изучить отдельно.

Рассмотрим, например, следующий вариант. Сумму  $S(E)$  в (4) заменим на интеграл по «токам»  $J = eJ_i/c$ , записав его в виде  $S(E) = \int C(J) \exp(-E/J) dJ$ . Предполагая, что малых токов много, а больших мало, будем считать, что функция  $C(J)$  убывает по степенному закону и, более того, экспоненциально обрывается при больших токах по закону

$$C(J) = aJ^{-1-p} \exp(-J/4E_{gal}), \quad (5)$$

где  $a, p, E_{gal}$  — подгоночные параметры. Такой выбор приводит в спектре к следующей добавке от непрерывных токов:

$$\frac{1}{E} S(E) = \frac{a}{E} \int_0^\infty J^{-1-p} \exp\left(-\frac{J}{4E_{gal}} - \frac{E}{J}\right) dJ = A \frac{K_p(x)}{x^{p+2}}, \quad (6)$$

где  $A = 4a(2E_{gal})^{-p-1}$ ,  $x = \sqrt{E/E_{gal}}$ , а  $K_p(x)$  — модифицированная функция Бесселя, для которой при любых  $x$  рекомендуем пользоваться следующей аппроксимацией:

$$K_p(x) \approx \Gamma(p)2^{p-1} \frac{e^{-x}}{x^p} (1 + \beta_p x)^{(2p-1)/2}, \quad \beta_p = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \right]^{2/(2p-1)} \quad (7)$$

Для  $p = 3/2$  она является точной, а, например, для  $K_1$  и  $K_2$  имеем

$$K_1(x) \approx x^{-1} e^{-x} \sqrt{1 + \frac{x\pi}{2}}, \quad K_2(x) \approx 2x^{-2} e^{-x} \sqrt{\left(1 + \frac{x\pi^{1/3}}{2}\right)^3}, \quad (8)$$

что отличается от табличных значений  $K_{1,2}$  не более чем на 3% при всех  $x$ .

Если «взлет» спектра после второго излома приписать обрыву каких-то гипотетических метагалактических токов ( $I_{met}$ ), то можно добавить в спектр хотя бы еще одно слагаемое вида (3), так что окончательно можно сказать, что пинч-механизм предсказывает следующий вид спектра:

$$\begin{aligned} dN/dE &= I_{pip} + I_{gal} + I_{met}, \quad I_{pip} = C_1 E^{-\nu}, \\ I_{gal} &= C_2 E^{-\mu} e^{-x} \xi_\mu(x), \quad I_{met} = C_3 E^{-1} e^{-E/E_{met}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\xi_\mu(x) = (1 + x\beta_{\mu-1})^{\mu-3/2}$ ,  $x = \sqrt{E/E_{gal}}$  и  $C_{1,2,3}$  — постоянные.

Сравним наши формулы с наблюдаемыми спектрами. На рис. 2 и 3 для удобства в спектр добавлен множитель  $E^3$ , с учетом которого формулу (9) перепишем в виде

$$\frac{dN}{dE} E^3 = c_{pip} E^{3-\nu} + c_{gal} E^{3-\mu} e^{-x} \xi_\mu(x) + c_{met} E^2 \exp\left(-\frac{E}{E_{met}}\right), \quad (10)$$

где введены новые обозначения для постоянных.

Здесь имеются семь подгоночных параметров, и для построения кривой на рис. 2 мы подобрали для них следующие численные значения:  $c_{pip} = 5 \cdot 10^{20}$ ,  $\nu = 2.82$ ,  $c_{gal} = 8.2 \cdot 10^{19}$ ,  $\mu = 2.73$ ,  $E_{gal} = 1.4 \cdot 10^{17}$  эВ,  $c_{met} = 2.77 \cdot 10^{-14}$ ,  $E_{met} = 9 \cdot 10^{18}$  эВ. Как видно из рис. 2, они позволяют удовлетворительно аппроксимировать экспериментальные точки работы [2] в области второго излома. Однако в области первого излома ситуация менее удовлетворительна (теоретический излом выглядит слишком плавным), и для улучшения согласия мы введем в теорию новый фактор, а именно, диффузионный уход частиц космических лучей из Галактики.

### 3. УЧЕТ ДИФфуЗИОННОГО УХОДА ЧАСТИЦ

Покажем, что предлагаемый пинч-механизм позволяет качественно правильно описать уход частиц из Галактики.

Грубо говоря, спектр галактических космических лучей имеет степенной вид  $I \sim E^{-\nu}$  с показателем  $\nu = 2.6$  в области до первого излома при энергии  $E_1^* = 3 \cdot 10^{15}$  эВ и с показателем  $\nu = 3.1$  после излома (см. рис. 3). Разность экспериментальных показателей здесь равна  $\delta\nu = 0.5$ , и принято считать (см. [9, 10]), что это можно объяснить зависимостью коэффициента диффузии от энергии, обусловленной более быстрым уходом частиц с высокой энергией, по сравнению с менее энергичными частицами, сильнее «запутывающимися» в хаотических магнитных полях Галактики.

В стационарных условиях уход частиц с энергией  $E$  описывается уравнением диффузии

$$\operatorname{div}(D\nabla n) = Q_0(E),$$

где  $n = n(\mathbf{r}, E) = I/c$  — плотность частиц, а правая часть дает источники первичных частиц. Если считать, что коэффициент диффузии зависит от энергии по закону  $D(E) = D_0\Phi(E)$ , то последний множитель можно перенести направо, и наблюдаемый спектр должен иметь форму  $I \sim I_0(E)/\Phi(E)$ . Таким образом, правильное описание первого излома можно получить, предполагая, что коэффициент диффузии  $D$  постоянен при малых энергиях и пропорционален  $\sqrt{E}$  в области больших энергий за первым изломом.

Покажем, что требуемый вид зависимости  $D(E)$  естественным образом получается в нашей теории при некоторых разумных допущениях о структуре магнитного поля Галактики. Как это и принято (см. [10]), будем считать, что поле  $B$  сосредоточено в неоднородностях размера  $r$ , пронизывая которые, частица отклоняется на угол  $\varphi = r/\rho$ , где  $\rho = E/eB$  — ларморовский радиус ультрарелятивистской частицы. Считается также, что поле является не вполне хаотическим, а «регулярным» (см. [10]), т. е. в соседних неоднородностях оно имеет одинаковое направление.

