

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ ЭКСИТОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ НИТЯХ

Е. А. Муляров, С. Г. Тиходеев

*Институт общей физики Российской академии наук
117942, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 мая 1996 г.

Вариационным методом с учетом эффекта диэлектрического усиления, рассчитана энергия основного состояния экситона в полупроводниковой цилиндрической квантовой нити, окруженной диэлектриком. Продемонстрирован эффект диэлектрического усиления экситонов в такой системе. Расчеты свойств экситонов проведены для интеркалированного квазиодномерного полупроводника на основе йодида свинца и для нитей GaAs в асбестовых нанотрубках.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что энергия связи экситонов в полупроводниковых пленках и в квантовых ямах полупроводник/диэлектрик существенно превышает энергию связи трехмерных экситонов в соответствующих объемных полупроводниках. В таких системах кроме эффекта размерного квантования, делающего экситон квазидвумерным, существенную роль в электронно-дырочном взаимодействии играют потенциалы изображений, возникающие благодаря сильному различию диэлектрических проницаемостей полупроводника и диэлектрика (или вакуума в случае полупроводниковых пленок). Они приводят к заметному увеличению притяжения между электроном и дыркой и, как следствие, к усилению экситонов (так называемому диэлектрическому конфайнменту, или диэлектрическому усилению экситонов) [1, 2].

В полупроводниковой квантовой нити, окруженной диэлектриком, электрон и дырка оказываются связанными еще сильнее. Диэлектрическое окружение в такой системе больше, чем в случае квантовой ямы, а значит, доля электростатической энергии, сосредоточенной в объеме диэлектрика, оказывается больше, увеличивая тем самым притяжение между электроном и дыркой. Что касается эффекта размерного квантования, то, как известно, в одномерном кулоновском потенциале частица оказывается бесконечно сильно связанной [3]. Поэтому в квазиодномерном случае следует ожидать больших значений энергии связи экситона. Эффект усиления экситонов в полупроводниковой нити впервые был теоретически исследован в работе [4], где было получено асимптотическое (с логарифмической точностью) выражение для энергии связи экситона в пределе нити малого радиуса. Оно дает оценку эффекта диэлектрического усиления экситона по порядку величины, но не может быть использовано для вычисления энергии связи в конкретных системах.

В настоящей работе мы развиваем вариационный метод расчета энергии связи и пространственного размера квазиодномерного экситона, локализованного в тонкой полупроводниковой нити, находящейся в диэлектрической матрице. В работе рассматри-

ваются две экспериментальные реализации указанной системы: 1) интеркалированное соединение на основе йодида свинца $C_5H_{10}NH_2PbI_3$ [5], в котором полупроводниковые нити PbI_3 окружены диэлектрической матрицей органического вещества; 2) нити GaAs внутри асбестовых нанотрубок [6].

2. ЭКСИТОНЫ В ТОНКОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ НИТИ. ПЕРЕНОРМИРОВКА КУЛОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ

Рассмотрим тонкую полупроводниковую нить в виде цилиндра радиуса R , окруженную диэлектрической средой. Будем предполагать, что носители локализованы в области полупроводника. Для поиска основного состояния экситона Ванье–Мотта будем варьировать функционал энергии

$$H\{\Psi\} = \frac{\hbar^2}{2} \iint d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h \times \left\{ \frac{1}{m_{\parallel e}} \left| \frac{\partial}{\partial z_e} \Psi \right|^2 + \frac{1}{m_{\perp e}} |\nabla_{\rho_e} \Psi|^2 + \frac{1}{m_{\parallel h}} \left| \frac{\partial}{\partial z_h} \Psi \right|^2 + \frac{1}{m_{\perp h}} |\nabla_{\rho_h} \Psi|^2 \right\} + \iint d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) |\Psi|^2, \quad (1)$$