Тогда сечение столкновений будет приблизительно равно  $\sigma = \varphi r^2 (\approx \pi r^2$  для медленных частиц, отражающихся назад), и для усредненного коэффициента диффузии приблизительно имеем выражение

$$\langle D \rangle \approx \frac{1}{3}c\lambda = \frac{c}{3n_r r^2} \left\langle \frac{1}{\varphi} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{1}{\varphi} \right\rangle = \frac{E}{e} \left\langle \frac{1}{rB} \right\rangle, \quad (11)$$

где  $n_r$  — плотность неоднородностей, а угловые скобки означают усреднение по неоднородностям поля, т. е., по существу, по функции распределения токов, создающих неоднородности. Между тем для распределения токов нами ранее в формуле (5) уже была принята модельная степенная функция с обрезывающей экспонентой, которую мы и используем (поскольку она дает нужный результат). Считая токи замкнутыми, полагаем, что поле кругового тока  $J$  примерно равно  $B = \varphi_0 J/cr$ , где  $\varphi_0$  — коэффициент порядка единицы, и, используя обозначения формулы (5), имеем

$$\left\langle \frac{1}{\varphi} \right\rangle = \frac{E}{\varphi_0} \left\langle \frac{1}{J} \right\rangle = \frac{E}{\varphi_0} \frac{S_{p+1}(E)}{S_p(E)}, \quad (12)$$

где (см. (6))

$$S_p(E) = a \int_0^\infty J^{-p-1} \exp\left(-\frac{J}{4E_{gal}} - \frac{E}{J}\right) dJ = \frac{2a}{(2E_{gal})^p} \frac{K_p(x)}{x^p}. \quad (13)$$

Таким образом, находим величину

$$\left\langle \frac{1}{\varphi} \right\rangle = \frac{p\Phi(x)}{\varphi_0}, \quad \Phi(x) = \frac{xK_{p+1}}{2pK_p} \begin{cases} \approx 1, & x \ll 1, \\ \approx x/2p, & x \gg 1. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь, очевидно, обеим асимптотикам будет удовлетворять выражение

$$\Phi_{app}(x) = \sqrt{1 + (x/2p)^2} = \sqrt{1 + E/4p^2 E_{gal}}, \quad (15)$$

которое и удобно использовать, так что усредненный по токам коэффициент диффузии (11) будет равен

$$\langle D \rangle = D_0 \Phi(E), \quad D_0 = \frac{c}{3n_r \pi r^2}, \quad \Phi(E) \approx \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon = E/4p^2 E_{gal}$  — приведенная энергия частицы.

Полученный из этих нестрогих оценок коэффициент диффузии имеет желательные для нас асимптотики, и первый излом спектра будет располагаться в районе  $\varepsilon \approx 1$ . Посмотрим теперь на вновь полученные спектры с учетом диффузии.

#### 4. СПЕКТРЫ С УЧЕТОМ ДИФфуЗИИ И БЕЗ НЕЕ

Рассмотрим несколько вариантов аппроксимации спектров космических лучей. Для первого случая отбросим индукционные члены, учтя лишь «пипеточный» член и диффузию, что дает следующие варианты.

$$1) \quad I_1 = I_{pip+dif} = A_1 \frac{E^{-\nu}}{\Phi(E)}, \quad \Phi(E) = \sqrt{1 + \frac{E}{E_1^*}}. \quad (17)$$

Такой спектр может описать первый излом, но не имеет горба в области второго излома, и для его учета дадим один «метagalактический» член, что дает

$$2) \quad I_2 = I_{pip+dif} + I_{met+dif} = A_1 \frac{E^{-\nu}}{\Phi(E)} \left[ 1 + \left( \frac{E}{E_2^*} \right)^{\nu-1} \exp \left( -\frac{E}{E_{met}} \right) \right]. \quad (18)$$

Путем подбора мы обнаружили, что при параметрах  $A_1 = 7 \cdot 10^{17}$ ,  $\nu = 2.55$ ,  $E_1^* = 1.2 \cdot 10^{15}$  эВ,  $E_{met} = 10^{19}$  эВ,  $E_2^* = 7.4 \cdot 10^{29}$  эВ получается удовлетворительное согласие с рис. 3, где теоретическая кривая (18) изображена ромбиками.

Однако экспериментальные данные рис. 3 имеют слишком большой разброс, и для определенности мы будем пытаться аппроксимировать экспериментальные точки рис. 2, где второй излом имеет вид ямки со скругленными левым и правым склонами. Между тем в варианте 2 левый склон является прямолинейным, поскольку он образован пипеточными частицами. Кроме того, в варианте 2 первый излом возникает от диффузии «галактических» частиц, хотя сами они не учтены, и теперь мы попытаемся их учесть.

Если это сделать, то можно для простоты вообще не учитывать пипеточные частицы, и тогда при учете диффузии для спектра имеем (ср. с вариантом 2)

$$3) \quad I_3 = I_{gal+dif} + I_{met+dif} = A_2 \frac{E^{-\mu}}{\Phi(E)} \left[ e^{-x} \xi_{\mu}(x) + \left( \frac{E}{E_3^*} \right)^{\mu-1} \exp \left( -\frac{E}{E_{met}} \right) \right]. \quad (19)$$

Чтобы сохранить начальный участок спектра и область первого излома, нам следует здесь, как и в варианте 2, положить  $A_2 = A_1 = 7 \cdot 10^{17}$ ,  $E_1^* = 1.2 \cdot 10^{15}$  эВ,  $\mu = \nu = 2.55$ ; при этом найдем  $\xi_{2.55} = (1 + x\beta_{1.55})^{1.05} \approx 1 + x$ . Однако для  $x = \sqrt{E/E_2^*}$  и далее следует по-новому подобрать три параметра:  $E_2^* = 1.3 \cdot 10^{18}$  эВ,  $E_3^* = 7.44 \cdot 10^{29}$  эВ,  $E_{met} = 10^{19}$  эВ.

В качестве еще одного случая рассмотрим вариант без пипеточных частиц и без диффузии:

$$4) I_4 = I_{gal} + I_{met} = A_4 E^{-\mu} \left[ e^{-x} \xi_{\mu}(x) + \left( \frac{E}{E_4^*} \right)^{\mu-1} \exp \left( -\frac{E}{E_{met}} \right) \right], \quad (20)$$

с новыми подобранными параметрами:  $A_4 = 2 \cdot 10^{20}$ ,  $\mu = 2.75$ ,  $x = \sqrt{E/E_2}$ ,  $E_2 = 2.36 \cdot 10^{17}$  эВ,  $\xi_{2.75}(x) = (1 + 0.845x)^{5/4}$ ,  $E_4^* = 1.6 \cdot 10^{19}$  эВ,  $E_{met} = 1.3 \cdot 10^{19}$  эВ.