где $m_{\parallel e, h}$ — эффективные массы электрона и дырки в направлении оси z нити, $m_{\perp e, h}$ — массы в перпендикулярном направлении, $V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h)$ — потенциал взаимодействия между электроном и дыркой, $\mathbf{r} = (\rho, z)$, z_e, z_h — координаты электрона и дырки вдоль оси z , ρ_e, ρ_h — радиус-векторы электрона и дырки в плоскости xy . Пробную волновую функцию основного состояния экситона в тонкой полупроводниковой нити в диэлектрической матрице возьмем в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \sqrt{\frac{1}{L} \frac{a}{\sqrt{\pi}}} \exp \left[-\frac{1}{2} a^2 (z_e - z_h)^2 \right] \mathcal{R}_e(\rho_e) \mathcal{R}_h(\rho_h), \quad (2)$$

где L — длина нити, a — вариационный параметр, $\mathcal{R}_{e, h}(\rho_{e, h})$ — нормированные одночастичные волновые функции основного состояния электрона и дырки в двумерном локализирующем потенциале нити. Ниже мы приведем обоснование в пользу выбора пробной функции такого вида.

Наиболее важным для дальнейшего является предположение о том, что длина квазиодномерного экситона намного превосходит радиус нити¹⁾, т. е.

$$aR \ll 1. \quad (3)$$

Необходимо также, чтобы радиус R был достаточно малым, чтобы расстояние между уровнями размерного квантования намного превышало энергию связи экситона. Это позволяет разделить переменные ρ и z в волновой функции (2). С другой стороны, предполагается, что нить достаточно толстая, чтобы было возможно использование макроскопической диэлектрической проницаемости. Как будет показано ниже, ответ очень

¹⁾ В действительности используется несколько более строгое условие на размер экситона — см. ниже, формула (8).

слабо зависит от вида функций $\mathcal{R}_{e,h}(\rho)$, если локализирующий потенциал достаточно сильный (что как раз имеет место в системе полупроводник/диэлектрик) и волновые функции быстро затухают в области барьера. Наконец, из вида пробной функции (2), в которой переменные z и ρ разделены, следует, что второй и четвертый члены в фигурных скобках в функционале энергии (1) (т. е. части, отвечающей кинетической энергии), не содержащие производных по $z_{e,h}$, не зависят от a и их можно опустить.

Потенциал электрон-дырочного взаимодействия имеет вид

$$V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = -e\varphi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h), \tag{4}$$

где $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — значение в точке \mathbf{r} электростатического потенциала заряда e , помещенного в точку \mathbf{r}_0 . Пользуясь аксиальной симметрией системы и перейдя к фурье-образам по координате z , по которой система однородна, можно представить это решение в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta} \Phi_n(k, \rho, \rho_0), \tag{5}$$

где ϑ — угол между векторами ρ и ρ_0 , а выражения для функций Φ_n приведены в Приложении.

При усреднении потенциальной энергии (4) по волновой функции (2) из членов суммы в формуле (5) остается только нулевая гармоника, поскольку волновые функции основного состояния электрона и дырки симметричны и не содержат угловой зависимости. Таким образом, потенциальная энергия как функция параметра a приобретает вид

$$V(a) = \langle \Psi | V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) | \Psi \rangle = -e \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right) \Phi_0(k), \tag{6}$$

где

$$\Phi_0(k) = (2\pi)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi_0(k, \rho_e, \rho_h) \mathcal{R}_e(\rho_e) \mathcal{R}_h(\rho_h) \rho_e \rho_h d\rho_e d\rho_h. \tag{7}$$

Мы видим, что в интеграле (6) существенны только $k \leq a$. При условии, что

$$\frac{1}{\eta} (aR)^2 |\ln(aR)| \ll 1, \tag{8}$$

можно воспользоваться разложением (П.7) в пределе малых k . После усреднения по функциям размерного квантования получим

$$\Phi_0(k) = -\frac{e}{\pi\epsilon_b} \left(\ln \frac{|k|R^*}{2} + C \right), \tag{9}$$

где C — постоянная Эйлера. Здесь $\eta = \epsilon_b/\epsilon_w$, ϵ_b и ϵ_w — диэлектрические проницаемости соответственно диэлектрика и полупроводника

$$\ln \frac{R^*}{R} = \eta\sigma(R) + \sigma(\infty) - \sigma(R), \tag{10}$$

$$\sigma(x) = (2\pi)^2 \int_0^x \rho d\rho \ln \frac{\rho}{R} \int_0^\rho \rho' d\rho' \{ \mathcal{R}_e^2(\rho) \mathcal{R}_h^2(\rho') + \mathcal{R}_e^2(\rho') \mathcal{R}_h^2(\rho) \}. \quad (11)$$