Наконец, рассмотрим особый, проверочный, вариант 5, аналогичный варианту 4, но с полуцелым показателем  $\mu = 5/2$  для малых энергий. Полезность этого случая обусловлена тем, что, во-первых, функции Бесселя с полуцелыми индексами точно выражаются через полиномы и экспоненты, так что здесь в коэффициенте диффузии не требуется производить сшивку асимптотик, как это делалось ранее. Во-вторых, значение  $\mu = 5/2$  близко к значению  $\mu_N = 2.55$ , принятому в работе Никольского [4] для малых энергий. Итак, с учетом диффузии, рассмотрим (ср. (6))

$$5) I_5 = I_{gal+dif}^{\mu=5/2} + I_{met+dif} = \frac{S(E)}{E\Phi(E)} = \frac{1}{\Phi(E)} \left[ A \frac{K_{3/2}(x)}{x^{7/2}} + \frac{B}{E} \exp \left( -\frac{E}{E_{met}} \right) \right] = \\ = A_5 \frac{E^{-5/2}}{\Phi(E)} \left[ \frac{1+x}{e^x} + \left( \frac{E}{E_5^*} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{E}{E_{met}} \right) \right], \quad (21)$$

где  $x = \sqrt{E/E_{gal}}$ . Повторим, что здесь использовано точное выражение для функции Бесселя  $K_{3/2}(x) = \sqrt{\pi/2} x^{-3/2} e^{-x}(1+x)$ , и в данном случае оно полностью совпадает с нашим приближением (7). Для коэффициента диффузии здесь также получается элементарное «точное» (см. (14)) выражение

$$D(E) = D_0 \Phi(E), \quad \Phi(E) = \Phi(x_d), \quad \Phi(x) = \frac{x K_{5/2}}{3 K_{3/2}} = 1 + \frac{x^2}{3+3x}, \quad (22)$$

где  $x_d = \sqrt{E/E_{dif}}$  и  $E_{dif}$  — параметр «диффузионной» энергии, которую необходимо подобрать для правильного расположения первого излома. При соответствующем подборе всех нужных параметров точно решаемый вариант 5 фактически не отличается от варианта 3, как это для наглядности продемонстрировано на рис. 5.

Если здесь учесть диффузию прежним способом, разделив выражение (21) на  $\sqrt{1+E/E_1^*}$  и подобрав нужным образом параметр  $E_1^*$ , определяющий положение первого излома, то вариант 5 будет фактически совпадать с вариантом 3.

На рис. 5 приведены экспериментальные точки из [2] (ромбики) и три теоретические аппроксимации — варианты 2, 3 и 4.

Наилучшим приближением к экспериментальным данным на рис. 2 и 3 является вариант 3, который можно рассматривать как удобную аппроксимационную формулу, предназначенную для описания всей области ультрарелятивистских энергий  $10^{10} \leq E \leq 10^{20}$  эВ. Этим свойством она отличается от других аппроксимационных формул (например, от формулы Никольского (1), не учитывающей второго излома), предназначенных, как правило, для описания ограниченных участков спектра.

Однако наши формулы являются не просто подобранными для аппроксимации, но основаны на определенных модельных физических представлениях о механизме ускорения частиц в электрических полях, и поэтому ниже мы подробнее рассмотрим эти модели.



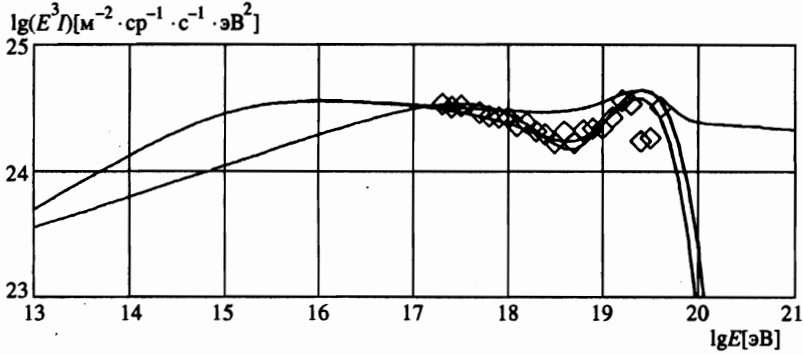


Рис. 5. Аппроксимация спектра космических лучей по формулам (18)–(20). Ромбики — экспериментальные данные [2]

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПИНЧ-МЕХАНИЗМОВ

Итак, вариант 1 учитывает только пипеточные частицы и диффузию, обеспечивающую первый излом. Он, однако, не учитывает второй излом, который в нашей модели может дать только учет метagalактического члена, который и добавлен в варианте 2. В этом варианте прямолинейные (визуально) участки на рис. 5 между первым и вторым изломами и после метagalактического горба образованы пипеточными частицами, которые, однако, дают, по-видимому, слишком высокие интенсивности для области сверхвысоких энергий  $10^{20} \leq E \leq 10^{21}$  эВ. Поэтому в вариантах 3 и 4 пипеточные частицы вообще не учтены.

Вариант 3, учитывающий «галактические» и «метagalактические» частицы и диффузию, по-видимому, можно признать наиболее близким к экспериментальным данным рис. 3. Однако здесь важно отметить, что для получения правильного расположения первого излома (в предположении, что он объясняется диффузией) мы использовали усреднение коэффициента диффузии по спектру токов вида (5), взятому с одним значением параметра  $E_{gal} = E_{dif} = 1.25 \cdot 10^{14}$  эВ, тогда как для получения правильного расположения второго излома (в предположении, что его левый склон образован галактическими частицами) мы использовали спектр того же вида (5), но с другим значением параметра  $E_{gal} = 1.3 \cdot 10^{18}$  эВ. Это означает, что в варианте 3 мы предполагаем наличие двух наборов токов, из которых первый ответствен за диффузию, а второй за ускорение группы галактических частиц.