Функция (9) есть не что иное, как фурье-образ потенциала $e/\varepsilon_b \sqrt{z^2 + R^{*2}}$ в области малых k (больших z). Мы видим, что корректный учет конечного размера экситона в плоскости размерного квантования приводит к сглаживанию кулоновского потенциала на масштабах $z \sim R^*$. Этот потенциал оказывается конечным в окрестности $z = 0$, а его изменение — пропорциональным второй степени z независимо от вида пробной функции. Поэтому мы останавливаем наш выбор на функции (2), имеющей характер волновой функции не кулоновского типа, а квантового осциллятора. Что касается роли потенциалов изображений, то она сводится к перенормировке константы электрон-дырочного взаимодействия и эффективного радиуса нити R^* .

Вычисляя интеграл (6) и среднюю кинетическую энергию, для энергии основного состояния экситона получаем

$$E(a) = \frac{\hbar^2}{4\mu} a^2 + \frac{2e^2}{\varepsilon_b} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \ln \frac{aR}{2} + \frac{1}{2} C + \eta\sigma(R) + \sigma(\infty) - \sigma(R) \right\}, \quad (12)$$

где $\mu^{-1} = m_{\parallel e}^{-1} + m_{\parallel h}^{-1}$, μ — приведенная экситонная масса. То, что энергия экситона определяется в первую очередь диэлектрической проницаемостью барьера, отражает тот факт, что электростатическая энергия взаимодействия двух заряженных частиц, локализованных в тонкой полупроводниковой нити, в основном сосредоточена в диэлектрике.

Функции \mathcal{R}_e и \mathcal{R}_h могут сильно различаться. Это весьма существенно для расчета, скажем, силы осциллятора экситонного перехода. Однако в данной работе мы ограничиваемся вычислением только энергии основного состояния экситона. Благодаря слабой зависимости последней от вида функций \mathcal{R}_e и \mathcal{R}_h при вычислении энергии основного состояния они могут считаться равными и быть взяты в простейшем виде. Действительно, ввиду быстрого затухания функций $\mathcal{R}_{e,h}(\rho)$ за пределами нити можно пренебречь разностью $\sigma(\infty) - \sigma(R)$ в формуле (10). Независимо от вида волновых функций $\mathcal{R}_{e,h}(\rho)$ величина $\sigma(R)$ остается порядка единицы, поэтому при выполнении условия (3) величина $\eta\sigma(R)$ мала по сравнению с $\ln(aR)$. Отсюда и из формулы (12) следует, что энергия экситона должна слабо зависеть от вида функций $\mathcal{R}_{e,h}(\rho)$. Используя это обстоятельство, предполагаем в дальнейшем самый простой вид этих функций:

$$\mathcal{R}_e(\rho) = \mathcal{R}_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}R}, & \rho \leq R, \\ 0, & \rho \geq R, \end{cases} \quad (13)$$

и $\sigma(R) = \sigma(\infty) = -1/4$. Тогда для энергии основного состояния экситона как функции вариационного параметра окончательно имеем

$$E(a) = \frac{\hbar^2}{4\mu} a^2 + \frac{2e^2}{\varepsilon_b} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \ln \frac{aR}{2} + \frac{1}{2} C - \frac{\eta}{4} \right\}. \quad (14)$$

В следующем разделе мы используем формулу (14) для вычисления энергии связи экситона в конкретных системах. С помощью разложения электростатического потенциала при малых k (П.7) можно, однако, получить оценку для энергии связи экситона

с логарифмической точностью, которая не зависит от вида пробной функции $f(\alpha\xi)$, где α — безразмерный вариационный параметр, $\xi = z/a_B^*$, $a_B^* = \hbar^2 \epsilon_b / \mu e^2$. Пусть пробная функция нормирована так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\xi) d\xi = f^4(0).$$