Поясним это подробнее с физической интерпретацией параметров. В формуле (5) введена переменная  $J = eJ_i/c$ , и применительно к диффузии ее полезно переписать в виде

$$C(J) = aJ^{-1-p} \exp(-J/4E_{gal}) = aJ^{-1-p} \exp(-J/J_{max}^{dif}). \tag{23}$$

Здесь введено обозначение для максимального тока  $J_{max}^{dif} = 4E_{gal}c/e$ , так что  $E_{gal} = E_{dif} = eJ_{max}^{dif}/4c$ , а переменная  $x$  применительно к диффузии равна  $x = \sqrt{E/E_{dif}}$  и дает принятую нами зависимость для коэффициента диффузии  $D = D_0 \sqrt{1 + E/E_1^*}$ . Тем самым здесь мы полагаем  $E/E_1^* = (x/2p)^2$  и  $E_1^* = 4p^2 E_{dif}$ . В вариантах 2 и 3

правильное расположение первого излома достигалось при выборе

$$E_1^* = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ эВ}, \quad p = \mu - 1 = 1.55,$$

так что здесь  $E_{dif} = 1,25 \cdot 10^{14}$  эВ, что соответствует ответственному за диффузию максимальному току

$$J_{max}^{dif} = 4cE_{dif}/e = 5 \cdot 10^{22} \text{ а.е.} = 1.7 \cdot 10^{13} \text{ А.}$$

Такое численное значение, по-видимому, можно признать приемлемой оценкой для нашей Галактики. Например, в обзоре [11] нашей Галактике приписывается ток порядка именно  $J_G \sim 10^{13}$  А, и такие же токи приписываются межзвездной среде в книге [12].

С другой стороны, плотность энергии галактических космических лучей, как известно, равна  $1 \text{ эВ/см}^3$ , и такой же является средняя плотность энергии магнитного поля, которое, следовательно, равно  $B = 6 \cdot 10^{-6}$  Гс. Найденный выше максимальный ток  $J_{max}^{dif} = 1.7 \cdot 10^{13}$  А мог бы создать указанное поле при радиусе токового канала  $r_J = 5.7 \cdot 10^{17} \text{ см} = 0.6 \text{ св. года}$ . Полезно отметить, что этот размер будет совпадать с ларморовским радиусом частицы в этом поле:

$$r_B = E/eB = E[\text{эВ}]/300B[\text{Гс}] = 5.7 \cdot 10^{17} \text{ см} = 0.6 \text{ св. года},$$

если критическая энергия частицы равна  $E_{cr} = 10^{15}$  эВ. Это значение и соответствует точке первого излома спектра (у нас  $E_1^* = 1.2 \cdot 10^{15}$  эВ), что делает наш вывод коэффициента диффузии  $D = D_0 \sqrt{1 + E/E_1^*}$  достаточно самосогласованным.

Рассмотрим теперь галактические частицы в варианте 3 (с диффузионным первым изломом) и в варианте 4 (без диффузии). В обоих случаях для распределения токов применялась формула (21), но со значением параметра

$$E_{gal}^{(3)} = 1.3 \cdot 10^{18} \text{ эВ или } E_{gal}^{(4)} = 2.36 \cdot 10^{17} \text{ эВ.}$$

В пересчете на токи, как это сделано выше, находим

$$J_{max} = 4E_{gal}c/e, \quad J_{max}^{(3)} = 1.7 \cdot 10^{15} \text{ А}, \quad J_{max}^{(4)} = 3.15 \cdot 10^{14} \text{ А.}$$

Эти токи превышают найденный выше «диффузионный» ток соответственно в 100 и в 19 раз, и стандартное магнитное поле  $B = 6 \cdot 10^{-6}$  Гс они создавали бы при радиусах токовых каналов

$$r_J^{(3)} = 5.7 \cdot 10^{19} \text{ см} = 60 \text{ св. лет и } r_J^{(4)} = 10^{19} \text{ см} = 10 \text{ св. лет.}$$

Последняя цифра примерно соответствует среднему расстоянию между звездами в Галактике. Если найденные радиусы токовых каналов приравнять ларморовским радиусам для того же магнитного поля, то получим соответствующие критические энергии частиц

$$E_{cr}^{(3)} = 10^{17} \text{ эВ}, \quad E_{cr}^{(4)} = 2 \cdot 10^{16} \text{ эВ.}$$

Обсудим теперь метагалактический член, который в обоих вариантах 3 и 4 введен примерно с одинаковым значением обрезавшего параметра

$$E_{met} = 10^{19} \text{ эВ} = eJ_{max}^{met}/c,$$

что дает

$$J_{max}^{met} = 3.3 \cdot 10^{17} \text{ А.}$$

Такое значение токов можно приписать пространству между обычными спокойными галактиками (см. [12]), тогда как активной радиогалактике Лебедь-А по результатам ее численного моделирования приписан ток  $2.5 \cdot 10^{19}$  А [12], при периодических обрывах которого должны были бы рождаться частицы с максимальной энергией  $E_{met}^{max} = 7.5 \times 10^{20}$  эВ. Однако эта радиогалактика удалена от нас на 75 Мпс, и с такого расстояния эти частицы, по-видимому, не могут доходить из-за торможения на чернотельном фоне реликтовых фотонов (длина торможения  $\sim 40$  Мпс).

Однако, известное скопление галактик в созвездии Девы удалено от нас на расстоянии 17 Мпс, и в работе [9] предполагалось, что от этого объекта к нам могут доходить частицы с максимально наблюдаемой (на сегодня) энергией  $E = 3 \cdot 10^{20}$  эВ, соответствующей току  $10^{19}$  А. Эти частицы, однако, движутся не прямолинейно, а в межгалактических полях  $B_{met} \sim 5 \cdot 10^{-7}$  Гс закручиваются с ларморовским радиусом

$$r_B = E[\text{эВ}]/300B[\text{Гс}] = 2 \cdot 10^{24} \text{ см} \approx 1 \text{ Мпс.}$$

Это соответствует примерно расстоянию между галактиками, и поэтому в зарегистрированных на сегодня наблюдаемых направлениях прихода указанных сверхэнергичных частиц не видны какие-либо астрономические объекты. Подчеркнем, что в отличие от вариантов 1 и 2 варианты 3 и 4 теоретически указывают на резкий экспоненциальный обрыв спектра при энергиях порядка  $10^{20}$  эВ, что согласуется с наблюдениями.

Наконец, отметим, что вариант 4 без диффузии рассмотрен нами потому, что, в частности, в работах [3, 7] существование резкого первого излома подвергается сомнению, а нерезкий изгиб теория дает и без диффузии (точнее, в предположении, что коэффициент диффузии не зависит от энергии). Как видно из рис. 1 и 5, в варианте 4 показатель степенного спектра  $\nu = 2.75 (\approx 1 + \sqrt{3})$  хорошо пригоден не только для области энергий  $E \leq 10^{13}$  эВ (рис. 1), но и для более высоких энергий вплоть до  $E \sim 10^{16} - 10^{17}$  эВ.