Тогда энергию основного состояния экситона можно представить в виде

$$\frac{E(\alpha)}{Ry^*} = \alpha^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi} + 4\alpha \frac{f^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi} \ln \left(\alpha \frac{R}{a_B^*} \omega \right), \quad (15)$$

где $Ry^* = \mu e^4 / 2\hbar^2 \epsilon_b^2$,

$$\ln \omega = C + \frac{1}{2} \eta + f^{-2}(0) \int_{-\infty}^{\infty} F_k[f^2] \ln |k| dk, \quad (16)$$

а $F_k[f^2]$ есть фурье-образ функции $f^2(\xi)$. С логарифмической степенью точности энергию связи экситона можно оценить как

$$E_{ex} \approx 4Ry^* \ln^2 \frac{R}{a_B^*}. \quad (17)$$

Формула (17) совпадает с полученной в [4] для случая нити малого радиуса.

3. ЭКСИТОНЫ В КВАЗИОДНОМЕРНОМ СОЕДИНЕНИИ НА ОСНОВЕ ЙОДИДА СВИНЦА И В НИТЯХ GaAs В АСБЕСТОВЫХ НАНОТРУБКАХ

В соединении $C_5H_{10}NH_2PbI_3$ (химическую формулу для простоты сокращенно обозначим как $pp-PbI_3$), получаемом путем интеркаляции органических молекул пиперидина в полупроводниковую матрицу PbI_2 , были обнаружены сильносвязанные экситоны, энергия связи которых экспериментально оценивается в 700 мэВ [5].

Структура $pp-PbI_3$ представляет собой сверхрешетку из полупроводниковых цепочек $Pb-I$, между которыми упорядоченным образом располагаются молекулы $C_5H_{10}NH_2$, образуя диэлектрическую среду [7]. Атомы йода располагаются вокруг атомов свинца, образуя октаэдры, объединенные общими гранями в нитевидные массивы. Расстояние между центрами атома Pb и ближайших к нему атомов I в среднем равно 3.2 Å. Поэтому геометрический радиус нити (расстояние от центра атома I до оси нити) $R_0 \approx 2$ Å. Сверхрешетка имеет прямоугольную элементарную ячейку, содержащую две полупроводниковые нити. Размеры ячейки $d_x = 8.69$ Å, $d_y = 18.36$ Å, так что радиус нити оказывается намного меньше характерного расстояния между нитями $d \sim d_x, d_y$. Поэтому для расчета экситонных параметров в достаточно хорошем приближении можно

заменить периодическую структуру из квантовых нитей изолированным полупроводниковым цилиндром, окруженным диэлектриком. Более того, физически малым параметром для потенциалов изображений, возникающих благодаря присутствию других квантовых нитей, является не отношение R_0/d , как это было бы в случае сверхрешетки из плоских квантовых ям (т. е. отношение ширины ямы к периоду сверхрешетки), а его квадрат. Последнее утверждение подтверждается конкретными оценками, которые мы здесь не приводим. Однако оно достаточно очевидно из наглядных соображений: та часть потенциалов изображений, которая возникает благодаря присутствию других квантовых ям (или нитей), пропорциональна доле объема, где электрическое поле заметно искажается, т. е. доле объема, занятого полупроводником.