Приведенные оценки параметров пинч-механизма рождения галактических космических лучей представляются достаточно разумными. Ясно, что космические лучи ускоряются в каких-то электрических полях, и по общепринятой ударно-волновой гипотезе эти поля (относительно слабые) имеются в МГД-волнах (или в ударных МГД-волнах), с которыми длительное время резонансно взаимодействуют частицы. В предлагаемом здесь пинч-механизме предполагается иная картина, а именно, ускорение в сравнительно сильных, но кратковременно действующих электрических полях, возникающих при периодических обрывах токов в пинчах космической плазмы.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим следующие пять пунктов.

1) Изображенные на рис. 3 наблюдаемые спектры космических лучей имеют заметные различия, но грубо в них можно усмотреть восемь характерных параметров: общую нормировку, наклон начального участка, расположение первого излома, наклон спектра после него, положение второго излома (см. рис. 2), наклон после него и, наконец,

расположение последнего максимума и наклон спада после него. Ясно, что аналитическая аппроксимационная формула должна содержать такое же число подгоночных параметров, однако в формуле (19) (см. также рис. 5) мы смогли обойтись шестью параметрами. При этом три из них (характерные энергии  $E_1^*$ ,  $E_2^*$ ,  $E_{мет}$ ) удается физически разумным образом связать с тремя характерными размерами: средним расстоянием между звездами, толщиной галактического диска и размерами гало (или средним расстоянием между галактиками).

2) Частицы, выдавленные из перетяжки релятивистского пинча должны иметь интегральный спектр с показателем  $\sqrt{3}$  (см. Приложение А), весьма близким к наблюдаемому. Однако в формуле (19) эти частицы для простоты не учтены, и модель использует, по существу, единственную формулу (3) и функцию распределения токов.

3) Предполагаемый вид функции распределения токов дает правильный (близкий к наблюдаемому) скачок ( $\nu_2 - \nu_1 \approx 0.5$ ) показателей спектра в области первого излома, что отчасти оправдывает предположение. В рассматриваемой модели этот скачок возникает вследствие диффузионного характера распространения частиц по Галактике после актов генерации, что должно обеспечить изотропность их потока в целом, которая и наблюдается. Отметим, однако, что такое астрофизическое объяснение первого излома не является однозначным, и в некоторых работах (см. [7]) он приписывается не первичному потоку космических лучей, а особенностям ядерных реакций во вторичных широких атмосферных ливнях, по которым лишь и можно исследовать частицы с высокими энергиями.

4) Иногда считают, что самые энергичные частицы приходят из ближайшего к нам скопления галактик в созвездии Девы, удаленного на 14 Мпс, а возможно, и из более далеких галактик с активными ядрами. В частности, для согласования компьютерной картины свечения радиогалактики Лебедь-А с наблюдаемой картиной, следует допустить (по данным [12]), что в ее пинчах циркулирует огромный ток  $2 \cdot 10^{19}$  А, периодические обрывы которого могли бы по нашей модели породить частицы с энергией  $E_{max} = eJ/c = 7 \cdot 10^{20}$  эВ, и это, по-видимому, соответствует максимально возможной энергии космических лучей (на сегодня  $E_{max} = 3 \cdot 10^{20}$  эВ).

5) Наконец, можно высказать еще одну гипотезу, требующую, однако, дальнейших исследований. Нельзя исключить, что и гамма-всплески, природа которых на сегодня считается не установленной, рождаются в пинчах (другие возможные гипотезы рассмотрены в обзоре [13]).

Тогда узконаправленность вперед лучей тормозного излучения узкого пучка ультррелятивистских электронов, тормозящихся при их столкновениях с ионами, но движущихся почти прямолинейно, ведет к резкому сокращению (в  $10^{-4}$  раз, см. Приложение Б) длительности регистрируемого в приборе сигнала по сравнению с длительностью самого процесса излучения. Заметим, что типичный гамма-всплеск длится в среднем 10 с, однако, в [14] описан редкий случай с длительностью в 1.5 ч с максимальной энергией квантов 18 ГэВ. Возможно, что здесь краткий интенсивный начальный участок длительностью около трех минут обусловлен первым пипеточным механизмом, а последующий длительный малоинтенсивный, но высокоэнергичный «хвост» порожден вторым, электродинамическим, механизмом. Учет узконаправленности может привести к пересмотру имеющихся оценок суммарной мощности гамма-всплесков (возможно, что многие лучи просто не попадают в наши приборы).

Кроме того, применительно к гамма-всплескам пинч-механизм должен помимо электронных пучков породить и ионные пучки с энергией в  $M/m \approx 2000$  раз боль-

шей (из-за одинаковости скоростей электронов и ионов в пипеточном механизме выталкивания квазинейтральной плазмы из перетяжек пинчей). Тогда нельзя исключить, что «ионной» мощности гамма-всплесков может оказаться достаточно для непрерывной подпитки космических лучей, частицы которых вследствие диффузии, как показывают оценки, уходят из нашей Галактики примерно за 100 млн. лет.

Заметим, что, быть может, в космосе «работают» несколько различных механизмов ускорения заряженных частиц: ударно-волновой при взрывах сверхновых звезд, «перезамыкательный» в нейтральных токовых слоях вдоль так называемых  $X$ -линий — «прорех» (заметим, однако, что эти линии являются дефокусирующими, что должно затруднить ускорение) и два пинч-механизма (вдоль фокусирующих  $O$ -линий), а возможно, и другие, пока нам не известные.

Например, некоторые исследователи считают, что так называемые скрытые массы галактик, по оценкам раз в десять превосходящие суммарную массу их видимых звезд, могут состоять не из газа, а из пылинок (см. [15]), что и ведет к их наблюдаемой прозрачности ввиду разреженности. И не могут ли в них возникать молнии, подобные тем, которые наблюдаются в турбулентных тучах пепла при извержениях вулканов?

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Пипеточная модель рождения галактических космических лучей

Указанная в основном тексте формула (1) для спектра пипеточных частиц справедлива в предположении, что в собственной системе координат уравнение состояния плазмы является нерелятивистским. В данном Приложении проанализирован более общий случай.

Рассмотрим цилиндрический полностью скинированный  $Z$ -пинч с релятивистской плазмой внутри него, радиусом  $a(t, z)$ , током  $J = \text{const}$  и магнитным полем  $B = 2J/ca$  на границе  $r = a(t, z)$ . Релятивистское уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma n = -\text{div}(\gamma n v) = -\frac{\partial}{r \partial r} (r \gamma n v_r) - \frac{\partial}{\partial z} (\gamma n v_z), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (\text{A.1})$$

где  $n = n_i = n_e$  — плотность ионов и электронов в их собственной системе координат. На границе  $r = a(t, z)$  имеем

$$v_r|_{r=a} = \frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + v_z \frac{\partial a}{\partial z},$$

и в так называемом приближении узкого канала полагаем  $v_r = (r/a) da/dt$ . Тогда уравнение (A.1) принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma n a^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma n a^2 v) = 0, \quad (\text{A.2})$$

где  $v = v_z$ . Далее обозначаем  $\tau = ct$ ,  $\gamma = \text{ch } y$ ,  $u = \gamma v/c = \text{sh } y$ ,  $\rho_* = n a^2 / n_0 a_0^2$  и вводим два оператора:

$$\hat{P} = \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} + u \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{Q} = u \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.3})$$

Тогда (A.2) принимает вид  $\hat{Q} y = -\hat{P} \ln \rho_*$ , однако на границе имеем условие для давления  $p = 2n\Theta = B_\varphi^2 / 8\pi = p_0 (a_0/a)^2$ , так что  $\rho_* = \Theta_0 / \Theta = \text{const} \cdot \mu$ , где введена новая

удобная переменная  $\mu = M_i c^2 / \Theta$  с массой иона  $M_i$ ,  $\Theta$  — температура в энергетических единицах. Тогда окончательно уравнение (А.2) можно переписать в форме

$$\hat{Q}y = -\hat{P} \ln \mu. \tag{A.4}$$

Вторым уравнением является релятивистское уравнение движения  $\nabla_i T_k^i = 0$ , где  $T_k^i = (e + p)u^i u_k - p\delta_k^i$  — тензор энергии-импульса. В приближении узкого канала оно принимает форму

$$(e + p)\hat{P}y = -\hat{Q}p, \quad \left(1 + \frac{e}{p}\right)\hat{P}y = -\hat{Q} \ln p, \tag{A.5}$$

где скаляр  $e = e_i + e_e = n(M_i c^2 \langle \gamma \rangle_{T_i} + m_e c^2 \langle \gamma \rangle_{T_e})$  означает плотность энергии в собственной системе координат. Дополнительно имеем уравнение адиабаты  $dE = d(Ve) = -pdV$  и, поскольку  $nV = \text{const}$ , это уравнение дает зависимость  $n = n(\Theta)$ :

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\mu d\Gamma = \frac{1}{2} [d(\mu\Gamma) - \Gamma d\mu], \quad \Gamma = \langle \gamma \rangle_{T_i} + \frac{m_e}{M_i} \langle \gamma \rangle_{T_e}. \tag{A.6}$$

Вводя функцию Бесселя

$$K_n(\mu) = \int_0^\infty \exp(-\mu \operatorname{ch} x) \operatorname{ch}(nx) dx,$$

находим

$$N(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu\sqrt{1+u^2}} u^2 du = \frac{K_2(\mu)}{\mu}, \quad \langle \gamma \rangle = \frac{d}{d\mu} \ln \frac{1}{N}, \quad \Gamma = \frac{d}{d\mu} \ln \frac{1}{N_i N_e}, \tag{A.7}$$

и интегрирование уравнения (6) дает закон релятивистской адиабаты:

$$p(\mu) = C \exp\left(\Lambda - \mu \frac{d}{d\mu} \Lambda\right), \quad \Lambda = \ln Z, \\ Z = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{K_2(\mu) K_2\left(\frac{m_e}{M_i} \mu\right)}, \quad n(\mu) = \frac{\mu p(\mu)}{2M_i c^2}. \tag{A.8}$$

Окончательно, нелинейные уравнения (А.4), (А.5) можно кратко переписать в виде

$$\hat{P}\mu = -\mu\hat{Q}y, \quad \hat{P}y = -f\hat{Q}\mu, \quad f = \frac{\Lambda''_{\mu\mu}}{\Lambda'_\mu} = \frac{d}{d\mu} \ln \left(\frac{d}{d\mu} \ln Z\right), \tag{A.9}$$

и можно привести к линейной системе уравнений. Для этого используем преобразование годографа и в качестве первого шага вводим обратные функции  $\tau = \tau(\mu, y)$ ,  $z = z(\mu, y)$ . Тогда прямые производные выражаются через обратные по формулам

$$\frac{\partial}{\partial \tau} y(\tau, z) = \frac{z'_\mu}{J}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \mu(\tau, z) = -\frac{z'_y}{J}, \quad \frac{\partial}{\partial z} y(\tau, z) = -\frac{\tau'_\mu}{J}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mu(\tau, z) = \frac{\tau'_y}{J}, \tag{A.10}$$

где  $J = \tau'_y z'_\mu - \tau'_\mu z'_y$  — якобиан перехода. Подставляя (А.10) в (А.9) и вводя «большие» функции  $T = \gamma\tau - uz$ ,  $Z = \gamma z - ut$ , получаем линейную систему уравнений

$$Z'_y = -(\mu T)'_\mu, \quad Z'_\mu = -(Z + T'_y)f(\mu), \quad (\mu T)''_{\mu\mu} + [(\mu T)'_\mu - T''_{yy}]f(\mu) = 0, \quad (\text{A.11})$$

которую можно решить лишь численно. Однако полезно рассмотреть и приближенные решения.

При нерелятивистском уравнении состояния ( $\mu \gg 1$ ) имеем выражения

$$K_2 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\mu}, \quad Z \approx \text{const} \cdot \mu^{-5/2} e^{-\mu/2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Lambda' = (\ln Z)' \approx -\frac{1}{2} - \frac{5}{2\mu}, \quad f = \frac{\Lambda''}{\Lambda'} \approx -\frac{5}{\mu^2},$$

и если ввести новый аргумент  $x = 5/\mu$ , то последнее уравнение (A.11) принимает форму

$$\hat{\mathcal{L}}T = x(T''_{xx} + T'_x) = T - T''_{yy}. \quad (\text{A.13})$$

Здесь  $\hat{\mathcal{L}}$  — оператор Лагерра, обладающий следующими свойствами:

$$\hat{\mathcal{L}}\psi_n = -(1+n)\psi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \psi_n = wL_n^{(1)}, \quad w = xe^{-x},$$

$$L_0^{(1)} = 1, \quad L_1^{(1)} = (2-x)/\sqrt{2}, \quad \int_0^\infty L_m^{(1)}L_n^{(1)}w dx = \delta_{m,n}. \quad (\text{A.14})$$