Радиус полупроводниковой нити R может, однако, отличаться от геометрического радиуса R_0 на величину порядка ионного радиуса йода R_1 , т. е. $R = R_0 + R_1$, причем R_1 можно рассматривать как подгоночный модельный параметр. Эта величина не должна превосходить геометрический радиус иона I, который приблизительно равен 2.2 Å. Для получения разумного соответствия между расчетным и найденным экспериментально значениями энергии связи экситона в $pp\text{-PbI}_3$ мы принимаем в наших расчетах R_1 равным 2 Å, т. е. $R = 4$ Å. Диэлектрическую проницаемость ϵ_b барьерного материала мы принимаем равной высокочастотной диэлектрической проницаемости в чистом пиперидинии [8]: $\epsilon_b = 2.1$. Кристаллическая структура полупроводниковых нитей более всего близка к тригональной структуре полупроводника PbI_2 , который, кстати, используется в качестве исходного материала для выращивания интеркалированных соединений. PbI_2 — вещество сильно анизотропное благодаря тому, что оно состоит из аналогичных нитевидных массивов атомов йода и свинца, объединенных общими атомами йода в плоские слои, причем ось анизотропии перпендикулярна к этим слоям [9]. В процессе интеркаляции эти массивы разделяются, и пространство между ними заполняют молекулы пиперидиния, образуя соединение $pp\text{-PbI}_3$. Такое тесное сходство между двумя структурами дает основание предположить, что параметры PbI_2 и полупроводниковых нитей в $pp\text{-PbI}_3$ должны быть близки. Поэтому мы считаем, что $\epsilon_w = 6.1$ [10]. Что касается приведенной массы в плоскости слоев PbI_2 , то ввиду большого разногласия в экспериментах по измерению масс электрона и дырки (см., например, [9, 11, 12]) ее можно оценить в достаточно широком диапазоне $(0.1 \div 0.5)m_0$, где m_0 — масса свободного электрона.

На рис. 1 показаны зависимости энергии связи и средней длины экситона в квазиодномерном $pp\text{-PbI}_3$ от приведенной массы экситона μ , рассчитанные путем минимизации по a энергии (14). Энергия связи экситона достигает 900 мэВ при массе $\mu = 0.1m_0$, что находится в разумном согласии с экспериментом [5] (учитывая достаточно большую ширину линии экситонной фотолюминесценции — 230 мэВ). Заметим, что в области достаточно больших значений μ условие (3) перестает выполняться. Потенциальная энергия при этом заметно превышает кинетическую, и выбор волновой функции в виде (2) перестает быть адекватным.

На рис. 1 приведены также параметры экситона, рассчитанные без учета потенциалов изображений, т. е. в предположении $\epsilon_b = \epsilon_w$ (штриховые линии), и демонстрирующие существенный эффект диэлектрического усиления экситона в полупроводниковой нити.

В последнее время были выращены квантовые нити из GaAs, заполняющего цилиндрические поры в асбестовых нанотрубках [6, 13]. Диаметр каналов, заполненных полупроводником, варьируется от 20 до 100 Å в зависимости от образца. Благодаря

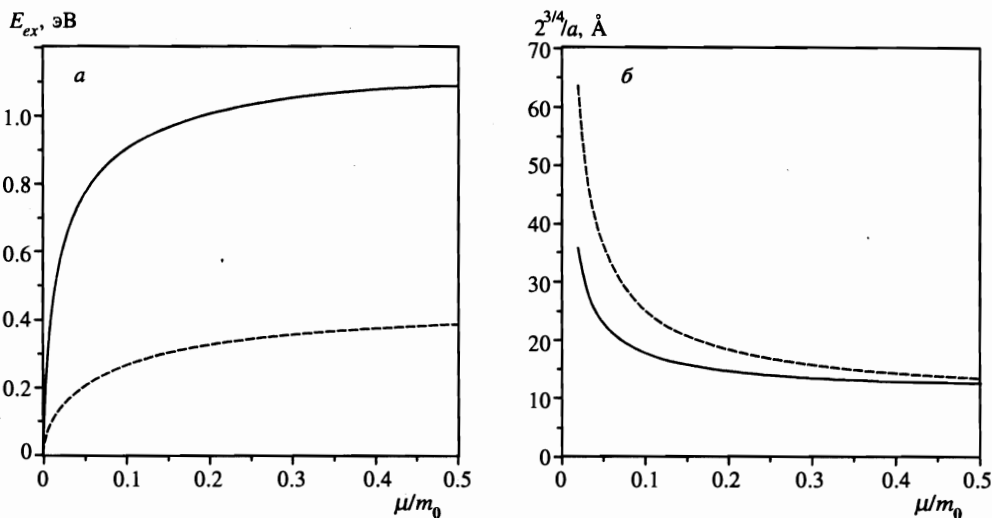


Рис. 1. Рассчитанные вариационным методом энергия связи (а) и средняя длина, $z^{3/4}/a$, (б) экситона как функция приведенной массы экситона μ в квазиодномерном соединении $pp\text{-PbI}_3$ с учетом потенциалов изображений (сплошные линии) и без их учета (штриховые линии)

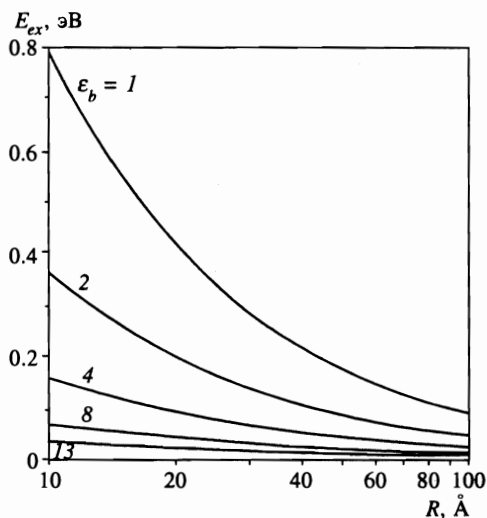


Рис. 2. Рассчитанная вариационным методом энергия связи экситона в нити GaAs как функция радиуса нити R для различных значений диэлектрической проницаемости барьера

эффекту диэлектрического усиления энергия связи квазиодномерных экситонов может в десятки раз превышать энергию связи трехмерного экситона в GaAs. Прямых измерений энергии связи пока не было выполнено. Поэтому весьма интересно ее оценить.

На рис. 2 приведена зависимость энергии связи экситона от радиуса полупроводниковой нити, рассчитанная вариационным методом для различных значений диэлектрической проницаемости барьера (диэлектрика) ϵ_b , указанных соответствующими числами над кривыми. Диэлектрическую проницаемость полупроводника ϵ_w и приведенную

массу экситона μ мы принимаем равными их значениям в объемном GaAs, т. е. $\varepsilon_w = 13$ и $\mu = 0.038m_0$ ($m_e = 0.067m_0$, $m_{lh} = 0.087m_0$ [14]), соответственно. Кривая для $\varepsilon_b = 13$ соответствует тому случаю, когда при расчете энергии связи экситона заряды изображений не учитываются. Таким образом, энергия связи экситона в полупроводниковой нити GaAs в диэлектрической матрице вследствие эффекта диэлектрического усиления может достигать 200 мэВ в нити радиуса 20 Å при $\varepsilon_b = 2$ (ср. с 24 мэВ в той же нити без учета изображений и с 4 мэВ в объемном GaAs).

Таким образом, в полупроводниковых квантовых нитях эффект диэлектрического усиления экситонов оказывается очень ярко выраженным. Развитый в данной модели вариационный подход позволяет вычислять параметры экситонов в квазиодномерных диэлектрических структурах. Конкретные расчеты проведены для интеркалированного квазиодномерного полупроводника $C_5H_{10}NH_2PbI_3$ и для нитей GaAs в асбестовых нанотрубках.

Авторы благодарны В. С. Днепровскому, Е. А. Жукову, А. В. Квиту, Г. Н. Михайловой, В. В. Поборчему, А. М. Прохорову и А. П. Силину за ценные обсуждения. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 095-02-06062а), программой Министерства науки и технической политики «Наноструктуры» (грант № 1-041), а также INTAS (грант № 94-2112).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Электростатический потенциал

Для цилиндрической геометрии можно представить $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — решение уравнения Пуассона для электростатического потенциала в точке \mathbf{r} точечного заряда, расположенного в точке \mathbf{r}_0 — в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta} \Phi_n(k, \rho, \rho_0), \quad (\text{П.1})$$