Поэтому уравнение (A.13) имеет общее решение вида

$$T(x, y) = w(x) \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{(1)}(x) Y^{\sqrt{n+2}}, \quad Y = e^{-|y|} = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (\text{A.15})$$

Любая функция может быть представлена в виде разложения по этим полиномам, и в частности, для дельта-функции  $\delta = \delta(x - x_0)$  и ее производной имеем выражения

$$\delta = \sum_0^{\infty} c_n L_n^{(1)}, \quad \frac{d}{dx}\delta = \sum_0^{\infty} c_n \frac{d}{dx}L_n^{(1)}, \quad c_n = w(x_0)L_n^{(1)}(x_0). \quad (\text{A.16})$$

Предположение о том, что в «начальный» момент  $t = -\infty$  пинч не имел возмущений, означает условие  $T(x, y) = -\infty$  в точке  $x = x_0, y = 0$ , а полный обрыв перетяжки соответствует  $x = \infty, T = 0$ , и в этот критический момент все ускоренные частицы должны быть выдавлены в утолщение, где  $x = 0$ . Поэтому функция распределения в этот момент равна

$$dN = n\gamma\pi a^2 dz = F du, \quad F = \frac{dN}{du} = \frac{A}{\gamma} T'_x \Big|_{x=0}, \quad (\text{A.17})$$

где  $A = \pi a_0^2 n_0 x_0$ . Как показано в [4, 5], ряд (A.15) для  $T$  должен начинаться с номера  $n = 0$ , если возмущение периодически вдоль пинча.

Однако типичное возмущение локально, и для него ряд (A.15) должен начинаться с  $n = 1$ . Тогда для ультрарелятивистских скоростей (при  $Y \approx 1/2y$ , но при нерелятивистском уравнении состояния) получим распределение частиц по энергии в виде степенной функции

$$dN/dE = F/Mc^2 \propto E^{-\nu} \quad (\text{A.18})$$

с показателем  $\nu = 1 + \sqrt{3}$ , который весьма близок к значению 2.74 «наблюдаемому» для космических лучей в области энергий  $10^{10}$ – $10^{16}$  эВ.

Рассмотрим теперь ультрарелятивистское уравнение состояния, для которого вместо уравнения (A.12), находим

$$K_2 \approx 2\mu^{-2}, \quad Z \sim \mu^{-4}, \quad \Lambda'_\mu = (\ln Z)'_\mu \approx -4/\mu, \quad f \approx -1/\mu. \quad (\text{A.19})$$

В этом случае второе уравнение (A.11) принимает квази-бесселевскую форму

$$T''_{\mu\mu} + \frac{1}{\mu} T'_\mu + \frac{1}{\mu^2} (T''_{yy} - T) = 0, \quad (\text{A.20})$$

и его также можно решить. Однако более точной является аппроксимационная модель, описанная ниже.

Нерелятивистский случай (A.12) и ультрарелятивистский (A.18) можно объединить, полагая

$$f = -\frac{5}{\mu(\mu+5)} = \begin{cases} -5/\mu^2, & \mu \gg 1, \\ -1/\mu, & \mu \ll 1. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Эта интерполяционная модель одновременно описывает нерелятивистскую ситуацию в утолщениях пинча и ультрарелятивистскую ситуацию в тонких перетяжках. Для такой модели удобно ввести аргумент  $x = 5/\mu$ , и тогда последнее уравнение (A.11) принимает форму

$$\hat{H}T - T + T''_{yy} = 0 = -4\pi\rho_{eff}, \quad \hat{H}T = x(1+x)T''_{xx} + xT'_x. \quad (\text{A.22})$$

Здесь  $\hat{H}$  — гипергеометрический оператор, и правильным (действительным) решением уравнения  $\hat{H}T = -k^2T$  является сумма двух гипергеометрических функций  $F(a, b; c; z)$ . Полагая  $T \sim zS_k(z)$ , находим

$$S_k(z) = (1-z)^{ik} F(1+ik, 1+ik; 2; z) + (1-z)^{-ik} F(1-ik, 1-ik; 2; z), \quad (\text{A.23})$$

где  $z = x/(1+x)$  — новый аргумент. Именно сумма, а не разность, обеспечивает правильный предел  $S = 2 + (1-k^2)z + \dots$ ,  $T \sim z$  при  $z \rightarrow 0$  в утолщениях пинча. С другой стороны (при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $z \rightarrow 1$  в перетяжках), имеем асимптотику  $S_k(z \rightarrow 1) = -k^{-1} \sin[k \ln(1-z)]$ , которую используем для выражения дельта-функции  $\delta(k) = (\pi k)^{-1} \lim_{a \rightarrow \infty} \sin(ka)$ . Тогда из уравнений

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z) \frac{d}{dz} T_1 \right] = -\frac{k_1^2 T_1}{z(1-z)}, \quad \frac{d}{dz} \left[ (1-z) \frac{d}{dz} T_2 \right] = -\frac{k_2^2 T_2}{z(1-z)} \quad (\text{A.24})$$

получаем условие ортогональности для  $S_k(z)$ -функций:

$$\int_0^1 S_1 S_2 \frac{z}{1-z} dz = \frac{\pi}{2k_1 k_2} \delta(k_1 - k_2). \quad (\text{A.25})$$

Используя это условие, получаем выражения для дельта-функции и ее производной:



$$\delta(z - z_0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c_k S_k(z) dk, \quad \frac{d}{dz_0} \delta(z - z_0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c_k^1 S_k(z) dk, \quad (\text{A.26})$$

где  $c_k = k^2 z_0 S_k(z_0)/(1 - z_0)$ ,  $c_k^1 = dc_k/dz_0$ . Далее, опуская постоянную, запишем основное уравнение в операторной квази-лапласовской форме:

$$\hat{\Delta}T = \hat{H}t - T + T_{yy}'' = \delta(y) \frac{d}{dz_0} \delta(z - z_0), \quad T = \int_{-\infty}^{\infty} C_k z S_k(z) Y^q dk, \quad (\text{A.27})$$

где  $Y = \exp(-|y|)$ . Учитывая соотношения

$$\frac{d|y|}{dy} = \text{sign } y, \quad \frac{d}{dy} \text{sign } y = 2\delta(y), \quad \frac{d^2}{dy^2} Y^q = [q^2 - 2q\delta(y)] Y^q, \quad (\text{A.28})$$

для левой части имеем

$$\hat{\Delta}T = \int_{-\infty}^{\infty} C_k z S_k Y^q [q^2 - k^2 - 1 - 2q\delta(y)] dk. \quad (\text{A.29})$$