где ϑ — угол между векторами ρ и ρ_0 . Тогда, если заряд находится внутри цилиндра, $\rho_0 \leq R$, то

$$\Phi_n = (-1)^n \gamma \left[\mu_n I_n(k\rho_0) I_n(k\rho) + \begin{cases} I_n(k\rho) K_n(k\rho_0), & \rho \leq \rho_0, \\ I_n(k\rho_0) K_n(k\rho), & \rho \geq \rho_0, \end{cases} \right], \quad \rho \leq R,$$

$$\Phi_n = (-1)^n \gamma \lambda_n I_n(k\rho_0) K_n(k\rho), \quad \rho \geq R, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\mu_n = \frac{(1-\eta)K_n(kR)K'_n(kR)}{\eta I_n(kR)K'_n(kR) - I'_n(kR)K_n(kR)},$$

$$\lambda_n = \frac{I_n(kR)K'_n(kR) - I'_n(kR)K_n(kR)}{\eta I_n(kR)K'_n(kR) - I'_n(kR)K_n(kR)}, \quad (\text{П.3})$$

$$\gamma = \frac{e}{\pi\varepsilon_w}, \quad \eta = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_w}. \quad (\text{П.4})$$

I_n и K_n — модифицированные функции Бесселя, ε_w и ε_b — диэлектрические проницаемости соответственно полупроводника и диэлектрика. Если заряд находится вне цилиндра, $\rho_0 \geq R$, то

$$\Phi_n = (-1)^n \gamma \lambda_n I_n(k\rho) K_n(k\rho_0), \quad \rho \leq R,$$

$$\Phi_n = (-1)^n \frac{\gamma}{\eta} \left[\nu_n K_n(k\rho_0) K_n(k\rho) + \begin{cases} I_n(k\rho) K_n(k\rho_0), & \rho \leq \rho_0, \\ I_n(k\rho_0) K_n(k\rho), & \rho \geq \rho_0, \end{cases} \right], \quad \rho \geq R, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\nu_n = \mu_n \frac{I_n(kR) I_n'(kR)}{K_n(kR) K_n'(kR)}. \quad (\text{П.6})$$

При $kR \ll 1$ формулы (П.2)–(П.6) для $n = 0$ имеют вид

$$\Phi_0(k, \rho, \rho_0) = -\frac{e}{\pi \varepsilon_b} \left(\ln \frac{|k|R}{2} + C \right) - \frac{e}{\pi \varepsilon} \ln \frac{\max(\rho, \rho_0)}{R} + O\left(\frac{1}{\eta} (kR)^2 \ln(|k|R)\right), \quad (\text{П.7})$$

где $\varepsilon = \varepsilon_w$, если $\rho, \rho_0 \leq R$, и $\varepsilon = \varepsilon_b$ в остальной области, C — постоянная Эйлера.

Литература

1. Н. С. Рытова, ДАН СССР **163**, 1118 (1965).
2. Л. В. Келдыш, Письма в ЖЭТФ **29**, 716 (1979).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва, 1989.
4. В. С. Бабиченко, Л. В. Келдыш, А. П. Силин, ФТТ **22**, 1238 (1980).
5. Е. А. Muljarov, N. A. Gippius, A. V. Kvit et al., *Nanostructures: Phys. and Tech.*, Int. Symp. Abs., St. Petersburg (1994), p. 127.
6. V. V. Poborchii, M. S. Ivanova, and I. A. Salamatina, *Superlattices and Microstructures* **16**, 133 (1994).
7. Г. В. Гридунова, Е. А. Зигер, В. М. Кошкин и др., ДАН СССР **278**, 656 (1984).
8. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 63rd ed., Chem. Rubber Comp., Boca Raton, FL (1983).
9. R. Minder, G. Ottaviani, and C. Canali, *J. Phys. Chem. Sol.* **37**, 417 (1976).
10. G. Lucovsky, R. M. White, M. Y. Liang et al., *Sol. St. Comm.* **18**, 811 (1976).
11. E. Tosatti and G. Harbekke, *Nuovo Cim. B* **22**, 87 (1974).
12. P. D. Bloch, J. W. Hodby, T. E. Jenkins et al., *J. Phys. C* **11**, 4997 (1978).
13. V. Dneprovskii, N. Gushina, O. Pavlov et al., in *Nanostructures: Phys. and Tech.*, Int. Symp. Abs., St. Petersburg (1995), p. 180.
14. A. L. Mears and R. A. Stradling, *J. Phys. C* **4**, L22 (1971).