Отсюда находим  $q = \sqrt{1 + k^2}$  и, учитывая предел  $S_k(z_0 \ll 1) = 2$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_k z S_k q dk = -\frac{d\delta(z - z_0)}{2dz_0}, \quad C_k = -\frac{k^2}{\pi q z_0} \frac{d}{dz_0} \left[ \frac{z_0 S_k(z_0)}{1 - z_0} \right] = -\frac{2k^2}{\pi q z_0}. \quad (\text{A.30})$$

Тогда «время» оказывается равным

$$T = -\frac{2z}{\pi z_0} J(z, y), \quad (\text{A.31})$$

где

$$J(z, y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(z) \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^2}} \exp(-|y|\sqrt{1 + k^2}) dk,$$

и при  $z = x/(1+x) = 0$  получаем  $J(z = 0, y) = (4/|y|)K_1(|y|)$ , где  $K_1$  — модифицированная функция Бесселя с асимптотикой  $K_1 \approx \sqrt{\pi/2|y|} \exp(-|y|)$  при  $|y| \gg 1$ . Наконец, поскольку формула (A.17) для спектра справедлива (при  $x \rightarrow 0$ ) в обоих случаях, (A.15) и (A.30), то спектр для интерполяционной модели (A.21) оказывается равным

$$dN/dp \sim K_1(|y|)/\gamma|y| \sim \gamma^{-2}(\ln \gamma)^{-3/2} \quad (\text{A.32})$$

и достаточно близким к спектру (A.18)  $dN/dE \sim \gamma^{-\nu}$  с показателем  $\nu = 1 + \sqrt{3}$ , получающимся при нерелятивистском уравнении состояния плазмы в собственной системе координат.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

## О длительности тормозного излучения ультрарелятивистских электронов

В этом особом Приложении рассмотрим гипотезу о возможности рождения гамма-всплесков в плазменных пинчах и, в частности, проблему их наблюдаемой длительности порядка нескольких секунд.

Если ультрарелятивистский электрон с начальной кинетической энергией  $E_0 = mc^2 k_0$  в момент  $t = 0$  влетает в плазменное облако в точке  $x = 0$ , то его кинетическая энергия расходуется на тормозное излучение и убывает по экспоненте  $E(t) = E_0 \exp(-t/\tau_0)$ , где для простоты будем считать, что  $\tau_0 = \text{const}$ . Тогда пройденный им путь определяется уравнением

$$dx = c\sqrt{1 - (1 + k_0 e^{-t/\tau_0})^{-2}} dt, \quad x = c\tau_0 S(t), \quad (\text{Б.1})$$

где

$$S(t) = 4 \int_{s(0)}^{s(t)} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx, \quad s(t) = \sqrt{1 + 2\mu(t)}, \quad \mu(t) = \frac{mc^2}{E(t)},$$

и приближенно для ультрарелятивистских энергий ( $\mu \ll 1$ ) имеем

$$x = x(t) = ct - \delta(t), \quad \text{где } \delta(t) \approx c\tau_0 \left[ \frac{\mu(0)}{2} \right]^2 (e^{2t/\tau_0} - 1). \quad (\text{Б.2})$$

Поскольку ультрарелятивистский электрон излучает тормозные гамма-кванты в узкий конус с раствором порядка  $1/\gamma$  в направлении вперед, а  $x_{fr} = ct$  — координата фронта излучения, то излученная энергия будет сосредоточена в тонком слое толщиной порядка  $\delta$  между фронтом и незначительно отстающим от него электроном. При  $t \gg \tau_0$  имеем  $\delta(t) \approx c\tau_0 [mc^2/2E(t)]^2$ , и если излучение все же попадает в наблюдательный прибор, то в нем оно даст сигнал малой длительности. Если, например, начальная энергия электрона равна  $E(0) = 1$  ГэВ и электрон теряет  $0.99E(0)$  за время  $t_* = 4.6\tau_0$ , то в наблюдательном приборе получим сигнал длительности  $\Delta t \approx 10^{-4}t_*$ .

Эти соображения могут оказаться полезными в том случае, если космические гамма-всплески возникают от тормозного излучения пучков электронов, каким-то образом ускоренных до ультрарелятивистских энергий. Более того, их узконаправленное излучение может не попадать в приборы, и лишь в конце процесса торможения, когда энергия снижается до значений в диапазоне мегаэлектронвольт, излучение становится почти изотропным по направлениям и может попасть в прибор. Учет этих соображений может привести к повышению оценок предполагаемой первичной мощности источников гамма-всплесков, природа которых в настоящее время остается неизвестной.

Работа частично поддержана грантом № 94-3802 фонда INTAS.

## Литература

1. В. Л. Гинзбург, УФН **166**, 169 (1996).
2. D. J. Bird, S. C. Corbató, H. Y. Dai et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 3401 (1993).

3. Л. И. Вильданова, П. А. Дятлов, Н. М. Нестерова и др., Изв. РАН, сер. физическая **58**, № 12, 79 (1994).
4. В. П. Власов, С. К. Жданов, Б. А. Трубников, Письма в ЖЭТФ **49**, 581 (1989).
5. Б. А. Трубников, УФН **160**, № 12, 167 (1990); В. А. Trubnikov, IEEE Trans. Plasma Sci. **20**, 898 (1992).
6. Б. А. Трубников, С. К. Жданов, В. П. Власов, Письма в ЖЭТФ **64**, 225 (1996).
7. С. И. Никольский, Изв. АН РАН, сер. физическая **57**, № 4, 21 (1993).
8. В. И. Яковлев, Ю. М. Василюк, В. В. Жуков, Н. М. Никольская, Изв. РАН, сер. физическая, **58**, № 12, 7 (1994).
9. J. Wdowczyk and A. W. Wolfendale, Nature **281**, 356 (1979).
10. В. С. Березинский, С. В. Буланов, В. Л. Гинзбург, В. А. Догель, В. С. Птускин, *Астрофизика космических лучей*, Наука, Москва (1984), с. 173.
11. M. A. Raadu, Phys. Rep. **178**, 1 (1989).
12. A. L. Peratt, *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, New York (1992), pp. 65, 66.
13. Б. И. Лучков, И. Г. Митрофанов, И. Л. Розенталь, УФН **166**, 743 (1996).
14. K. Hurley, B. L. Dingus, R. Makherjee et al., Nature **372**, 652 (1994).
15. О. Б. Фирсов, ЯФ **56**, 129 (1993).